

AMERICA COLLEGE STUDENT MATHEMATICS COMPETITION TESTS FROM THE FIRST TO THE LATEST

历届PTN美国大学生数学竞赛试题集

1938—2007

刘培杰数学工作室 组织编译

冯贝叶 许康 侯晋川 等 编译

$\zeta(s)=\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

$\int_x d\omega=\int_{\partial x}\omega$

$X^n+Y^n=Z^n$

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



刘培杰
数学工作室

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社　刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-2776-1
9 787560 327761 >
定价 88.00 元

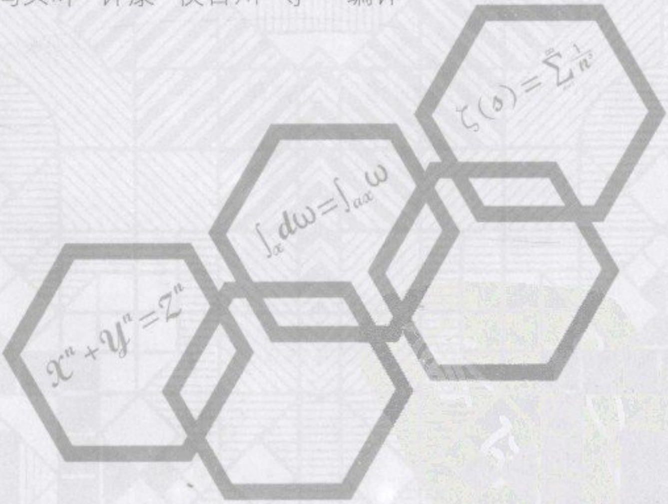
上架建议：高等数学／数学竞赛

AMERICA COLLEGE STUDENT
MATHEMATICS COMPETITION
TESTS FROM THE FIRST TO THE LATEST

历届 PTN 美国大学生数学竞赛试题集

1938—2007

刘培杰数学工作室 组织编译
冯贝叶 许康 侯晋川 等 编译



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书共分三编：第一编试题，共包括 1～68 届美国大学生数学竞赛试题及解答；第二编培训，包括 100 道培训试题；第三编研究，包括六大问题——(一)Mendeleev 问题；(二)Thue－Siegel－Roth 定理；(三)函数唯一性理论；(四)不动点问题；(五)Beatty 定理与 Lambek－Moser 定理；(六)Catalan 猜想。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届美国大学生数学竞赛试题集/刘培杰主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.10

ISBN 978-7-5603-2776-1

Ⅰ.历…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学－高等学校－竞赛题　Ⅳ.O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 132187 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 50.25　字数 850 千字
版　　次　2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2776-1
印　　数　1～3 000 册
定　　价　88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

前言

美国大学生数学竞赛又名普特南竞赛,全称是威廉·洛厄尔·普特南数学竞赛,是美国及整个北美地区大学低年级学生参加的一项高水平赛事.

威廉·洛厄尔·普特南(William Lowell Putnum)曾任哈佛大学校长(自1640年以来,哈佛大学只有28位校长,而美国建国比哈佛建校大约晚了将近140年,却已经有了43位总统),1933年退休,1935年逝世.他留下了一笔基金,两个儿子就与全家的挚友美国著名数学家G·D·伯克霍夫①商量,举办一个数学竞赛,伯克霍夫强调说:“再没有一个学科能比数学更易于通过考试来测定能力了.”首届竞赛在1938年举行,以后除了1943~1945年因第二次世界大战停了两年,其余一般都在每年的十一、十二月份举行.

这个竞赛是美国数学会具体组织的,为了保证竞赛的质量,组委会特组成了一个三人委员会主持其事,三位委员是:波利亚②,著名数学家,数学教育家,数学解题方法论的开拓者,曾主办过延续多年的斯坦福大学数学竞赛(此项赛事中国有介绍,见科学出版社出版的由中国科学院陆柱家研究员翻译的《斯坦福大学数学天才测试》);拉多③,匈牙利数学竞赛

---

① 伯克霍夫(Birkhoff George David,1884—1944),美国数学家,1884年3月21日生于密歇根,祖籍是荷兰.1912年起任哈佛大学教授,后来一直生活在坎布里奇(即哈佛大学所在地).他是美国国家科学院院士,1944年11月12日逝世.

② 波利亚(Pólya George,1887—1985),美籍匈牙利数学家,1887年12月13日出生于匈牙利的布达佩斯.在中学时代,波利亚就显示了突出的数学才能.他先后在布达佩斯、维也纳、哥廷根、巴黎等地学习数学、物理学、哲学等.1912年在布达佩斯的约特沃斯·洛伦得大学获哲学博士学位,1914年在瑞士苏黎世的联邦理工学院任教,1928年成为教授,1938年任院长.1940年移居美国,在布朗大学任教,1942年起在斯坦福大学任教.1985年9月7日在美国病逝,终年98岁.

③ 拉多(Radó,Tibor,1895—1965),匈牙利数学家.生于匈牙利的布达佩斯,卒于美国佛罗里达州的新士麦那比奇.

的早期优胜者，对单复变函数、测度论有重大贡献，曾与道格拉斯同时独立地解决了极小曲面的普拉托(Plateau)问题；卡普兰斯基①，著名的代数学家，第一届普特南竞赛的优胜者.

普特南竞赛的优胜者中日后成名者众多，其中有五人获得了菲尔兹奖：米尔诺②，曼福德③，奎伦④，科恩⑤，汤普森⑥.诺贝尔物理学奖得主中参加过普特南竞赛并获奖的有：Kenneth G. Wilso，Richard Feynman，Steven Weinberg，Murray Gell-Mann，以奥斯卡获奖影片《美丽心灵》而被国人广为知晓的诺贝尔经济学奖得主约翰·纳什(John Nash) 以极大的失望在1947年147位参赛者中名列前10名.难怪有人说：伯克霍夫父子(儿子B·伯克霍夫也是当代活跃的数学家)是普特南家族的密友，这一点是美国低年级大学数学事业的幸运.

这项赛事，题目多出自名家之手，难度很大，质量颇高，受全球数学界所瞩目，历年来仅有3位选手获得过满分(一个在1987年，两个在1988年，1987年的满分由David Moews得到)，其中一位是台湾当年的留学生后成长为哈佛大学统计学教授的吴大峻先生，可见华人数学能力之强.

西风东渐，数学竞赛作为西方数学的一种形态也被引入中国，尽管我们有些数学史家喜欢将明代程大位之《算法统宗》中的一幅木刻插图《师生问难图》当做最早的数学竞赛在中国之证据(这幅图在世界上流传甚广，2008年法兰克福图书博览会会场外的旧书摊上笔者见到了一本讲数学计数及进位制历史的德文版图书，此图赫然纸上)，但那只是雏形.但今天中国确实已经成为了一个中小学数学竞赛大国.从"华罗庚金杯"到"希望杯"，从初中联赛到高中联赛，从CMO到IMO层次众多，体系完备.全国大学生数学竞赛也曾经搞过十届(见许以超，陆柱家等编的《全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答》).

其实普特南竞赛可以看成是IMO的延伸，以第42届IMO美国队获奖者为例，其中IMO历史上唯一一位连续4年获得

---

① 卡普兰斯基(Kaplanski Irving,1917—),美国数学家,1917年3月22日出生于加拿大多伦多,祖籍波兰,父母于第一次世界大战前移居加拿大,1938年在多伦多大学获硕士学位,1941年获哈佛大学博士学位,并留校任教,1975年任美国数学会副主席,1985～1986年任主席,1966年被选为美国国家科学院院士.

② 米尔诺(Milnor John Willard,1931—),美国著名数学家,1931年2月20日生于新泽西州奥伦治,他在中学时就是一位数学奇才,1951年毕业于普林斯顿大学,1954年获博士学位,并留校任教,60年代末成为普林斯顿高等研究院教授,他是美国国家科学院院士,美国数学会副会长.

③ 曼福德(Mumford David Bryant,1937—),美籍英国数学家,1937年6月11日生于撒塞克斯郡.16岁上哈佛大学,1961年获博士学位,1967年起任哈佛大学,教授.1974年获菲尔兹奖.

④ 奎伦(Quillen Daniel,1940—),美国数学家,1940年4月22日生于新泽西州奥林治,1969年起任麻省理工学院教授,他是美国国家科学院院士.

⑤ 科恩(Cohen Paul Joseph,1934—),美国数学家.生于新泽西州,毕业于芝加哥大学,1954年获硕士学位,1958年获博士学位,1966年获菲尔兹奖.

⑥ 汤普森(Thompson John Griggs,1932—),美国数学家,1955年获耶鲁大学学士学位,1959年获芝加哥大学博士学位,1970年获菲尔兹奖,1992年获沃尔夫奖,同年被法国科学院授予庞加莱金质奖章.此奖章只在特殊情况下才颁发,到目前为止只有3人获此殊荣,前两人是J·阿达马(1962年)和P·德利涅(1974年).

金牌且最后一年以满分获金牌的里德·巴顿在参加完IMO之后的秋天进入了麻省理工学院，那年12月(与42届IMO同年)他参加了普特南竞赛，在竞赛中，他获得前5名(前5名中个人的名次没有公开)，而他所在的麻省理工学院代表队仅次于哈佛大学代表队，获得了第2名.

另外一位第42届IMO满分金牌得主(此次IMO共4名选手获满分，另两位是中国选手)加布里埃尔·卡罗尔也在同一年作为大一新生加入了哈佛大学普特南竞赛代表队，并且在竞赛中也获得了个人前5名.

这项赛事的成功是与哈佛大学的成功相伴的，普特南数学竞赛始于西点军校与美国哈佛大学的一场球赛，所以要真正了解此项赛事就必须对这两所名校有所认识，特别是哈佛大学.

17世纪初的英国，宗教斗争十分激烈，清教徒处境艰难，他们陷入两难境地，既不愿抛弃自己的信仰，又不愿拿起武器同当时的国王宣战，最后只能选择背井离乡，远涉重洋，去美洲开辟自己的理想之国.从1620年“五月花号”运载的200名清教徒到达美洲，到1630年在新英格兰的新教徒已多达2万之众.

当他们历尽艰辛建起了美国的教堂之后，一个问题随之出现，“当我们这一代传教士命归黄泉之后，我们的教堂会不会落入那些不学无术的牧师手里?”因为在这些清教徒中，有100多人是牛津、剑桥大学毕业的，他们一直在考虑怎样使“我们的后人也受到同样的教育?”于是他们决心在荒凉的新英格兰兴起一座剑桥式的高等学校，它的使命是“促进学术，留传后人”.

1636年10月28日马塞诸塞州议会作出决议:拨款400英镑兴办一所学校，后人便把此日定为这所学校的诞生日，次年11月5日，州议会命名学校的所在地为“坎布里奇”，校名为“坎布里奇学院”.

在这坎布里奇附近有个小镇，镇上有个牧师叫约翰·哈佛，他是1635年剑桥伊曼纽学院的文学硕士，他来到这镇上不过一两年，便因肺结核去世，临终遗嘱，把一半家产和400册藏书捐赠给坎布里奇学院，这一半遗产是779英镑17先令2便士，是州议会拨款的近2倍，而那400册藏书，在今天看来并不算什么，但以当时的出版之难，以新英格兰的离欧洲文化中心之远，堪称可贵.因有这一慷慨遗赠，州议会遂于1639

年3月13日把学院改名为“哈佛学院”,这就是哈佛大学的肇始.

2万清教徒,在荒凉的北美洲东海岸,办起一座剑桥式的学院,兴起一座文化城,它至今仍叫“坎布里奇”,这地名,凝结着清教徒的去国怀乡之情;那校名,体现了清教徒的莫大雄心:“把古老大学的传统移植于荒莽的丛林.”

数学在早期哈佛中并非重点,在1640年享利·邓斯特受命为哈佛第一任院长时,他遵照古老大学的模式,在设置希伯来、叙利亚、亚拉姆、希腊、拉丁等古代语和古典人文学科之外,还设置了逻辑、数学和自然科学课程,并在1727年设立了数学和自然哲学的教授席,在设立之时,它就宣称:“《圣经》在科学上并无权威,当事实被数学、观察和实验证明的时候,《圣经》不应与事实冲突.”可是宣言只是一种倾向,它在很长的一段时期里没有成为主流,哈佛仍旧沿着古老大学的传统生长,重点还在古典人文学科.

哈佛大学理科的振兴是从昆西开始的,昆西是1829年在浓厚的守旧气氛中上台的,为了名正言顺地实施振兴计划,他开始寻找根据,在1643年的档案中他找到了哈佛的印章设计图,那设计的印章上赫然有个拉丁词:Veritas(真理).这是业经董事会通过的,但一直为什么没用,无从查考,但是它给昆西带来启示:追求真理,这不正是大学的最高目标吗?他把这一发现反映给董事会,要求把这个拉丁词铸到印章上去,恢复清教徒的理想,但在1836年,他的要求未获通过,直到1885年才正式成为哈佛印章的标记.

哈佛大学从20世纪初至今一直是世界数学的中心之一,也是美国数学的重镇.看一看曾经和现在数学系教授的明星阵容就可知其分量:阿尔福斯1946~1977年任哈佛大学教授,菲尔兹奖和沃尔夫奖的双奖得主;伯格曼(Bergman,1898—1977)1945~1951年在哈佛任讲师;伯克霍夫(Birkhoff Garrett,1911—1996)1936~1981年在哈佛任教;G.D.伯克霍夫(Birkhoff George David,1884—1944)1912年后在哈佛;博特(Bott Raoul,1923—?)1959年后在哈佛;布饶尔(Bruuer Richurd Dagobert,1901—1977)1952年起在哈佛;希尔(Hille Curl Einar,1894—1980)1921~1922年任教于哈佛;卡兹当(Kazdan Jerry Lawrence,1937—)1963~1966年在哈佛任讲师;瑞卡特(Rickart,Charles Eurl,1913—)1941~1943年在哈佛任助教;马库斯(Markus Lawrence J,1922—?)1951~1952在哈佛任讲师;莫尔斯(Morse Harold Marston,1892—1977)1926~1935年任教

于哈佛；莫斯特勒(Mosteller Frederick,1916—？)1946 年任教于哈佛；丘成桐(Yau Shing-Tung,1949—)1983 年起任教于哈佛；沃尔什(Walsh, Joseph Leonard,1895—1973)1921～1966 年任教于哈佛.

在世界大学生数学竞赛中有两大强国，一是美国，二是前苏联，对于后者也已请湖南大学的许康教授为我们数学工作室编译一本《前苏联大学生数学竞赛试题及解答》，但我们首先要介绍的是美国，因为从 20 世纪开始，世界数学的中心就已经从德国移到了美国.1987 年 10 月 24 日日本著名数学家志贺浩二在日本新潟市举行的北陆四县数学教育大会高中分会上以“最近的数学空气”为题发表了演讲，其中特别提到了美国数学的兴起，他说：

“与整个历史的潮流相同，在数学方面，美国的存在也值得大书特书，在第二次世界大战的风暴中，优秀的数学家接连不断地从欧洲移居到能够比较平静地继续进行研究的美国，特别是犹太人，他们擅长数学的创造性，人们以为，数学史上大部分实质性的进步是由犹太人取得的.由于纳粹的镇压，许多犹太血统的数学家逃到了美国.于是，美国社会就出现了现在这种数学的全新面貌，可以说浑然一体的数学社会诞生了.到 20 世纪前半叶为止的欧洲，权威思想常常有社会观念作背景，数学也在和哲学权威、大学权威、国家权威等错综复杂地互相作用的同时，来保持数学学科的权威，高木(贞治)赴德时，以希尔伯特为中心的哥廷根(Göttingen)大学的权威俨然存在；1918 年独立后的波兰，在独立的同时，新兴数学的气势好像象征国家希望似的日益高涨.

“然而，由于从欧洲各国来的数学家汇集美国社会，还由于美国社会心平气和地接受了他们.所以，一直支撑学术的大学或国家的权威至今已一并崩溃，整个数学恰与今天的美国社会一样成了浑然一体.美国社会可以说是某种混合体似的社会，具有使每个个人利用各自的力量激烈竞争而生存下去的形态，从中也就产生了领导世界的巨大的数学社会，这当然是于 20 世纪后半叶在数学社会中发生的新现象.”

按照社会学的研究，任何社会都是分层的，而各层之间是需要流动的，流动通道是否畅通决定了一个国家的兴衰.青年阶段是人生上升的最重要阶段，社会留给他们怎样的上升通道决定于整个社会对人才的认识与需求，曹雪芹的时代就是科举，而于连的时代是选择红与黑(主教与军官)，而当今社会大多数国家普遍选择教育，特别是高等教育来作为人生进阶

的手段,这当然是世界各国的共识,也是大趋势.

英国小说家萨克雷(Thackeray,1811—1863)曾写过多篇讽刺上层社会的作品如长篇小说《名利场》、《潘登尼斯》,在其作品中描述了一种大学里的势利小人(University snobs),他们是这样的一种人:“他在估量事物的时候远离了事物的真实、内在价值,而是迷惑于外在的财富、权力或地位所带来的利益.当然存在这样的小人,他们会匍匐在那些财富、权力或地位占有者的脚下,而那些优越的人也会俯视着这些没有他们幸运的家伙,在美国东部的某些学院中,阿谀权贵家庭的情况的确存在,但并没有走到危险的地步.我们大学里那些豪华的学生宿舍和俱乐部表明铺张浪费、挥霍钱财的情况确实存在,但是就整体而言,美国大学中对财富的势利做法相对比较少;这一类的做法已经遍及全国,连低级杂志给富人揭短反而也助长了读者的势利心态,想到这一点,也许我们更该知足了罢.在我们的大学中还有一种愿望同样值得称赞,那就是让每个人都得到一次机会,事实上,大学院系中更具人道主义精神的成员们很乐于浪费他们的精力,力图根据学生的能力而不仅是他们的出身来提携学生,使他们超越自己原来所属的层次.”([美]欧文·白璧德著.文学与美国的大学.张沛,张源,译.北京:北京大学出版社,2004,第51页)

解决这一弊端的一个好办法就是在大路上再修一条快速通过的小路,除正面楼梯外再给天才们留一个后楼梯,那就是竞赛.

那么为什么偏偏选择数学竞赛这种方式呢?

日裔美国物理学家加来道雄(Michio Kaku)在其科普新作《平行宇宙》(*Parallel Worlds*)中指出:“在历史上,宇宙学家因名声不是太好而感到痛苦.他们满怀激情所提出的有关宇宙的宏伟理论仅仅符合他们的一点可怜的数据,正如诺贝尔奖获得者列夫·兰道(Lev Landau)所讽刺的:‘宇宙学家常常是错误的,但从不被怀疑.’科学界有句格言:‘思索,更多的思索,这就是宇宙学.’”

在整个宇宙学的历史中,由于可靠数据太少,导致天文学家的长期的不和和痛苦,他们常常几十年愤愤不平.例如,就在威尔逊山天文台的天文学家艾伦·桑德奇(Allan Sandage)打算做一篇有关宇宙年龄的讲演前,先前的发言者辛辣地说:“你们下一个要听到的全是错的.”当桑德奇听到反对他的人赢得了很多听众,他咆哮着说:“那是一派胡言乱语,它是战争——它是战争!”

想一想连素以自然科学自居的天文学的大家之间都很难达成共识,其他学科可想而知,所以要想客观,要想权威,要想公正,数学竞赛是一个不错的选择,当然围棋也可以,不过那种选拔只能是手工作坊式,无法大面积批量"生产人才".历史总会选择能够大规模、低成本的生产方式,包括选拔人才.商务印书馆创始人张元济先生舍弃地位显赫的公学校长一职而转投当时尚为"街道小厂"的商务印书馆时,所有的人都不理解,后来他才告诉大家因为出版之影响远胜于教育,因为它可快速批量复制.以当时中国的人口规模而言,商务印书馆所发行的课本近一亿册,不能不令人惊叹.

数学竞赛无疑是为了选拔和发现精英的,我们不妨关注一下世界最顶尖的精英集合——诺贝尔奖获得者团体.2008年的诺贝尔奖评选已揭晓,领奖台上又多是欧美科学家,中国科学家再次沦为看客.曾有学者作过统计,一个具有一定的经济基础和科学实力的国家,自革命胜利或独立后30~40年内,一般会出现一名诺贝尔奖获得者,例如,巴基斯坦是29年,印度是30年,前苏联是39年,捷克是41年,波兰是46年,而我们已经建国快60年了,还没有实现零的突破,这已被人们称为当代的"李约瑟难题",这种零诺贝尔奖现象的出现大学有不可推卸的责任.从外表上看,中外大学生都在忙着学知识,但实质上动机有所不同,就像围棋界中既有大竹英雄、武宫正树那样的"求道派",也有坂田荣男、小林光一那样的"求胜派"一样.北京大学教授陈平原在《大学何为》中指出:"总的感觉是,目前中国的大学太实际了,没有超越职业训练的想象力.校长如此,教授如此,学生也不例外."

以大学生数学竞赛为例,本来数学竞赛是用以发现具有数学天赋的数学拔尖人才的一种选拔方式,但在中国却早已蜕变为另一场研究生入学考试,试题极其相近,风格极其相似,一路对高深数学的探索之旅早已演变成追求职业功名的器物之用,而且现在出版的此类图书早已将两者合二为一了,比如笔者手边的一本《大学生数学竞赛试题研究生入学数学考试难题解析选编》即是如此.于是,两类目的不同,风格应该迥异的考试就这样"融合了",所以人们现在格外关注大学精神.

有人把大学的精神境界分为三类:第一类,追求永恒之物,如真理(西方文化里的上帝);第二类,追求比较稳定的事物,如公平、正义、知识等;第三类,追求变化无常的事物,如有用、时尚等,美国一些重点大学一般追求的是第一、二类价值.

以2007年美国大学排名的前4位的校训为佐证:普林斯顿大学 Under God's power she flourishes (拉丁语: Dei Subnumine viget),即借上帝之神力而盛;哈佛大学:Truth(拉丁语:Veritas),即真理;耶鲁大学:Light and truth (拉丁语:Lux et veritas),即光明与真理;加州理工学院:The truth shall make you free,即真理使人自由.

王国维的《人间词话》是这样开篇的:"词以境界为最上.有境界,则自成高格,自有名句."

在2002年的Newsweek International上Sarah Schafer以Solving for Creativity为题发表文章说:"(中国大学教育的)这种平庸性可能会削弱中国的技术抱负,这个国家希望不只是一个世界工厂,北京希望自己的高技术中心能与硅谷相匹敌,但是许多最伟大的创新来自于在实验室中从事纯粹研究的学者,当然,一个到处都是中学数学精英的国家可以为世界提供数以百万计的合格的电脑程序员.但是如果中国真的想成为一个高科技的竞争者,那么中国学生就必须能够创造尖端技术,而不是简单地服务于它."

有人提出现在在中国大学中数学建模大赛日盛,将来能否有一天纯数学竞赛被其取代,对于这种疑问我们可以肯定地说:"在可预见的将来不会,因为就像纯数学永远不可能被应用数学取代一样."

陆启铿先生在庆祝中科院理论物理所建所30周年大会上的讲话中谈到了一个关于应用的例子.

1959年陆启铿先生受华罗庚先生委托,接受了程民德先生的邀请到北京大学数学系为五年级学生开设一个多复变函数课程的任务."大跃进"运动一来,北大提出了"打倒欧家店,火烧柯西楼"的口号,多复变中也有柯西公式,因而也被波及,学生们质问陆先生:多复变是如何产生的? 陆先生说:最初是由推广单复变数的一些结果产生的,学生们又问:多复变有什么实际应用,陆先生说:到目前为止还不知道,学生们说:毛主席教导我们说,真正的理论是从实际中来,又可以反过来指导实际,多复变违反了毛主席对理论的论述,它不是科学的理论;换句话说,是伪科学.

陆先生为此受到很大的压力,后来直到参加了张宗燧先生的色散关系讨论班中才知道了多复变可用于色散关系的证明,就是Bogo Luibov的劈边定理(edge of wedge theorem),也知道未来光锥的管域,就是华罗庚的第四类典型域.纯数学是应用数学的上游,是本与末的关系,美国高等研究院(Institute of

Advanced Study,简记为 IAS)的 Armand Borel 教授将数学比做冰山,他说:

“露在水面以上的冰峰,即可以看到的部分,就是我们称为应用数学的部分,在那里仆人在勤勉、辛苦地履行自身的职责,隐藏在水下的部分是主体数学或纯粹数学,它并不在大众的接触范围之内,大多数人只能看到冰峰,但他们并没有意识到,如果没有如此巨大的部分奠基于水下,冰峰又怎能存在呢?”

其实数学在整个社会文化知识体系中也是大多处于水下部分,但这一点已被更多的人发觉.江苏教育出版社的胡晋宾和南京师范大学附中的刘洪璐注意过一个有趣的现象,那就是国内许多大学的校长(包括现任的、离任的,以及正职、副职)都是数学专业出身.具体见下表.

数学家	所在大学
熊庆来	云南大学
何　鲁	重庆大学(安徽大学)
华罗庚	中国科技大学
苏步青	复旦大学
柯　召	四川大学
吴大任	南开大学
钱伟长	上海大学
丁石孙	北京大学
齐民友	武汉大学
胡国定	南开大学
谷超豪	复旦大学(中国科技大学)
伍卓群	吉林大学
龚　升	中国科技大学
潘承洞	山东大学
王梓坤	北京师范大学
黄启昌	东北师范大学
李岳生	中山大学
梅向明	首都师范大学
陈重穆	西南师范大学

续表

数学家	所在大学
王国俊	陕西师范大学
管梅谷	山东师范大学
李大潜	复旦大学
刘应明	四川大学
张楚廷	湖南师范大学
陆善镇	北京师范大学
陈述涛	哈尔滨师范大学
候自新	南开大学
王建磐	华东师范大学
程崇庆	南京大学
宋永忠	南京师范大学
黄达人	中山大学
程　艺	中国科技大学
叶向东	中国科技大学
史宁中	东北师范大学
展　涛	山东大学
竺苗龙	青岛大学
庾建设	广州大学
陈叔平	贵州大学
吴传喜	湖北大学

据不完全统计共39位,正如胡、刘两位所分析:这个现象与数学学科的育人价值有关系.前苏联数学家A·D·亚历山大洛夫认为,数学具有抽象性、严谨性和广泛应用性,以此推断,数学的抽象性能够使得数学家在校长的岗位上容易抓住纷繁芜杂事务背后的本质,并对之进行宏观调控,实现抓大放小和有的放矢.数学学习讲究原则,数学推理遵循公理,数学思维严谨缜密,这些使得人们对数学家的为人处世的客观性和公正性有较好的口碑,因而更加具有社会基础.学习数学的人具有较强的逻辑思维能力,务实能力强,因而做行政工作时执行力强,更加有条不紊.数学的应用广泛性,也功不可没.数学学习中经历的思想、精神和方法具有较强的迁移作用,能够为担任校长职务锦上添花;现在的许多大学规模宏大,人员众多,

校长面临的许多问题或许会用到数学的思想、方法和技术，因为数学已经从幕后走到台前，渗透到社会生活的方方面面，正因如此，数学家相对而言更加胜任大学校长的角色.

本书的编写也体现了我们对美国高等数学教育的欣赏.

美国人对数学的热情与重视可从下面的两件小事中得以反映.

1963年9月6日晚上8点，当第23个梅森素数 M_{11213} 通过大型计算机被找到时，美国广播公司(ABC)中断了正常的节目播放，以第一时间发布了这一重要消息.发现这一素数的美国伊利诺伊大学数学系全体师生感到无比骄傲，为了让全世界都分享这一成果，以至于把所有从系里发出的信件都盖上了"$2^{11213}-1$ is prime"($2^{11213}-1$ 是个素数)的邮戳.

第二件事是1933年的大学生数学竞赛中西点军校的代表队打败了哈佛大学代表队，一位军校生获得了个人最高分，报纸报道了军队的胜利，并且西点军校队收到了陆军参谋长道格拉斯·麦克阿瑟(Douglas MacArthur，曾以94.18的平均成绩获西点军校自他以前25年来的最高分，此人在抗美援朝战争中被国人知晓)将军的一封特殊的贺信.

有一份报告(National Research Council (NRC), Educating mathematical Scientists: Doctoral Study and the postdoctoral experience in the United States, National Academy Press, 1992)指出：

"美国教育制度的主要长处之一就是其多样性.在任何水平——博士/博士后，大学、中学和小学——都不能强加单一的教育范例，不同的教学计划都可能达到同样的目标，这种教育制度鼓励创新以及满足专业和国家需要的当地解决办法的研究，然后这种当地解决办法就会传播开从而改进所有地方的教育."

这些正是我们要思考、研究和借鉴的！

刘培杰

2009年1月1日于哈工大

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007－09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007－09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008－01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	即将出版	28.00
数学眼光透视	2008－01	38.00
数学思想领悟	2008－01	38.00
数学应用展观	2008－01	38.00
数学建模导引	2008－01	28.00
数学方法溯源	2008－01	38.00
数学史话览胜	2008－01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007－10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008－01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008－05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
空间想象力的发展	即将出版	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006－12	68.00
平面几何证明方法全书	2007－08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006－12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007－09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008－09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009－01	48.00
《平面几何经典著作钩沉》(平面几何作图卷)(上、下卷)	即将出版	78.00
几何变换与几何证题	即将出版	68.00
500 个世界著名几何名题及 1000 个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	即将出版	38.00
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006－05	58.00
历届 CMO 试题集	2008－09	28.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007－03	28.00
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009－01	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008－07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	即将出版	58.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2008－05	48.00
400个最新世界著名数学最值问题	2008－09	58.00
500个最新世界著名中等数学难题	即将出版	68.00
500个早期初等数学征解问题	即将出版	78.00
初等数论难题集(第一卷)	即将出版	68.00
初等数论难题集(第二卷)	即将出版	98.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
博弈论精粹	2008－03	58.00
精神的圣徒　别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008－09	48.00
数学史概论	即将出版	78.00
多项式和无理数	2008－01	68.00
模糊数据统计学	2008－03	48.00
解析不等式新论	即将出版	68.00
数学奥林匹克不等式研究	即将出版	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008－09	68.00
初等数学研究(Ⅱ)	即将出版	
数学奥林匹克超级题库(初中卷)	即将出版	88.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451－86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

目录

第一编　试题　//　1

美国大学生数学竞赛简介　//　3

第 1 届美国大学生数学竞赛　//　9

第 2 届美国大学生数学竞赛　//　18

第 3 届美国大学生数学竞赛　//　31

第 4 届美国大学生数学竞赛　//　44

第 5 届美国大学生数学竞赛　//　56

第 6 届美国大学生数学竞赛　//　69

第 7 届美国大学生数学竞赛　//　77

第 8 届美国大学生数学竞赛　//　87

第 9 届美国大学生数学竞赛　//　99

第 10 届美国大学生数学竞赛　//　111

第 11 届美国大学生数学竞赛　//　124

第 12 届美国大学生数学竞赛　//　135

第 13 届美国大学生数学竞赛 // 147
第 14 届美国大学生数学竞赛 // 160
第 15 届美国大学生数学竞赛 // 169
第 16 届美国大学生数学竞赛 // 179
第 17 届美国大学生数学竞赛 // 188
第 18 届美国大学生数学竞赛 // 200
第 19 届美国大学生数学竞赛 // 210
第 20 届美国大学生数学竞赛 // 220
第 21 届美国大学生数学竞赛 // 231
第 22 届美国大学生数学竞赛 // 242
第 23 届美国大学生数学竞赛 // 251
第 24 届美国大学生数学竞赛 // 259
第 25 届美国大学生数学竞赛 // 270
第 26 届美国大学生数学竞赛 // 278
第 27 届美国大学生数学竞赛 // 285
第 28 届美国大学生数学竞赛 // 291
第 29 届美国大学生数学竞赛 // 298
第 30 届美国大学生数学竞赛 // 303
第 31 届美国大学生数学竞赛 // 309
第 32 届美国大学生数学竞赛 // 315
第 33 届美国大学生数学竞赛 // 322
第 34 届美国大学生数学竞赛 // 330
第 35 届美国大学生数学竞赛 // 337
第 36 届美国大学生数学竞赛 // 344
第 37 届美国大学生数学竞赛 // 351

第 38 届美国大学生数学竞赛 // 358
第 39 届美国大学生数学竞赛 // 365
第 40 届美国大学生数学竞赛 // 373
第 41 届美国大学生数学竞赛 // 379
第 42 届美国大学生数学竞赛 // 386
第 43 届美国大学生数学竞赛 // 394
第 44 届美国大学生数学竞赛 // 401
第 45 届美国大学生数学竞赛 // 408
第 46 届美国大学生数学竞赛 // 416
第 47 届美国大学生数学竞赛 // 422
第 48 届美国大学生数学竞赛 // 429
第 49 届美国大学生数学竞赛 // 438
第 50 届美国大学生数学竞赛 // 444
第 51 届美国大学生数学竞赛 // 450
第 52 届美国大学生数学竞赛 // 457
第 53 届美国大学生数学竞赛 // 465
第 54 届美国大学生数学竞赛 // 476
第 55 届美国大学生数学竞赛 // 485
第 56 届美国大学生数学竞赛 // 493
第 57 届美国大学生数学竞赛 // 504
第 58 届美国大学生数学竞赛 // 514
第 59 届美国大学生数学竞赛 // 525
第 60 届美国大学生数学竞赛 // 531
第 61 届美国大学生数学竞赛 // 541
第 62 届美国大学生数学竞赛 // 550

第 63 届美国大学生数学竞赛 // 560

第 64 届美国大学生数学竞赛 // 568

第 65 届美国大学生数学竞赛 // 578

第 66 届美国大学生数学竞赛 // 590

第 67 届美国大学生数学竞赛 // 600

第 68 届美国大学生数学竞赛 // 615

第二编　培训 // 627

第三编　研究 // 711

(一)Mendeleev 问题 // 713

(二)Thue - Siegel - Roth 定理 // 717

(三)函数唯一性理论 // 729

(四)不动点问题 // 731

(五)Beatty 定理与 Lambek - Moser 定理 // 734

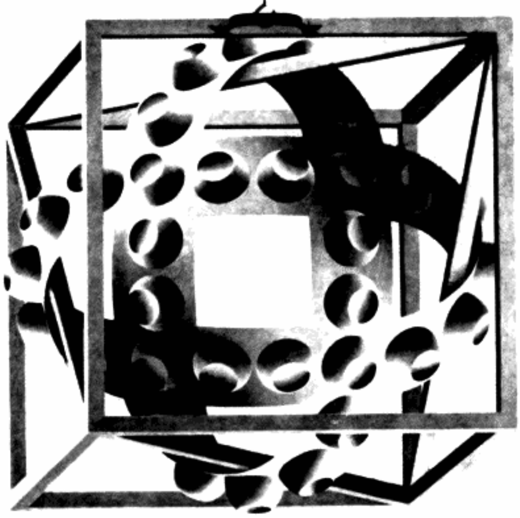
(六)Catalan 猜想 // 766

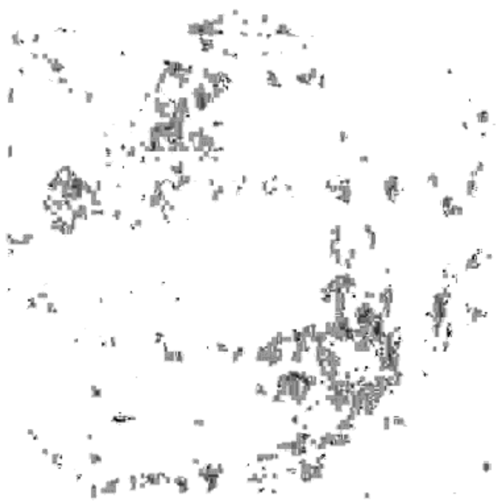
后记 // 781

第一编

试题

冯贝叶 许康 等 编译





美国大学生数学竞赛简介①

Joseph A. Gallian

1 引 言

美国大学生数学竞赛(普特南数学竞赛)每年举行一次,对象是美国和加拿大的高年级数学本科生.第一届美国大学生数学竞赛于 1938 年举行,但其前身为 1933 年举行的 10 名 Harvard 大学的学生和 10 名美国西点军校的学生之间的一次数学竞赛.那次竞赛是 Elizabeth Lowell Putnam 为了纪念其已故的丈夫 William Lowell Putnam 而资助的,W. L. Putnam 是Harvard 大学 1882 级的学生.那次竞赛举行得如此成功,以致有了一个举行年度竞赛的计划,所有感兴趣的大学、学院都可参加.1938 年,美国数学协会(the Mathematical Association of America)资助了第一届官方的美国大学生数学竞赛.Harvard 大学数学系成员准备了试题并评分,而 Harvard 大学的学生被排除在第一年的竞赛之外.竞赛分个人竞赛和团体竞赛.试题从分析、方程论、微分方程和几何等科目中选出.竞赛的前几届的奖金为:团体前 3 名分别获得 \$500, \$300, \$200;而个人前 5 名每人获得 \$50,并且他们成为普特南会员(Putnam Fellow).到 2003 年,团体前 5 名分别获得 \$25 000, \$20 000, \$15 000, \$10 000 和 \$5 000 奖金;而普特南会员每人获得 \$2 500 奖金.此外,每年有一位普特南会员获得 William Lowell Putnam 奖学金,用于在 Harvard 大学读研究生.

163 个个人和 42 个团队参加了第一届竞赛.1961 年参赛者第一次超过了 1 000 人,那年有 1 094 个个人和 165 个团队参赛.2003 年有 3 615 个个人参赛,他们代表了 479 个单位和 401 个团队.2003 年一年的参赛人数超过了 1938 ~ 1957 年前 17 届参赛者人数之和.(由于第二次世界大战,1943 ~ 1945 年的竞赛停办;而在 1958 年有两次竞赛——春秋各一次.)很巧,1980 年和 1981 年都有 2 043 名参赛者.统计到 2003 年,一共有 96 534 名参赛者.很有希望在 2004 年突破 100 000 大关.在战后的第一次竞赛,即 1946 年的竞赛,参赛人数是历史上最少的,只有 67 人和 14 个队.表 1 提供了直到 2003 年的 64 届竞赛的每次参赛人数.

在前 22 届竞赛中,试题数的变化范围为 11 ~ 14,但是从 1962 年的第 23 届开始,竞赛的时间分为两节,一节是上午的 3 小时,一节是下午的 3 小时.每一节要做 6 道题,每道题 10 分.组队的单位必须在赛前指定 3 位参赛者为队员.每队的得分为 3 名队员的排位之和.这样,若一个队的 3 名队员排位为第 21、第 49 和第 102,那么该队得分为 172.队的得分越低,它的排位越高.团体计分的这种方法很大程度上取决于该队的最低得分者,因为有相当多的人在低分段.例如,在 1988 年得 10 分的队员排位第 1 496,但是得 9 分的队员排位在第 1 686.在 2001 年,1 分产生 1 469.5 团体分,而一个 0 分导致 2 292 团体分.这样,个人分数的些微差别可以引起几百个团体分的悬殊.

---

① 原题:The First Sixty-Six Years of the Putnam Competition.
译自:The Amer. Math. Monthly, Vol.111(2004), No.8, 691-699.

表 1　前 64 届竞赛参赛人数

年份	人数	年份	人数	年份	人数	年份	人数
1938	163	1957	377	1972	1 681	1988	2 096
1939	200	1958S	430	1973	2 053	1989	2 392
1940	208	1958F	506	1974	2 159	1990	2 347
1941	146	1959	633	1975	2 203	1991	2 325
1942	114	1960	867	1976	2 131	1992	2 421
1946	67	1961	1 094	1977	2 138	1993	2 356
1947	145	1962	1 187	1978	2 019	1994	2 314
1948	120	1963	1 260	1979	2 141	1995	2 468
1949	155	1964	1 439	1980	2 043	1996	2 407
1950	223	1965	1 596	1981	2 043	1997	2 510
1951	209	1966	1 526	1982	2 024	1998	2 581
1952	295	1967	1 592	1983	2 055	1999	2 900
1953	256	1968	1 398	1984	2 149	2000	2 818
1954	231	1969	1 501	1985	2 079	2001	2 954
1955	256	1970	1 445	1986	2 094	2002	3 349
1956	291	1971	1 569	1987	2 170	2003	3 615

队员的事先指定这一事实及以排位数之和为队的分数的方法，有时引起一些奇特的结果．例如，在 1959 年，Harvard 大学有 4 个普特南会员，但在队际竞赛中只得第 4 名；在 1966 年和 1970 年，MIT(麻省理工学院)虽有 3 名普特南会员，但并非竞赛的优胜者；有 15 次竞赛，优胜者单位中没有普特南会员．

2　代表队的表现

Harvard 大学在美国大学生数学竞赛中有最佳的纪录．直到 2003 年，Harvard 大学有 24 次赢得团体冠军，而其最强有力的竞争者——Caltech(California Institute of Technology，加州理工学院)，获得 9 次团体第一．位于第三、得到过 4 次团体第一的是 MIT，Washington 大学，和 Toronto 大学．Toronto 大学的 4 次团体第一都是在竞赛最早的 6 年中获得的．如果不是因为 Toronto 大学数学系在 1939 年和 1941 年出了竞赛的试题而使自己失去了资格，说不定 Toronto 会取得所有前 6 届的团体冠军．从第 5 届竞赛开始，试题由从不同学校挑选出的一个委员会来准备，而不是由上一届竞赛冠军队的数学系来准备了．这意味着上一年的冠军队不会再失去资格了．很奇怪，Harvard 大学代表队在前 6 次竞赛中都未进入前 5 名，而在直到 2003 年的 64 次竞赛中却有 50 次进入了前 5 名．在前 20 次竞赛(1938 ~ 1959)中，New York 州的一些单位，Brooklyn 学院，Brooklyn 工艺学院，Columbia 大学，和 New York 城市学院，在团体竞赛中以及产生普特南会员方面表现出色．Caltech 的辉煌年代是 1971 ~ 1976 这 6 年，其间，Caltech

赢得5次团体第一.除了 Harvard 大学之外,只有一次同一个队连续3年获得第一,这就是1971~1973年的 Caltech.1976~1986年之间,Washington 大学获得4次冠军和4次亚军.在此期间,Washington 大学仅有两名普特南会员.大约从1990年开始,Duke 大学以与吸收全国最好的高中篮球运动员同样的热情吸收全国最好的高中数学学生.从此以后,Duke 大学以作为 Harvard 大学的高层竞争对手的面貌出现,赢得了3次冠军、2次亚军和4次季军.很有趣的是,在此期间,Duke 大学的普特南团队的表现与其篮球队同样出色!(到2003年止,其篮球队获得3次冠军,3次亚军,没有得过第3名.)Princeton 大学的业绩如同一个女傧相,曾经22次进入前5名,其中7次获得第2名,但从未居榜首.美国州立大学中获得团体冠军的是 Michigan 州立大学(3次),位于 Davis 的 California 大学(1次)和位于 Berkeley 的 California 大学(1次).文科学院获得的最高名次是1972年由 Oberlin 学院所取得的第2名.同一年 Swarthmore 学院获得第4名.Harvard 大学最长的冠军链是8年(1985~1992),而其最长的无冠军链是15年(1967~1981).唯一一次并列第一是1984年的位于 Davis 的 California 大学和 Washington 大学.很令人惊讶,在1986、1987和1990年,Harvard 大学代表队的每一位队员都是普特南会员.每年前5名学校和前5名个人的一份完整的表可在网址 http://www.maa.org/Awards/putnam.html 处找到.表2列出了至少在一次竞赛中取得过前5名的每个队,以及这些单位中普特南会员的总数.表中的末4行是团体从未进入前5名,但至少有两名普特南会员的单位.

表2 前64届竞赛优胜队①

单位	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名	普特南会员数
Harvard Univ.	24	8	12	5	1	91
Caltech	9	3	5	5	5	19
MIT	4	9	7	7	6	37
Univ. of Toronto	4	5	4	3	1	23
Washington Univ.	4	4		1	2	6
Duke Univ.	3	2	4			6
Brooklyn College	3	1	1			5
Michigan State Univ.	3			2		5
Univ. of Waterloo	2	3	5	1	4	8
Cornell	2	3	1	1	2	5
Polytechnic Inst. Brooklyn	2	1				3
Univ. of Chicago	1	3	3	1	2	10
U. California, Berkeley	1	1	2	4	2	16
U. California, Davis	1	1		1		2
Queen's Univ.	1		1	1		1
Case Western Reserve	1			2	1	4
Princeton Univ.		7	4	7	4	17
Yale Univ.		3	1	4	3	8
Columbia Univ.		2	3			8
Rice Univ.		1	1	1	1	3

① 表2中的单位名称保留为原文.——译者注

续表

单位	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名	普特南会员数
U. Pennsylvania		1	1	1		3
City College New York		1		4		10
Dartmouth		1			1	2
U. British Columbia		1			1	1
Oberlin College		1				
Carnegie Mellon			2	1		3
Cooper Union			2			1
U. California, Los Angeles			1		1	2
Harvey Mudd College			1		1	
U. Maryland, College Park			1		1	
New York Univ.			1			3
Miami Univ.			1			
Mississippi Women's College			1			
Stanford Univ.				3	2	
U. Michigan, Ann Arbor				1	2	
Kenyon College				1		2
Swarthmore				1		1
Univ. of Manitoba				1		1
Illinois Inst. Technology				1		
McGill Univ.				1		1
Univ. of Kansas					1	
U. of Minnesota Minneapolis						3
Purdue Univ.						2
U. Alberta						2
U. California, Santa Barbara						2

3 参赛者的成绩

至于普特南会员的产生方面,Harvard 大学仍是占压倒优势的优胜者,它与第 2 位 MIT 的普特南会员人数之比为 91:37. Harvard 大学在某 4 次竞赛中都产生了 4 个普特南会员. 很奇怪,直到第 6 届竞赛 Harvard 才有了它的第一位普特南会员. 此后, Harvard 不产生普特南会员的最长周期是 3 年,而且这只发生这一次. 由于第 4 名有相同的分数,或者第 5 名有相同的分数,在 12 次竞赛中产生了 6 位普特南会员,而在 1959 年,有 4 位参赛者并列第 5,因此产生了 8 位普特南会员. 产生多于 5 位普特南会员的 13 次竞赛中的 11 次出现在 1970 年之后. 到 2003 年,共有 250 个个人成为普特南会员(计重数的话为 335 人次). 仅有 5 人(姓名略——译者)4 次成为普特南会员. 16 人(姓名略——译者)3 次成为优胜者. 应该注意到,有一些 3 次优胜者仅参加了 3 次竞赛,39 人两次成为普特南会员,似乎从没有同一个家庭的两个成员成为普特南会员的. 最接近于此的是 Doug Jungreis 和 Irwin Jungreis 兄弟. Doug 于 1985 年和 1986 年进入前 5 名,而 Irwin 于 1980 年和 1982 年位居第 6 名和第 10 名之间. Dylan Thurston, Fields 奖章得主 William Thurston 的儿子, 1993 年所得名次在第 6 名和第 10 名之间.

女性获得荣誉提名奖或更高类别奖项有记载的第一次是在 1948 年.1949 年本月刊的公告中她被列为“M. Djorup(小姐),Ursinus 学院”.因为许多参赛者用他们的首名和中间名的第一个字母(例如,R. P. Feynman),因此很可能 Djorup 并非是获得荣誉提名奖或更高类别奖项的第一位女性.第一位女性普特南会员是 1996 年 New York 大学的 Ioana Dumitriu;第二位是 2002 年 Duke 大学的 Melanie Wood;第三位是 2003 年 Princeton 大学的 Ana Caraiani.由于不注明参赛者的年龄,因而无从知道竞赛优胜者的最小年龄和最大年龄.最年轻者的一个候选人是 Noam Elkies,他是 1982 年的普特南会员,其时 16 岁 4 个月(Lenny Ng 也在 16 岁时成为普特南会员,但他比 Elkies 大 7 个月).Samuel Klein 可能是一个最老的优胜者,他出生在 1934 年,并且在 1953、1959 和 1960 年为竞赛的优胜者.作为一个集体,2003 年竞赛的 5 位优胜者可能聚集了曾有过的赢得普特南会员最大次数:Gabriel Carroll 第四次,Reid Barton 第三次(仅参加 3 次竞赛),其他 3 人都是第一次.

与早年的美国大学生数学竞赛不同,在近来的 25 年中,许多在美国大学生数学竞赛中有杰出表现的人作为中学生曾经参加过在美国的解题训练夏令营,或者在什么地方参加过每年一次的 IMO(国际数学奥林匹克竞赛)的准备.代表自己的国家参加 IMO 的许多国际学生已经来到美国读本科.其结果是,现在美国大学生数学竞赛的优胜者来自众多国家.

在 1938 ~ 2003 年的 64 次竞赛中,只有 3 个满分——一个在 1987 年,两个在 1988 年.5 个最高得分者总是按其字母次序列出,我们知道,1987 年的满分由 David Moews 得到.关于此分数令人惊奇的是,1987 年的试题是难的一次.分数的中位数①是 1 分,而 26 分则居(2 170 名参赛者的)前 200 位.1987 年的第 2 个最高分是 108 分,而 1988 年的第 2 个最高分是 119 分.1987 和 1988 年的优胜者排位于曾经有过的最强的集体中,其中有 Bjorn Poonen 和 Ravi Vakil,4 次的普特南会员;David Moews 和 David Grabiner,3 次的普特南会员;以及 Mike Reid,一个 2 次的普特南会员.与 1988 年的分数成对比,1963 年竞赛的 1 260 个参赛者的最高分数是 62 分.1963 年,任何一个得分为 28 分的选手排位在前 10%.

4 普特南名人录

在过去的年代里,许多杰出的数学家和科学家都曾经参加过美国大学生数学竞赛.其中有菲尔兹奖章得主 John Milnor, David Mumford, Daniel Quillen, Paul Cohen,和 John G. Thompson(Milnor, Mumford 和 Quillen 是普特南会员;Cohen 排位前 10 名;Thompson 获得荣誉提名奖).物理学诺贝尔奖得主中获得荣誉提名奖或更高类别奖项的有:Richard Feynman, 1939 年的普特南会员;Kenneth G. Wilson,两次成为普特南会员;以及 Steven Weinberg 和 Murray Gell-Mann(以《美丽心灵》闻名的);诺贝尔经济学奖得主 John Nash 以极大的失望在 1947 年 147 名参赛者中名列前 10 名;Eric Lander,人类基因组计划的主要负责人之一,在 1976 年也获得前 10 名;Mumford 和 Lander 都是 MacArthur 会员(Fellow);杰出的计算机科学家 Donald Knuth 于 1959 年获得荣誉提名奖.在美国大学生数学竞赛中有杰出表现的美国数学会理事长有:Irving Kaplansky(1938 年的普特南会员),Andrew Gleason(1940、1941、1942 年的普特南会员)和 Felix Browder (1946 年的普特南会员),以及美国数学协会(MAA)的现任理事长 Ron Graham

① 一个有限实数集 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 的中位数 m 定义如下:不妨设 $a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则 $m=a_{(n+1)/2}$,若 n 为奇数;$m=(a_{n/2}+a_{(n/2)+1})/2$,若 n 为偶数.——译者注

(1958年获得荣誉提名奖).另一些在美国大学生数学竞赛中有杰出表现的人获得了由美国数学会颁发的享有声望的研究奖项.1956年的Harvard大学代表队有一位未来的诺贝尔奖得主(Wilson)和一位未来的菲尔兹奖章得主(Mumford).他们俩都是1956年的普特南会员,并且Harvard大学代表队当年亦取得冠军.

5 结 论

表3提供了1967~2003年间每次竞赛前5名的分数和当年竞赛分数的中位数①.注意,其中有3年的中位数是0,并且有5年的中位数是1!还要注意,1995年第1名与第5名只有1分之差.在1967~2003年间,第1名与第5名分数差的最大差距是35分,而第1名与第2名分数差的最大差距是22分.在此期间的最大中位分数是19,平均中位分数是5.7,中位分数的中位数是4.0分出现最多的一次是1999年,其时2 900个参赛者中有1 745个得0分.

通过考察美国大学生数学竞赛的结果可以吸取什么教训?似乎在美国大学生数学竞赛中有好的表现与作为一个职业数学家的好的成就有关联,但是许多最好的研究数学家在美国大学生数学竞赛中并未得到高分,当然他们中有许多并未参加美国大学生数学竞赛.

表3 1967~2003年期间个人前5名分数和竞赛的分数中位数

年份	1	2	3	4	5	中位数	年份	1	2	3	4	5	中位数
1967	67	62	60	58	57	6	1986	90	89	86	82	81	19
1968	93	92	89	85	85	10	1987	120	108	107	90	88	1
1969	87	82	80	79	73	10	1988	120	120	119	112	110	16
1970	116	107	104	97	96	4	1989	94	81	78	78	77	0
1971	109	90	88	84	74	11	1990	93	92	87	77	77	2
1972	83	79	66	63	59	4	1991	100	98	97	94	93	11
1973	106	86	86	78	76	7	1992	105	100	95	95	92	2
1974	77	70	62	61	57	6	1993	88	78	69	61	60	10
1975	88	87	86	84	80	6	1994	102	101	99	88	87	3
1976	74	70	68	64	61	2	1995	86	86	86	85	85	8
1977	110	103	90	90	88	10	1996	98	89	80	80	76	3
1978	90	77	74	73	71	11	1997	92	88	78	71	69	1
1979	95	90	87	87	73	4	1998	108	106	103	100	98	10
1980	73	72	69	68	66	3	1999	74	71	70	69	69	0
1981	93	72	64	60	60	1	2000	96	93	92	92	90	0
1982	98	90	88	85	82	2	2001	101	100	86	80	80	1
1983	98	88	81	80	79	10	2002	116	108	106	96	96	3
1984	111	89	81	80	80	10	2003	110	96	95	90	82	1
1985	108	100	94	94	91	2							

① 这是我能提供的全部数据.——原注

第1届美国大学生数学竞赛

A－1① 有一个立体，两底位于水平面 $z = h/2$ 与 $z = -h/2$ 内，包围它的侧面是曲面．它的每一个水平截面的面积为

$$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$$

（特殊情形系数可以为零）．证明：它的体积为

$$V = (1/6)h(B_1 + B_2 + 4M)$$

这里 B_1 与 B_2 是底的面积，M 是正中间的水平截面的面积．当 $a_0 = 0$ 时，这个公式包含锥与球的体积公式．

解 问题中的体积由

$$V = \int_{-h/2}^{h/2}(a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3)\mathrm{d}z = \frac{a_1h^3}{12} + a_3h$$

得出，而两底的面积与 M 的面积由

$$B_1 = \frac{a_0h^3}{8} + \frac{a_1h^2}{4} + \frac{a_2h}{2} + a_3$$

$$B_2 = -\frac{a_0h^3}{8} + \frac{a_1h^2}{4} - \frac{a_2h}{2} + a_3$$

$$M = a_3$$

得出．代入公式 $(1/6)h(B_1 + B_2 + 4M)$，得

$$\frac{1}{6}h\left(\frac{a_1h^2}{2} + 6a_3\right) = \frac{a_1h^3}{12} + a_3h = V$$

关于锥和球的情形：对于锥，将顶点放在平面 $z = h/2$ 上，底放在平面 $z = -h/2$ 上，则坐标 z 处水平截面面积为

$$A = (B/h^2)(z - (h/2))^2$$

这里 B 是底的面积．因为 A 是二次多项式，故

$$V = (h/6)(B + 4(B/4) + 0) = (1/3)Bh$$

这是熟知的结果．

对于半径为 $r = h/2$，夹于两平面 $z = -h/2$ 和 $z = h/2$ 之间的球．在 z 的水平截面面积为 $A = \pi(r^2 - z^2)$，式中 A 是二次多项式，得

① A 表示上午试题．

$$V = (h/6)(4\pi r^2) = (4/3)\pi r^3$$

在球与锥的截面面积公式中，z^3 的系数 a_0 等于0.

A－2　有一个浮标由三部分组成，一个圆筒与两个相等的圆锥.其中每一个圆锥的高等于圆筒的高，问当表面积一定时，什么样的形状会有最大的体积?

解　令 r 是圆筒的半径，h 是它的高，已知条件是

$$S = 2\pi rh + 2(\pi r\sqrt{h^2 + r^2}) = \text{常数} \quad ①$$

浮标的体积是

$$V = \pi r^2 h + (2\pi r^2 h/3) = 5\pi r^2 h/3 \quad ②$$

问题是求满足条件①的 V 的最大值，它可以用拉格朗日乘数法.但在这里容易由①中解出 h，使得 V 成为 r 的函数.由①

$$(S - 2\pi rh)^2 = 4\pi^2 r^2(h^2 + r^2)$$

得

$$h = \frac{S^2 - 4\pi^2 r^4}{4\pi rS} \quad ③$$

V 的表达式为

$$V = \frac{5r}{12S}(S - 4\pi^2 r^4) \quad ④$$

因为 r 与 V 一定是正的，涉及的范围为 $0 < r < \sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$.

求导数并令它等于零

$$\frac{dV}{dr} = \frac{5S}{12} - \frac{100\pi^2 r^4}{12S} = 0$$

其唯一临界值是 $r_0 = \sqrt[4]{S^2/20\pi^2}$.因为当 $r \to 0$ 或者 $r \to \sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$ 时 $V \to 0$，并且在它们之间是正的，故在临界值 r_0 处 V 有最大值.

由③求出对应 h 的值 $h_0 = (2/5)\sqrt{5}r_0$.浮标的式样完全由比值 $h_0/r_0 = (2/5)\sqrt{5}$ 确定.

A－3　如果一个质点在平面内运动，它的坐标 x 与 y 可以表示为时间 t 的函数，$x = t^3 - t, y = t^4 + t$.证明：曲线在 $t = 0$ 处有一个拐点，并且质点运动的速度在 $t = 0$ 处有一个极大值.

解　因为当 $t = 0$ 时，dx/dt 不为零，在 $t = 0$ 的邻域 y 作为 x 的函数，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{4t^3 + 1}{3t^2 - 1}$$

因此 dy/dx 在 $t = 0$ 处有一个(局部)极大值，所以曲线在 $t = 0$ 处

有一个拐点.

速度的大小 V 的平方为

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2=2-6t^2+\cdots$$

因此 V 在 $t=0$ 处有一个(局部)极大值.

A－4 伐木工砍一棵树,树干是圆柱形,粗细均匀.它先砍出一道V形槽,槽的两边是平面,两面的交线是通过圆柱的轴的一条水平线,其二面角为 θ.如果给定 θ,证明:平分 θ 的平面是水平面时,所砍去的材料的体积最小.

解 假设 $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_2+\theta<\pi/2$(图1),则角 α_1 与 $\alpha_1+\theta$ 的平面之间楔形体小于 α_2 与 $\alpha_2+\theta$ 之间的楔.因为作角为 $\alpha_2-\alpha_1$ 的一个简单的旋转,看出它是后者的一个真子集.

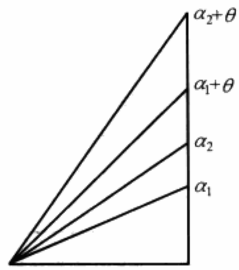


图1

现在考察任何一个具有截面 AOB 的角 θ 的非对称楔,如果 A 与 B 是在通过 O 的水平线的同一侧,则由上面的论证,没有最小的体积.

假设 A 在水平线下面,B 在它的上面.设 AOB 在角 θ 的对称楔 SOT 的下面(图2).它的余楔 AOS 与楔 $A'OT$ 是对称的(如前所证),它大于楔 BOT.因此

楔 AOB = 楔 AOS + 楔 SOB > 楔 SOB + 楔 BOT = 楔 SOT

故对称楔最小.

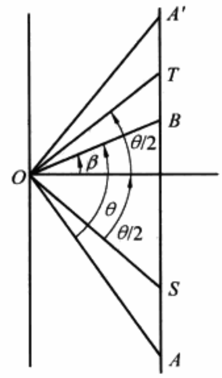


图2

A－5 求下列极限的值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt$.

解 (1) 由洛必达法则所求极限为零.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\frac{2}{e^x}=0$$

或由 $x>0$ 时 $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>\frac{x^3}{6}$$

即 $0<x^2/e^x<6/x$.当 $x\to\infty$ 时 $6/x$ 趋向于零.故所求极限为零.

(2) 由洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt=\lim_{x\to0}(1+\sin 2x)^{1/x}$$

假定最后的极限存在.令 $\phi(x)=(1+\sin 2x)^{1/x}$,则

$$\ln\phi(x)=(\ln(1+\sin 2x))/x$$

再用洛必达法则得

$$\lim_{x \to 0} \ln \phi(x) = 2$$

由指数函数连续性，$\lim\limits_{x \to 0} \phi(x) = e^2$，故

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt = e^2$$

> A－6　一个游泳者站在正方的游泳池的一角，希望到达对角线方向的对面一角．设 w 是步行速度，s 是游泳速度($s < w$)．求他达到目的地所需时间最短的路径．(考虑两种情形，(1)$w/s < \sqrt{2}$，(2)$w/s > \sqrt{2}$)

解　设正方游泳池为 $ABCD$，游泳者最初在 A 处希望达到 C．时间最少的路线可以用下面的方式表达．游泳者从 A 步行到 E(AB 边上的一点)，接着从 E 游到 BC 上的 F，然后从 F 步行到 C．注意取路线 $AGHC$(图 1(a))所需时间等于取 $AEFC$(图 1(b))的路线所需的时间．

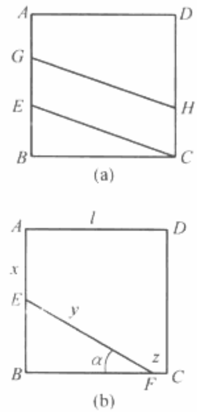


图 1

设 $AE = x$，$EF = y$，$FC = z$，则时间 $T = (x + z)/w + (y/s)$．设和 $x + z$ 是不变的，则和 $y\cos\alpha + y\sin\alpha$ 也是不变的．当 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 是最大值时 y 是最小值．此最大值在 $\alpha = 45°$ 时达到．

所以作为一个时间最少的路线，$x = z$ 及 $y = \sqrt{2}(l - x)$，l 是池的边长．当 $0 \leqslant x \leqslant l$，$T = (2x/w) + \sqrt{2}(l - x)/s$ 有最小值．

T 是 x 的线性函数，它的最大值出现在区间的端点．当 $x = 0$ 时 $T = \sqrt{2}l/s$，当 $x = l$ 时 $T = 2l/w$．

如果 $\sqrt{2}l/s < 2l/w$，则 $w/s < \sqrt{2}$ 或者相反．因此，当 $w/s < \sqrt{2}$，最小路程是唯一的．游泳者必须从对角线通过水池，由 A 到 C．如果 $w/s > \sqrt{2}$，他必须从 A 到 B 到 C 步行．最后，当 $w/s = \sqrt{2}$，T 不依赖 x，有无穷多条最短路线，即 $\alpha = 45°$ 的任何路线 $AEFC$．

> A－7　(1)证明：一个薄的均匀的球壳对一个在球外的点产生的引力，相当于这个球壳的质量全部集中于它的中心时所产生的引力．
>
> (2)确定在曲面 $z = xy$ 上的所有直线，并将结果图示．

解　(1)由高斯定理，如果闭曲面 S 在它的内部包含质量 M，并且 $\boldsymbol{F}$ 是质量 M 生成的引力场，则通过 S 的全流量

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA = -4G\pi M$$

$\boldsymbol{n}$ 是对于 S 向外的单位法向量，dA 是曲面元．

设 S 是一个半径为 R 的球，外面的壳与它同心．由对称性在 S

上 $\boldsymbol{F} = -F(R)\boldsymbol{n}$，其中 $F = F(R)$ 是常量. 故由

$$-4G\pi M = \iint_S -F(R)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\mathrm{d}A = -F(R)\iint_S \mathrm{d}A = -4\pi R^2 F(R)$$

得 $F(R) = GM/R^2$，作为向量

$$\boldsymbol{F} = -(GM/R^2)\boldsymbol{n}$$

(2) 设 L 是通过 $(x_0y_0z_0)$ 的一条直线，它在曲面 $z = xy$ 上. L 的参数方程为

$$x = x_0 + \alpha t,\quad y = y_0 + \beta t,\quad z = z_0 + \gamma t$$

这里 α,β,γ 不全为零，L 在已知曲面上的充要条件是，对于所有的 t

$$z_0 + \gamma t = (x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) = x_0y_0 + (\alpha y_0 + \beta x_0)t + \alpha\beta t^2$$

t^2 的系数 $\alpha\beta$ 为零，故或者 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = 0$.

当 $\alpha = 0$ 则 $\gamma = \beta x_0$，当 $\beta = 0$ 则 $\gamma = \alpha y_0$. α,β 不能同时为零，否则 $\gamma = 0$. 不妨设参数为 1，L 的方程或者为

$$x = x_0, y = y_0 + t, z = z_0 + x_0 t$$

或者为 $$x = x_0 + t, y = y_0, z = z_0 + y_0 t$$

对应的非参数形式为

$$x = x_0, z = x_0 y$$

或者 $$y = y_0, z = y_0 x$$

反之，这样的直线都在曲面上.

B－1① (1) 设 A_{ik} 是行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

a_{ik} 的余子式，D 是在 d 中对应地用 A_{ik} 代替 a_{ik} 所得的行列式，证明：$D = d^3$.

(2) 设 $P(y) = Ay^2 + By + C$ 是 y 的一个二次多项式，设二次方程 $P(y) - y = 0$ 的根是 a 与 $b(a \neq b)$，证明：a 与 b 是双二次方程 $P(P(y)) - y = 0$ 的根. 据此，写出一个二次方程，使得它的根 c 与 d 是上述双二次方程的另外两根，并应用以上结果解下面的双二次方程

$$(y^2 - 3y + 2)^2 - 3(y^2 - 3y + 2) + 2 - y = 0$$

解 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是元素为 a_{ik} 的已给的行列式的矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是余因子 A_{ik} 的矩阵，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，则矩阵的积 $\boldsymbol{\alpha\gamma}$ 是主对角线等于 d 的对角矩阵. 于是

① B 表示下午试题.

$$\det(\boldsymbol{\alpha\gamma}) = d^4 = (\det \boldsymbol{\alpha})(\det \boldsymbol{\gamma}) = (\det \boldsymbol{\alpha})(\det \boldsymbol{\beta}) = dD$$

方程

$$dD = d^4 \qquad ①$$

是无关的、未定的16个矩阵元素的多项式之间的恒等关系.这样确定的 4×4 矩阵的行列式不为零,所以在多项式环里 d 不为零.多项式环是一个整域,由①得 $D = d^3$.

(2) 因为 a 是多项式 $P(y) - y = 0$ 的一个根,有 $P(a) = a$.则 $P(P(a)) = P(a) = a$.所以 a 是 $P(P(y)) - y = 0$ 的一个根.同样 b 也是这个双二次方程的根.

令 $Q(y) = P(P(y)) - y$,求 Q 的另外的零点.注意到

$$P(y) - y = Ay^2 + (B - 1)y + C = A(y - a)(y - b)$$

即

$$A(a + b) = 1 - B$$

所以

$$\begin{aligned} Q(y) = {} & P(P(y)) - P(y) + P(y) - y = \\ & A(P(y) - a)(P(y) - b) + A(y - a)(y - b) = \\ & A(A(y - a)(y - b) + y - a)(A(y - a)(y - b) + \\ & (y - b)) + A(y - a)(y - b) = \\ & A(y - a)(y - b)R(y) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} R(y) = {} & (A(y - b) + 1)(A(y - a) + 1) + 1 = \\ & AP(y) + Ay - A(a + b) + 2 = \\ & A^2y^2 + A(B + 1)y + AC + B + 1 \end{aligned}$$

根 c 与 d 是 R 的零点,所以 c 与 d 为根的所求的二次方程是

$$A^2y^2 + A(B + 1)y + AC + B + 1 = 0$$

特别是当 $A = 1, B = -3, C = 2$ 与 $R(y) = y^2 - 2y$ 的情形.$P(y) - y$ 的零点是 $2 \pm \sqrt{2}$,所以 Q 的零点是 $2 \pm \sqrt{2}$,0 与 2.

B-2 求方程 $yy'' - 2(y')^2 = 0$ 通过点 $x = 1, y = 1$ 的所有的解.

解 $1/y^3$ 是一个积分因子,因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{y^2}\right) = \frac{yy'' - 2(y')^2}{y^3} = 0$$

所以 $y'/y^2 = C$,从而 $-1/y = Cx + D$ 对于适当的常数 C 与 D 成立.为了求通过(1,1)的解,要求 $C + D = -1$,故

$$y = 1/(1 + C(1 - x)) \qquad ①$$

反之,这种形式的任何函数满足已知方程及其初始条件.若 $C = 0$,函数是常数,定义域可取 $(-\infty, +\infty)$.若 $C \neq 0$,当 $x = (1 + C)/C$ 时①的右边为无限,所以①的区域要受限制:当 $C > 0$ 时为 $(-\infty, (1 + C)/C)$,当 $C < 0$ 为 $((1 + C)/C, +\infty)$.

B－3 有一个直径 3 寸水平放置的圆盘，正在按每分钟四周旋转. 离圆盘较远但在同一平面上有一个点在发光. 将一个昆虫放在圆盘的边上离光源最远处，头对光源. 这时它立即惊起按每秒 1 寸爬行，而且总是头对着光源. 试建立运动的微分方程，并求出昆虫再次达到圆盘的边上的点.

解 选择直角坐标系与极坐标系，取圆盘的中心为原点. 昆虫开始在 $(3/2,0)$，光源 $(-\infty,0)$. 圆盘按反时钟方向旋转. 假设在时间 t 昆虫位于 (x,y) 即 (r,θ). 它的速度的水平与垂直方向的分量分别是

$$V_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -1-(2\pi r/15)\sin\theta = -1-(2\pi/15)y \qquad ①$$

$$V_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (2\pi r/15)\cos\theta = (2\pi/15)x \qquad ②$$

对 ① 微分并用 ② 代入得

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -(2\pi/15)\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -(2\pi/15)^2x \qquad ③$$

确定 x 的微分方程

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + (2\pi/15)^2x = 0$$

它的解为 $x = A\cos((2\pi/15)t-\phi)$

由 ① $y = A\sin((2\pi/15)t-\phi)-(15/(2\pi))$

因此昆虫的运动是沿着圆周

$$x^2+\left(y+\frac{15}{(2\pi)}\right)^2 = A^2$$

的等速圆周运动. 圆的中心在 $(0,-(15/(2\pi)))$，半径为 A，这里 A 由初始条件 $t=0, x=3/2, y=0$ 算得 $A^2=(3/2)^2+(15/(2\pi))^2$.

这个圆周与圆盘的边界交于 $(-3/2,0)$，所以昆虫从这一点离开圆盘.

B－4 已知抛物线 $y^2=2mx$，试从它的那些与曲线的法线重合的所有弦中，求一条长度最短的弦.

解 在抛物线上任何一点有形如 $(2mt^2,2mt)$ 的坐标. 设 AB 是抛物线在点 A 的法线弦，$A=(2mt^2,2mt)$，$B=(2ms^2,2ms)$. AB 的斜率是 $1/(s+t)$. 在 A 的切线的斜率为 $1/(2t)$，因此 $s+t=-1/(2t)$. AB 的长 L 由

$$L^2 = 4m^2((s^2-t^2)^2+(s-t)^2) = 4m^2(s-t)^2((s+t)^2+1)$$

给出. 用 $s=-t-1/(2t)$ 代入，得

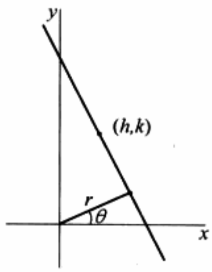
$$L^2 = 4m^2\left(\frac{4t^2+1}{2t}\right)^2\frac{1+4t^2}{4t^2} = \frac{m^2}{4}\frac{(4t^2+1)^3}{t^4} \qquad ①$$

求使 L 最小的 t 的值,即使

$$\frac{4t^2+1}{t^{4/3}} = 4t^{2/3} + t^{-4/3}$$

最小.由导数等于零得两个临界点 $t = \pm\sqrt{2}/2$.因为当 $t \to 0, \pm\infty$ 时 $L \to \infty$.两个临界点都是最小值.① 中两条最短的弦的任一条长为 $3\sqrt{3}\,|m|$.

B－5　从等轴双曲线的中心向曲线的各条切线作垂线,求垂足的轨迹.用极坐标写出轨迹的方程,并作草图.



解　设以坐标轴为渐近线,已给双曲线方程为 $xy = a^2$,设点 (h,k) 在双曲线上,则 $hk = a^2$,并且在 (h,k) 处的切线方程为 $hy + kx - 2hk = 0$.切线的 x 与 y 的截距分别为 $2h$ 与 $2k$.令 (r,θ) 为从原点到切线的垂线的垂足的极坐标,则 $2h\cos\theta = r$, $2k\sin\theta = r$.因此,$r^2 = 4hk\sin\theta\cos\theta$,即

$$r^2 = 2a^2\sin 2\theta \qquad ①$$

这是所求轨迹的极坐标方程.证得每一个垂足在 ① 上.

反之,满足 ① 的每一个点(除开极点)是某个垂足.已知这样的点 $P = (r,\theta)$,它一定或者在第一或在第三象限内.

方程

$$2h\cos\theta = r,\quad 2k\sin\theta = r$$

确定一个在双曲线上的点 (h,k),并且 P 是在 (h,k) 处的切线上的垂足.

轨迹是有名的伯努利双纽线.

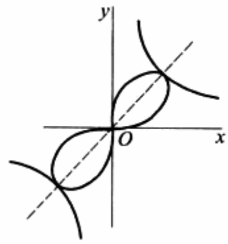


图 1

B－6　求平面 $Ax + By + Cz + 1 = 0$ 与椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

之间的最短距离(令 $h = 1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $m = \sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}$).试用代数式表示并讨论平面在椭球外面的条件.

解　如果已知平面与椭球相交,则最短距离是零.不交则最短矩离是已知平面与平行于已知平面的椭球的两个切平面中较近的一个之间的距离.椭球在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面是

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

如果这个平面平行于 $Ax+By+Cz+1=0$,则

$$\frac{x_0}{a^2}=kA,\quad \frac{y_0}{b_2}=kB,\quad \frac{z_0}{c^2}=kC$$

这里 k 是常数.因为

$$1=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=k^2(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)$$

得 $|k|=1/m$.

从原点到已知平面的距离是

$$1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=h$$

平行于已知平面的切平面是

$$k(Ax+By+Cz)=1$$

从原点到任一个平行切平面的距离为

$$\frac{1}{|k|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=hm$$

因此,如果 $m<1$,已知平面离原点比切平面远,它不与椭球相割,这时椭球到已知平面的距离是 $h(1-m)$.如果 $m\geqslant 1$,已知平面或在两切平面之间,与椭球相割;或与它们之一重合,距离皆为零.

第 2 届美国大学生数学竞赛

A－1　求从原点到曲线 $y^2 = x^3$ 上一点的弧长，已知这一点处的切线与 x 轴成 $45°$ 角.

解　在第一象限的弧用方程 $y = x^{3/2}$ 表示，它的斜率是 $(3/2)x^{1/2}$. 点 $P(x_0, y_0)$ 处切线成 $45°$ 角，有关系 $(3/2)x_0^{1/2} = 1$，得 $x_0 = 4/9$. 因此所求长度为

$$\int_0^{4/9} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{4/9} = \frac{8}{29}(2\sqrt{2} - 1)$$

A－2　在曲线 $y = x^3$ 上取一点 P，在 P 处的切线又再与曲线交于 Q. 证明：在点 Q 曲线的斜率是在点 P 的斜率的四倍.

解　设 P 的坐标为 (x_0, y_0)，在 P 处斜率为 $3x_0^2$，在 P 处的切线方程是

$$y = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3$$

切线与原来的曲线的交点有关系

$$x^3 = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3$$

即

$$(x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$$

因此第二个交点是 $(-2x_0, -8x_0^3)$. 在这个点的斜率是 $12x_0^2$，它四倍于在 P 处的斜率. 得证.

当 $x_0 = 0$，切线不与曲线再相交. 然而，在这情形中，切线不是与曲线如通常所说的交于二重点，而是交于三重点，故有理由说这切线与这曲线“再”交相交于 $(0,0)$.

A－3　求三次方程使它的根是

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

的根的立方.

解 设给出的三次方程的根是 x_1,x_2,x_3,则所求方程的根是 x_1^3,x_2^3,x_3^3. 由

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

得
$$x_1+x_2+x_3=-a,x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$$
$$x_1x_2x_3=-c$$

设所求方程为

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x-x_1^3)(x-x_2^3)(x-x_3^3)=0$$

则由
$$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-3x_1x_2x_3$$

得
$$A=-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=a^3-3ab+3c$$

又由

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+3abc-3c^2$$

得
$$B=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3=b^3-3abc+3c^2$$

最后有 $C=-x_1^3x_2^3x_3^3$. 所求三次方程为

$$x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0$$

A－4 求两条直线方程,它们每一条都与四条直线

$$x=1,y=0;\quad y=1,z=0$$
$$z=1,x=0;\quad x=y=-6z$$

全部相交.

解 设所求直线 L 与已知的四条直线分别交于点 A,B,C,D,则有某些数 a,b,c,d 使得 $A(1,0,a),B(b,1,0),C(0,c,1),D(6d,6d,-d)$. 它们共线的条件是向量

$$\overrightarrow{AB}=(b-1,1,-a)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1,c,1-a)$$
$$\overrightarrow{AD}=(6d-1,6d,-d-a)$$

成比例. 由前面两个的比得

$$c=1/(1-b)=(a-1)/a \qquad ①$$

由一、三两个的比得

$$6d=(1-6d)/(1-b)=(a+d)/a$$

① 代入得
$$6d=(1-6d)\frac{a-1}{a}=\frac{a+d}{a}$$

去分母
$$6ad=a+d,a+6d-1-6ad=a+d$$

相加得 $4d=a+1$,故

$$6a(a+1)=24ad=4(a+d)=5a+1$$

二次方程 $6a(a+1)=5a+1$ 有根 $a=1/3,-1/2$. 其他未知量对应的值为: $b=3/2,2/3$; $c=-2,3$; $d=1/3,1/8$. 各直线的方向

向量(与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 及$\overrightarrow{AD}$ 成比例)在这两种情形分别为(3,6,-2)(-2,6,3),得两直线的参数表示

$$L_1: s \to (1,0,1/3) + s(3,6,-2)$$

$$L_2: t \to (1,0,-1/2) + t(-2,6,3)$$

当 $s = 0,1/6,-1/3,1/3$;$t = 0,1/6,1/2,1/8$.它们依次交已知四直线.L_1 与 L_2 的非参数形式分别为

$$y = 2(x-1) = 1-3z \quad , \quad y = 3(1-x) = 2z+1$$

A-5 (1) 解微分方程组

$$dx/dt = x + y - z, dy/dt = -2x + 3y + 1$$

当 $t = 0$ 时,满足条件 $x = y = 0$.

(2) 一个重质点缚在一条轻的竿 AB 的一端 A 上.竿长为 a,竿的 B 端有绞链使它能在一个垂直平面上自由转动.竿在绞链上面竖直的位置处于平衡,然后轻微地扰动它.证明:竿从通过水平位置降到最低位置的时间是

$$\sqrt{a/g}\ln(1+\sqrt{2})$$

解 (1) 由线性微分方程的一般存在定理,知所给方程组有满足初始条件的唯一解,并且这个解是无穷可微的.

由第一个方程解出 y 并微分

$$y = dx/dt - x + 3 \qquad ①$$

$$dy/dt = d^2x/dt^2 - dx/dt \qquad ②$$

从原来的第二个方程中消去 y 得

$$d^2x/dt^2 - dx/dt = -2x + 3(dx/dt - x + 3) + 1 \qquad ③$$

从而

$$d^2x/dt^2 - 4dx/dt + 5x = 10 \qquad ④$$

方程有明显的特解 $x = 2$ 与通解

$$x = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2 \qquad ⑤$$

常数 A 与 B 能由初始条件 $x = 0$ 与 $dx/dt = -3$ 算出(从已知条件及原来的第一个方程).当 $t = 0$ 得 $A = -2, B = +1$,因此

$$x = e^{2t}(-2\cos t + \sin t) + 2 \qquad ⑥$$

由 ① 得

$$y = e^{2t}(-\cos t + 3\sin t) + 1 \qquad ⑦$$

容易验证方程 ⑥ 及 ⑦ 为已知方程组的解.

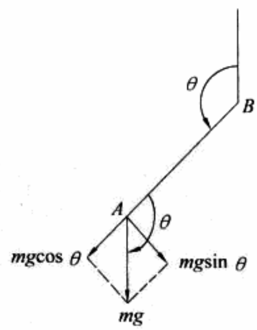


图 1

(2) 设 m 是质点的质量.在时间 t 竿与竖直线交角为 θ.如图 1 所示,重力 mg 分解为两个分量,$mg\cos\theta$ 沿竿作用,$mg\sin\theta$ 作用方向与竿垂直.前者被竿的张力(压缩力)所平衡,后者使质点沿半径 a 的圆周作加速运动.由牛顿第三定律有 $mg\sin\theta =$

$mad^2\theta/dt^2$. 两边乘以 $(2/m)d\theta/dt$ 得

$$2g\sin\theta d\theta/dt = 2a(d\theta/dt)(d^2\theta/dt^2)$$

积分后得

$$-2g\cos\theta + k = a(d\theta/dt)^2 \quad ⑧$$

由初始条件,当 $t=0$ 时 $\theta = d\theta/dt = 0$,得 $k=2g$. 故有

$$a(d\theta/dt)^2 = 2g(1-\cos\theta) = 4g\sin^2(\theta/2) \quad ⑨$$

得

$$d\theta/dt = 2\sqrt{g/a}\sin(\theta/2)$$

当 $0<\theta\leqslant\pi$, $d\theta/dt$ 是正的. 所以选择正的平方根.

从 $\theta=\pi/2$ 到 $\theta=\pi$ 经过的时间为

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dt}{d\theta}d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\csc(\theta/2)d\theta =$$

$$\sqrt{\frac{a}{g}}[-\ln(\csc(\theta/2)+\cot(\theta/2))]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

A-6 (1) 半径为 a 的圆在内半径为 $3a$ 的一个圆环的内侧滚动. 求在动圆圆周上一点生成的闭曲线所包含的面积.

(2) 炮弹击中距地面高度为 h 的正在飞行的飞机. 已知炮弹在地面上发射时,有初速度 V. 大炮位置及其仰角都是未知的. 试推断大炮位于一圆内,其圆心在飞机的正下方,半径是

$$(V/g)\sqrt{V^2-2gh}(\text{忽略大气阻力})$$

解 (1) 取直角坐标,原点在大圆的中心,点 P 生成的曲线与大圆接触于 $A=(3a,0)$. 从图1上看到,当小圆滚动,直到中心联线与 OA 成角 θ 时,点 P 的坐标是

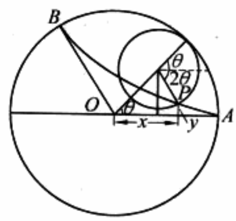


图 1

$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$$
$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

这就是 P 的轨迹的参数方程,则面积为

$$A = \frac{1}{2}\oint(xdy - ydx) =$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}((2\cos\theta+\cos 2\theta)(2\cos\theta - 2\cos 2\theta) -$$

$$(2\sin\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta - 2\sin 2\theta))d\theta =$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-2\cos 3\theta)d\theta = 2\pi a^2$$

(2) 选择直角坐标系使 y 轴垂直于地面,大炮位于原点. 飞机坐标为 (u,h), $u\geqslant 0$. 当大炮在 $t=0$ 时发射,炮弹初速度为 V,仰角为 α. 炮弹在 t 时的位置是

$$x = Vt\cos\alpha, y = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

因为炮弹击中飞机，对某个 t 与 α 有

$$u = Vt\cos\alpha, h = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

因此

$$u^2 + (h + (1/2)gt^2)^2 = V^2t^2 \quad ①$$

所以

$$\frac{1}{4}g^2t^4 + (gh - V^2)t^2 + h^2 + u^2 = 0 \quad ②$$

为了 ② 有实根 t，一定有

$$(gh - V^2)^2 \geqslant g^2(h^2 + u^2)$$

因此

$$g^2u^2 \leqslant V^2(V^2 - 2gh)$$

必有 $V^2 \geqslant 2gh$ 与

$$u \leqslant \frac{V}{g}\sqrt{V^2 - 2gh} \quad ③$$

这就证明了，当飞机被击中时大炮与飞机水平距离不超过 $(V/g)\sqrt{V^2 - 2gh}$.

A－7 （1）求与曲线族

$$(y - k^2)^2 = x^2(k^2 - x^2)$$

的所有曲线切触的曲线. 作这条曲线及族中两条曲线的草图.

（2）如果函数 $1/((1 - ax)(1 - bx))$ 展开为 x 的幂级数 $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$.

证明：函数

$$(1 + abx)/((1 - abx)(1 - a^2x)(1 - b^2x))$$

可展开为 x 的幂级数 $c_0^2 + c_1^2x + c_2^2x^2 + c_3^2x^3 + \cdots$.

解 （1）利用 $y = x^2(k^2 - x^2)$ 与 $y^2 = x^2(k^2 - x^2)$ 的图形的辅助，作出曲线族的草图（图 1）.

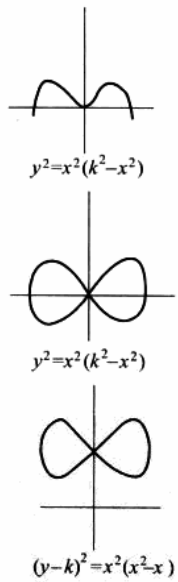


图 1

当 $x^2 = k^2 - x^2$，即当 $x = \pm k\sqrt{2}$ 时

$$f(x, y, k) = (y - k^2)^2 - x^2(k^2 - x^2) = 0$$

函数有极大值，因此曲线的图在 $(\pm k/\sqrt{2}, k^2/2)$ 有下水平切线. 在 $(\pm k\sqrt{2}, 3k^2/2)$ 有上水平切线. 因为 f 依赖于 k^2，仅需考虑 $k \geqslant 0$. 当 $k = 0$，曲线退化到一点，所以假定 k 是正的. 显然曲线包含在带形 $-k \leqslant x \leqslant k$ 内. 在 $(\pm k, k^2)$ 有垂直的切线，这是因为这里的 $\partial f/\partial y$ 为零而 $\partial f/\partial x$ 不为零. 在 $(0, k^2)$，$\partial f/\partial x$ 与 $\partial f/\partial y$ 都为零. 故曲线在此有重点，并且在这个点的曲线类似一对直线. 因为略去高次项后得

$$(y-k^2)^2-k^2x^2=0$$

它的图形是两条直线 $y-k^2=\pm kx$ 合成的.

为了求包络方程,从两个方程

$$f=(y-k^2)^2-x^2(k^2-x^2)=0$$

与
$$\frac{\partial f}{\partial k}=-4k(y-k^2)-2kx^2=0$$

消去 k.由第二个方程解出 k,得 $k=0$ 或 $k^2=y+(1/2)x^2$.用前者代入原方程有 $y^2=-x^4$,即原点.用后者代入原方程有 $x^2(3x^2-4y)=0$,它是直线 $x=0$ 与抛物线 $4y=3x^2$ 的合成.

虽 y 轴与每条曲线交于一个二重点,但不与任何曲线相切,所以它不是包络的一部分.如图 2 所示,抛物线 $4y=3x^2$ 与曲线 $f(x,y,k)=0$ 在点 $(\pm(2/\sqrt{5})k,(3/5)k^2)$ 处相切.设将对应于 $k=0$ 的一点"曲线"作为相切看待,则此抛物线即为包络;或者说除去原点的抛物线是包络.

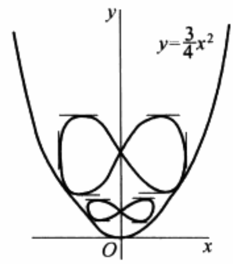


图 2

(2) 首先求系数 $\{c_i\}$ 的显式.利用部分分式,并假设 $a\neq b$,有

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{-a}{1-ax}+\frac{b}{1-bx}\right)=$$
$$\frac{1}{b-a}\left(-a\sum_0^\infty a^nx^n+b\sum_0^\infty b^nx^n\right)$$

因此
$$c_n=(b^{n+1}-a^{n+1})/(b-a)$$

则有

$$\sum_{n=0}^\infty c_n^2x^n=\frac{1}{(b-a)^2}\left(a^2\sum_{n=0}^\infty a^{2n}x^n-2ab\sum_{n=0}^\infty a^nb^nx^n+b^2\sum_{n=0}^\infty b^{2n}x^n\right)=$$
$$\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x}-\frac{2ab}{1-abx}+\frac{b^2}{1-b^2x}\right)=$$
$$\frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}$$

特别当 $a=b$,则

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{1}{(1-ax)^2}=\sum_{n=0}^\infty(n+1)a^nx^n$$

这时 $c_n=(n+1)a^n$,对此有

$$\sum_{n=0}^\infty {c_n}^2x^n=\sum_{n=0}^\infty(n^2+2n+1)a^{2n}x^n=$$
$$\sum_{n=0}^\infty(n+1)(n+2)a^{2n}x^n-\sum_{n=0}^\infty(n+1)a^{2n}x^n=$$
$$\frac{2}{(1-a^2x)^3}-\frac{1}{(1-a^2x)^2}=\frac{1+a^2x}{(1-a^2x)^3}$$

这是当 $a=b$ 时所求的结果.

B－1　从悬链线 $y = c\cos h(x/c)$ 的顶点$(0,c)$作悬链线在点 P 的切线的垂线 L.证明:L 被两坐标轴所截的长度等于点 P 的纵坐标 y.

解　已知悬链线在点$(x_1, c\cos\ h(x_1/c))$处的斜率是 $\sin\ h(x_1/c)$.因此直线 L 的方程为

$$y - c = \frac{-x}{\sin\ h(x_1/c)}$$

并且这条直线交 x 轴于$(c\sin(x_1/c),0)$.因此两坐标轴之间 L 线段的长度是$\sqrt{c^2\sin\ h^2(x_1/c) + c^2} = c\cos\ h(x_1/c)$.它正是点 P 的纵坐标.

B－2　求定积分.

$$(1)\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \qquad (2)\int_1^\infty \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}}$$

解　(1) 因为

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{1+\varepsilon}^{3-\delta} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{1+\varepsilon}^{3-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\arcsin(x-2)\Big|_{1+q}^{3-\delta} =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}(\arcsin(1-\delta) - \arcsin(\varepsilon - 1)) =$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(2) 这是无限区间的积分,令 $y = x - 1$,则

$$\int \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \frac{1}{e^2}\int \frac{dx}{e^{x-1} + e^{1-x}} = \frac{1}{e^2}\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} =$$

$$\int \frac{e^y dy}{e^{2y} + 1} = \frac{1}{e^2}\arctan e^y + c$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} =$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^2}(\arctan e^{N-1} - \arctan e^0) =$$

$$\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e^2}$$

B－3 已知幂级数 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 中的 $a_n=(n^2+1)3^n$.证明:存在关系式

$$a_n+pa_{n+1}+qa_{n+2}+ra_{n+3}=0$$

这里 p,q,r 是与 n 无关的常数.求这些常数及幂级数的和.

解 所求关系是

$$(n^2+1)3^n+p((n+1)^2+1)3^{n+1}+q((n+2)^2+1)3^{n+2}+r((n+3)^2+1)3^{n+3}=0$$

等价于

$$n^2(1+3p+9q+27r)+n(6p+36q+162r)+(1+6p+45q+207r)=0 \quad ①$$

方程 ① 对所有的 n 成立,当且仅当

$$1+3p+9q+27r=0$$
$$p+6q+27r=0$$
$$1+6p+45q+270r=0$$

这些线性方程有解 $p=-1,q=1/3,r=1/27$.所以

$$a_n-a_{n+1}+(1/3)a_{n+2}-(1/27)a_{n+3}=0$$

令 $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$,那么

$$x^3S(x)=a_0x^3+a_1x^4+\cdots+a_{n-3}x^n+\cdots$$
$$px^2S(x)=pa_0x^2+pa_1x^3+pa_2x^4+\cdots+pa_{n-1}x^n+\cdots$$
$$qxS(x)=qa_0x+qa_1x^2+qa_2x^3+qa_3x^4+\cdots+qa_{n-1}x^n+\cdots$$
$$rS(x)=ra_0+ra_1x+ra_2x^2+ra_3x^3+ra_4x^4+\cdots+ra_nx^n+\cdots$$

由它们的和,得

$$S(x)(x^3+px^2+qx+r)=(pa_0+qa_1+ra_2)x^2+(qa_0+ra_1)x+ra_0$$

乘以 -27 得

$$S(x)(1-9x+27x^2-27x^3)=1-3x+18x^2$$

所以
$$S(x)=\frac{1-3x+18x^2}{(1-3x)^3}$$

由比值判别法知,级数在 $|x|<1/3$ 收敛.因此满足此式的 x 的值使上面推导有效.

B－4 求抛物线方程,它切 x 轴于点(1,0),切 y 轴于点(0,2).求抛物线的轴与它的顶点的坐标.

解 显然所求抛物线不通过原点.不通过原点的任何一条圆

锥曲线有方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = 0$$

为了它在(0,1)与 x 轴相切，置 $y = 0$ 且使方程有 $x = 1$ 的重根，得 $A = 1, D = 2$. 又因为它切 y 轴于(0,2)，得 $C = 1/4, D = -1$. 又因它是抛物线，故 $B^2 = 4AC$，因而得出两方程

$$x^2 + xy + (1/4)y^2 - 2x - y + 1 = 0 \quad ①$$

$$x^2 - xy + (1/4)y^2 - 2x - y + 1 = 0 \quad ②$$

因为①能写为 $(x + (1/2)y - 1)^2 = 0$. 它是一条退化的圆锥曲线：通过已知两点的重合直线. 所以②为所求.

②乘以 4 消去分母得

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0 \quad ③$$

因为③的二次项可以写成 $(2x - y)^2$. 经过正交变换(但不保持标度)

$$u = 2x - y, \quad v = x + 2y$$

逆变换为 $\quad x = (1/5)(2u + v), \quad y = (1/5)(-u + 2v)$

③化为

$$u^2 - (12/5)u - (16/5)v + 4 = 0 \quad ④$$

得标准形 $\quad (u - 6/5)^2 - (16/5)(v - 4/5) = 0$

这是以直线 $u = 6/5$ 为轴的抛物线，顶点的 uv 坐标(6/5,4/5). 对于原坐标系此轴的方程为 $2x - y = 6/5$，顶点坐标(16/25,2/25).

B-5 (1) 证明：

$$\int_1^a [x]f'(x)\mathrm{d}x = [a]f(a) - (f(1) + \cdots + f([a]))$$

这里 a 大于 1，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 并求出

$$\int_1^a [x^2]f'(x)\mathrm{d}x$$

与上式相当的表达式.

(2) 一个质点在直线上运动，仅有与速度成反比的力作用于其上. 如果初速为每秒 1 000 尺，当它经过 1 200 尺后，速度为每秒 900 尺. 试计算运行这段距离的时间，误差不超过百分之一秒.

解 (1) 第一部分有

$$\int_1^a [x]f'(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 1 \cdot f'(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 2 \cdot f'(x)\mathrm{d}x + \cdots +$$
$$\int_{[a]}^a [a]f'(x)\mathrm{d}x =$$
$$f(2) - f(1) + 2[f(3) - f(2)] + \cdots +$$
$$[a][f(a) - f[a]] =$$

$$[a]f(a)-(f(1)+f(2)+\cdots+f([a]))$$

第二部分有

$$\int_1^a[x^2]f'(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}1\cdot f'(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2\cdot f'(x)\mathrm{d}x+\cdots+$$
$$\int_{\sqrt{[a^2]}}^a[a^2]f'(x)\mathrm{d}x=$$
$$(f(\sqrt{2})-f(1))+2(f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2}))+\cdots+$$
$$[a^2](f(a)-f(\sqrt{[a^2]}))=$$
$$[a^2]f(a)-(f(1)+f(\sqrt{2})+\cdots+f(\sqrt{[a^2]}))$$

(2) 运动的微分方程是 $m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=-k\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. 边界条件是 $x=0,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=1\ 000$, 当 $t=0$; $x=1\ 200,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=900$, 当 $t=T$. T 是所求时间.

令 $b=k/m$, 则 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=(-b)\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, 即

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-bx+c \tag{①}$$

由边界条件得 $1\ 000=c,900=-1\ 200b+c$, 即 $b=1/12$. 由这些值与①, 得

$$T=\int_0^{1\ 200}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\int_0^{1\ 200}\frac{\mathrm{d}x}{1\ 000-(x/12)}=12\ln\frac{10}{9}$$

即
$$T=-12\ln(9/10)$$

利用 $\ln(1-x)$ 的级数展开

$$-\ln(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

取 $x=1/10$, 有

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{3\ 000}<-\ln\frac{9}{10}<\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{1}{10}\right|^n$$

下界为 $0.1+0.005+0.000\ 3=0.105\ 3$, 上界为 $0.1+0.005+1/2\ 700<0.105\ 4$. 故 $1.263\ 6<-12\ln(9/10)<1.264\ 8$. $T\approx1.26$ 秒, 误差不差过百分之一秒.

B-6 (1) 设 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义, 并且连续, 可微. 证明: 在 $a<x<b$ 上有

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

这里 ξ 是 a 与 b 之间的某数.

(2) 两条均匀的竿子, 每条的质量为 m, 长度为 $2a$, 相互平行, 相距为 b, 并且其中心联线与它们垂直. 试计算相互吸引力, 并考虑 a 为零的情形.

解 (1) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 并且在 $[a,b]$ 上每一点有二阶

导数.对于 $a < x < b$ 的一个固定的 x,置

$$g(t)=\begin{vmatrix} f(t) & t^2 & t & 1\\ f(x) & x^2 & x & 1\\ f(a) & a^2 & a & 1\\ f(b) & b^2 & b & 1\end{vmatrix} \qquad ①$$

则
$$g(a)=g(x)=g(b)=0$$

由中值定理有数 α 与 β,使得 $a<\alpha<x<\beta<b$,$g'(\alpha)=g'(\beta)=0$.再有一次中值定理,有 ξ 使得 $\alpha<\xi<\beta$,$g''(\xi)=0$.结合 ① 再按第一行展开得所求

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{(f(x)-f(a))/(x-a)-(f(a)-f(b))/(a-b)}{x-b}$$

(2) 首先求质点 P 与一条均匀的竿子之间的吸引力.设质点 P 的质量 μ,位于点 (h,b),均匀竿子质量 m.沿 x 轴置于 $(0,0)$ 到 $(0,2a)$ 处.

考察竿子上一短线段 S,它的中心为 $Q(x,0)$,长度为 Δx.令 α,β,θ 是如图 1 所标记的角度.S 的质量为 $m\Delta x/2a$.如果 S 的质量集中于 Q,S 与 P 之间的吸引力是

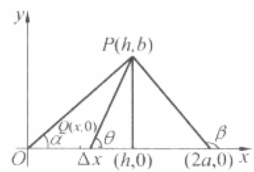


图 1

$$G\mu\cdot\frac{m}{2a}\Delta x\,\frac{1}{b^2\operatorname{cosec}^2\theta}$$

它的垂直分量是

$$G\mu\cdot\frac{m}{2a}\Delta x\,\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}\sin\theta$$

这里 G 是引力常数.因此 P 与竿子之间总吸引力的垂直分量为

$$f_y=\frac{G\mu m}{2ab^2}\int_0^{2a}\sin^3\theta\,\mathrm{d}x$$

现在 x 与 θ 有关系 $x+b\cos\theta=h$.如果将积分变量换为 θ,有

$$f_y=\frac{G\mu m}{2ab}\int_\alpha^\beta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{G\mu m}{2ab}(\cos\alpha-\cos\beta)=$$
$$\frac{G\mu m}{2ab}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}-\frac{h-2a}{\sqrt{(h-2a)^2+b^2}}\right)$$

现在考察两平行的竿子.第二条放在从 $(0,b)$ 到 $(2a,b)$ 处.

可将上面这条竿子长度为 Δh 的短线作为一个有质量 $m\Delta h/2a$ 的质点.如前法,两竿之间的引力的垂直分量为

$$F_y=\frac{Gm^2}{4a^2b}\int_0^{2a}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}-\frac{h-2a}{\sqrt{(h-2a)^2+b^2}}\right)\mathrm{d}h=$$
$$\frac{Gm^2}{4a^2b}\left[\sqrt{h^2+b^2}-\sqrt{(h-2a)^2+b^2}\right]_0^{2a}=$$
$$\frac{Gm^2}{2a^2b}(\sqrt{4a^2+b^2}-b)$$

显然由对称性,全部的力沿着中心联线作用,于是这个力即

垂直分力.

B－7 (1)设

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$v = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

证明 $$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$$

(2)设中心锥

$$(ax^2 + by^2) + 2(px + qy) + c = 0$$

$$(ax^2 + by^2) + 2\lambda(px + qy) + \lambda^2 c = 0$$

λ 是已知正的常数.证明:如果从原点到第一个锥的所有射线段按 λ 比 1 改变,新的射线段的端点生成第二个锥.

设点 P 坐标为

$$x = \frac{p}{a} \cdot \frac{2\lambda}{1+\lambda}, y = -\frac{q}{b} \cdot \frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

证明:如果从 P 到第一个锥的所有射线段按 λ 比 1 呈反向改变,新的射线段的端点生成第二个锥.注意 $\lambda = 1$ 的情形.

解 (1)令 $\lambda = \exp(2\pi i/3)$ 是单位立方根,则 $1 + \lambda + \lambda^2 = 0$. 故

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + w^3 + 3uvw &= (u + v + w)(u + \lambda v + \lambda^2 w) \cdot \\ &\quad (u + \lambda^2 v + \lambda w) = \\ &\quad (\exp x)(\exp \lambda x)(\exp \lambda^2 x) = \\ &\quad \exp 0 = 1 \end{aligned}$$

(2)设两个锥 C 与 D 分别为

$$C: (ax^2 + by^2) + 2(px + qy) + c = 0$$

$$D: (ax^2 + by^2) + 2\lambda(px + qy) + \lambda^2 c = 0$$

假设点 (x_0, y_0) 在 C 上,并且它变换到 (x_1, y_1),这里 $(x_1, y_1) = (\lambda x_0, \lambda y_0)$.则在方程 D 中用 (x_1, y_1) 代入,得

$$\begin{aligned} &ax_1^2 + by_1^2 + 2\lambda(px_1 + qy_1) + \lambda^2 c = \\ &\lambda^2(ax_0^2 + by_0^2 + 2(px_0 + qy_0) + c) = 0 \end{aligned}$$

因为 (x_0, y_0) 是在 C 上,所以 (x_1, y_1) 在 D 上,反之亦然(这时需要除以 λ^2,用上面假设 $\lambda \neq 0$).

在第二个变换下,点 (x_0, y_0) 变成点 (x_2, y_2)

$$x_2 = -\lambda\left(x_0 + \frac{p}{a}\cdot\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right) - \frac{p}{a}\cdot\frac{2\lambda}{1+\lambda} = -\lambda\left(x_0 + \frac{2p}{a}\right)$$

$$y_2 = -\lambda\left(y_0 + \frac{q}{b}\cdot\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right) - \frac{q}{b}\cdot\frac{2\lambda}{1+\lambda} = -\lambda\left(y_0 + \frac{2q}{b}\right)$$

则当(x_0,y_0)在 C 上,有

$$ax_2^2 + by_2^2 + 2\lambda(px_2 + qy_2) + \lambda^2 c =$$
$$\lambda^2\left(ax_0^2 + 4px_0 + \frac{4p^2}{a} + by_0^2 + 4qy_0 + \frac{4q^2}{b} - 2\left(px_0 + \frac{2p^2}{a} + qy_0 + \frac{2q^2}{b}\right) + c\right) =$$
$$\lambda^2(ax_0^2 + by_0^2 + 2(px_0 + qy_0) + c) = 0$$

因此(x_2,y_2)在 D 上.如前同样证明(x_2,y_2)在 D 上,则(x_0,y_0)在 C 上.

如果 $\lambda = 1$,两个锥相同.这个锥对于$(-p/a, -q/b)$呈中心对称,方程为

$$a\left(x + \frac{p}{a}\right)^2 + b\left(y + \frac{q}{b}\right)^2 + c' = 0$$

在这种情形,第一个变换是恒等变换而第二个变换是关于锥的中心变换.

第3届美国大学生数学竞赛

A－1 证明:如果 $f(x)$ 是具有整系数的多项式,并且存在一个整数 k,使得整数 $f(1),f(2),\cdots,f(k)$ 均不被 k 除尽,则 $f(x)$ 没有整根.

解 假设 f 有一个整数根 r,则 $f(x)=(x-r)g(x)$.这里 $g(x)$ 也是整系数多项式.存在整数 p 与 q 使得 $r=p+kq,1\leqslant p\leqslant k$.而

$$f(p)=(p-r)g(p)=-kqg(p)$$

因此 $f(p)$ 被 k 除尽,与假设矛盾.命题得证.

A－2 设 A 与 B 是在连续且有连续导数的曲线 $y=f(x)$ 上的两个固定点.设弧 AB 对于弦 AB 是凹的.如果 P 是弧 AB 上的一个点,使得 $AP+PB$ 最大.求证:PA 与 PB 与曲线 $y=f(x)$ 在点 P 的切线有相同的交角.

解 本题是下面引理的推论.

引理 假设 S 是平面 π 的子集,A 与 B 是 π 上的两点,P 是 S 的一个点,使得 $AP+PB\geqslant AX+XB$,对所有在 S 上的 X 成立,则通过 P 垂直于 $\angle APB$ 的角平分线的直线 t 是 s 的支撑线(即 s 是包含在以 t 为边的闭半平面内).并且如果 P 不在线段 AB 上,则 P 是 $S\cap t$ 上的唯一点.

引理的证明 假设 P 不在线段 AB 上,则 A 与 B 是在直线 t 的同一边.令 B' 是 B 对 t 的反射点,则 A,P,B' 共线.

令 Q 是在包含 B' 的开半平面内的任一点,则 $QB>QB'$,并且有

$$AQ+QB>AQ+QB'\geqslant AB'=AP+PB'=AP+PB$$

于是 $Q\notin S$,如果 Q 是 t 上除 P 外的另一点,有

$$AQ+QB=AQ+QB'>AB'=AP+PB$$

也有 $Q\notin S$,所以除开点 P 本身外,S 在另一个开半平面内.

如果 P 是在线段 AB 上,显然 S 在 AB 上,并且因此同时在以 t

为边的两个闭的半平面内.

应用这个结果于本问题.知道 PA 与 PB 与可微曲线 $y = f(x)$ 的弧 AB 的支撑线有相同的交角.但是,当可微的弧除在一端外有在点 P(P 不是 A 也不是 B)的支撑线.则这条线就是在点 P 的切线(图 1).详细说来,如果支撑线方程为 $y = mx + b$(不能是竖直线),且 $P = (x_0, y_0)$,则可微方程

$$g(x) = f(x) - mx - b$$

在 x_0 处或者有最大值或者有最小值,所以 $g'(x_0) = 0$. 因此 $f'(x_0) = m$,即曲线的切线是 $y = mx + b$.

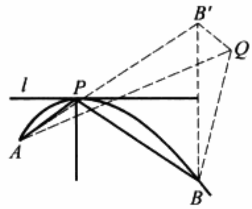


图 1

A - 3　求 $f(x)$,当适当选择积分常数时,使得

$$\int (f(x))^n \mathrm{d}x = \left|\int f(x)\mathrm{d}x\right|^n$$

解　假设实连续函数 f 定义在所考虑的区间上.置 $g(x) = \int f(x)^n \mathrm{d}x$ 与 $h(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.问题是求定义在区间上 C^1 类函数所有的配对 g 与 h,使得

$$g(x) = h(x)^n \qquad ①$$

$$g'(x) = h'(x)^n \qquad ②$$

如果 $n = 1$,显然任何连续函数与对应函数 g 与 h 都是问题的解.现在设 $n \neq 1$,由 ①,微分之,得

$$g'(x) = nh(x)^{n-1}h'(x) \qquad ③$$

由此得

$$h'(x)^n = nh(x)^{n-1}h'(x) \qquad ④$$

$$h'(x)^{n-1} = nh(x)^{n-1} \qquad ⑤$$

$$h'(x) = Ah(x) \qquad ⑥$$

其中 $A = n^{1/(n-1)}$.因此对某个常数 C 有

$$h(x) = c\mathrm{e}^{Ax} \qquad ⑦$$

最后得

$$f(x) = h'(x) = cA\mathrm{e}^{Ax} \qquad ⑧$$

现在回过头来检查上面的论述.因为从 ④ 到 ⑤ 要 $h'(x) \neq 0$.暂时限制在开集 I 上,h 与 h' 都不为零.关于指数的意义还得讨论几种情形:

(1) 假设 n 不能表示为两个整数的商 $n = p/q$,这里 q 是奇数,即 n 或者是无理数或者是有偶数分母的有理数.在这种情形下,如果 $b < 0$, b^n 没有意义.因此 h 与 h' 一定是正的,并且当 $n < 0$ 时 ④ 显然不可能,所以一定有 $n > 0$.其解必附有积分常数 c 一定是正的这个条件.

(2) $n = p/q$,这里 p 与 q 是整数,q 是奇数,则 $b^n = (\sqrt[q]{b})^p$

对于正的与负的 b 均有定义.由①,②得出方程③,④与⑤.为了得出⑥,再分情形讨论:

i p 是奇数.则 $n-1=(p-q)/q$ 有偶数的分子,所以 $h(x)^{n-1}$ 与 $h'(x)^{n-1}$ 是正的.并且由⑤得 $n>0$.因为我们已排除 $n-1=0$ 的可能性,即可推得⑥,除开可由代换

$$h'(x)=-Ah(x) \qquad ⑥'$$

而导出

$$h(x)=ce^{-Ax} \qquad ⑦'$$

$$f(x)=-cAe^{-Ax} \qquad ⑧'$$

在⑦与⑦′中 c 可以是负的,仅需 $c\neq 0$.

ii p 是偶数.则 $h(x)^{n-1}$ 与 $h'(x)^{n-1}$ 分别与 $h(x)$ 及 $h'(x)$ 同符号,所以 n 可以或者都是正的或者都是负的(在题中对 h 与 h' 的假设下它不能是零),则公式的解正确,$n^{1/(n-1)}$ 有定义,常数 e 可以为正或为负.

现在检查对于 h 与 h' 的假设.如果定义在区间 J 上的一个解 h,使得或者 h 或者 h' 在 J 的某点上为零,但不在整个 J 上如此.则将在 J 的开子区间 I,h 与 h' 均不为零,但在 I 的一个端点处或者 h 或者 h' 为零.在 I 上 h 和 h' 已证明为指数函数(一直假定 $n\neq 1$),并且这个函数在 I 的端点不以零为极限.因此不能有这样的解,并且不包含在上面的那些解中的唯有在区间恒等于零的解.显然当 $n>0$ 时这些函数是解.

注意到当 $n=0$,因为在①和②中,$g(x)=1$,$g'(x)=1$,永远不会有解.

总之,所求全部的解如下:当 $n=1$,任何连续函数 f 是解.当 $n>0$,$n\neq 1$,由⑧得的解以 $c\geqslant 0$.并且,当 $n=p/q$,q 是奇数,常数 c 可以取负值.而当 p 也是奇数,可得以 c 为任何数的附加解⑧′.当 $n=0$ 没有解;当 $n<0$,除非 $n=p/q$,p 是偶数而 q 是奇数,在此情形下,⑧为对 $c\neq 0$ 的一解,否则无解.

A-4 抛物线 $y^2=-4px$ 沿着抛物线 $y^2=4px$ 作不带滑动的滚动.求滚动着的抛物线顶点的轨迹方程.

解 如果滚动的抛物线与固定的抛物线相切于 Q,显然由于对称性滚动的抛物线的顶点 V 是关于在点 Q 的切线的原点的(固定抛物线的顶点)反射.

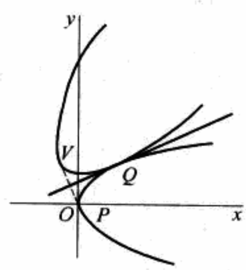


图 1

在图 1 内,默认 $p>0$.假设 Q 是点$(4pt^2,4pt)$(在固定抛物线上的任何一点对于某个 t 有这样的形式).在点 Q 的切线的斜率是 $1/(2t)$ 并且切线方程是

$$y = (1/2t)x + 2pt$$

通过原点在这条直线上的垂线,有方程

$$y = 2tx$$

两线交于$\left(\frac{-4pt^2}{1+4t^2},\frac{8pt^3}{1+4t^2}\right)$,所以顶点 V 在

$$\left(\frac{-8pt^2}{1+4t^2},\frac{16pt^3}{1+4t^2}\right)$$

得点 V 轨迹的参数方程为

$$x = \frac{-8pt^2}{1+4t^2}, y = \frac{16pt^3}{1+4t^2}$$

因为 $-2t = y/x$(当 $x \neq 0$),消去 t 得

$$x = \frac{-2p(y/x)^2}{1+(y/x)^2}$$

即

$$(x^2 + y^2)x + 2py^2 = 0 \qquad ①$$

它是满足轨迹的所有的点(包括(0,0))的方程.

反之,满足 ① 的任何其他的一点(x,y)除原点外导出的值 $t(=y/2x)$ 是在轨迹上,所以 ① 为所求的轨迹.

A-5 证明:有四条直线上与六个椭圆上的点满足联立方程

$$x^4 - x^2 = y^4 - y^2 = z^4 - z^2$$

且没有另外的点满足它.

解 令 L 表示已给方程的轨迹.一个点在 L 上当且仅当它的坐标(x,y,z)满足

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0 \qquad ①$$

$$(y^2 + z^2 - 1)(y^2 - z^2) = 0 \qquad ②$$

$$(z^2 + x^2 - 1)(z^2 - x^2) = 0 \qquad ③$$

轨迹 A,B,C,D 定义如下

$$A:\begin{cases}x^2+y^2-1=0\\ y^2-z^2=0\end{cases} \quad B:\begin{cases}y^2-z^2-1=0\\ z^2-x^2=0\end{cases}$$

$$C:\begin{cases}z^2+x^2-1=0\\ x^2-y^2=0\end{cases} \quad D: x^2 = y^2 = z^2$$

A 是一个直圆柱与两个平面 $z = y$ 与 $z = -y$ 的并的交,因此 A 是两个椭圆的并.同样 B 与 C 也各是两椭圆的并.此外 D 是四条直线的并,即

$$x = y = z, x = y = -z, x = -y = z, x = -y = -z$$

事实上,A 与 D 的任何公共点也在 D 上,故 A 与 B 是不同的椭圆.对于 B 与 C 以及对于 C 与 A 有相似的结论.因此,$A \cup B \cup C \cup$

D 构成6个(不同的)椭圆,四条不同直线的并.

现在证明 $L = A \cup B \cup C \cup D$.如果 $(x,y,z) \in A$,则显然 (x,y,z) 满足①,②与③,后者是由于

$$z^2 + x^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 1) + (z^2 - y^2) = 0$$

所以 $A \subseteq L$.同理 $B \subseteq L, C \subseteq L$.立即得 $D \subseteq L$,故 $A \cup B \cup C \cup D \subseteq L$.

现在考虑不在 D 上的 L 的点 (x,y,z),所以假设 $x^2 \neq y^2$, $x^2 \neq z^2$.因为 p 满足①与③有

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, x^2 + z^2 - 1 = 0$$

故 $y^2 = z^2$,于是 $p \in A$.对其他不等式的情形,用同样的论证导出 $p \in B$ 或 $p \in C$,因此 $L \subseteq A \cup B \cup C \cup D$,所以 $L = A \cup B \cup C \cup D$ 是四条直线与六个椭圆的并.

A－6 $f(x)$ 是 n 次多项式,使得 $f(x)$ 的一个幂次能被它的导数 $f'(x)$ 的一个幂次所除尽,即 $(f(x))^p$ 被 $(f'(x))^q$ 除尽,p,q 是正整数.求证:$f(x)$ 被 $f'(x)$ 除尽并且 $f(x)$ 有一个 n 重的单根.

解 令 f 的因式分解为

$$f = ap_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$$

这里 a 是纯量,$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的不可约首1多项式,并且 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 是正整数.利用对于乘积的微分规则

$$f' = a\sum_{i=1}^{k} e_i p_1^{e_1}\cdots p_{i-1}^{e_{i-1}} p_i^{e_i-1} p_{i+1}^{e_{i+1}}\cdots p_k^{e_k}\cdot p'_i$$

因为 $p_j^{e_j-1}$ 除尽和的每一项而 $p_j^{e_j}$ 除尽除一项外的所有的项,显然

$$f' = p_1^{e_1-1}p_2^{e_2-1}\cdots p_k^{e_k-1}\cdot g \qquad ①$$

这里 g 是不被任何 p_i 除尽的多项式.因为 f 的某次幂能被 f' 的某次幂除尽,g 的任何不可约因子除尽 f 的某次幂.由多项式的因式分解唯一性定理这是不可能的,所以 g 没有不可约因子,故

$$g \text{ 的次数为 } 0 \qquad ②$$

现在 f 的次数 $n = \sum_{i-1}^{k} e_i d_i$,这里 d_i 是 p_i 的次数.由①与②,f' 的次数是 $n - 1 = \sum_{i-1}^{k}(e_i - 1)d_i$,相减得 $1 = \sum_{i=1}^{k} d_i$.因为那些 d 是整数,所以 $k = 1, d_1 = 1$,因此

$$f = \alpha p_1^{e_1} = \alpha p_1^n$$

其中,p_1 是线性多项式.因此 f 有 n 重根,并且确能被 $f' = n\alpha p^{n-1}$

除尽.

A－7　如果 $u_1^2+u_2^2+\cdots$ 与 $v_1^2+v_2^2+\cdots$ 是收敛的实常数级数.证明：$(u_1-v_1)^p+(u_2-v_2)^p+\cdots$ 是收敛的，p 是大于等于 2 的整数.

解　令

$$A=u_1^2+u_2^2+\cdots,B=v_1^2+v_2^2+\cdots$$

因为 $$(u_i+v_i)^2+(u_i-v_i)^2=2u_i^2+2v_i^2$$

对于任何整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}u_i^2+2\sum_{i=1}^{n}v_i^2\leqslant 2A+2B$$

因为所有的项非负，因此 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i-v_i)^2$ 是收敛的.因此这些项以零为极限，即有一整数 k 使得对所有的 $i\geqslant k$，$(u_i-v_i)^2<1$.如果 p 是一个整数，并且 $p\geqslant 2$，则 $|u_i-v_i|^p\leqslant(u_i-v_i)^2$，对所有的整数 $i\geqslant k$ 成立.故级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i-v_i)^p$ 绝对收敛，所以收敛.

A－8　有一个以直线

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

为边界的三角形.证明：它的面积(不计较符号)是

$$\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix}^2\Bigg/\left(2\begin{vmatrix}A_2&B_2\\A_3&B_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_3&B_3\\A_1&B_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}\right)$$

解　令 L_i 是方程 $A_ix+B_iy+C_i=0$ 的直线，(x_i,y_i) 是三角形的与 L_i 相对的顶点.设

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\1&1&1\end{bmatrix}$$

则三角形面积是 $(1/2)|\det\boldsymbol{X}|$.

因为点 (x_i,y_i) 在边 L_j 上而 $i\neq j$，得

$$\boldsymbol{MX}=\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\qquad ①$$

这里对角线上的元是待定的.

如果我们用克莱姆法解方程组

$$M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则得
$$z\det M = d_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

由 ① 知解为
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此
$$d_1 = \det M\Big/\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

同理
$$d_2 = \det M\Big/\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, d_3 = \det M\Big/\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

所以由 ① 有

$$(\det M)(\det X) = \frac{(\det M)^3}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

现在 $\det M \neq 0$,由已知直线构成的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\mid \det X \mid = \pm\frac{(\det M)^2}{2\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

B－1 有一颗子弹用初速 v_0 与水平线成角 α 射出.除重力外没有其他的力作用于其上.求始点起直到它落在水平面上所经路径之长.并证明当 $\sin\alpha\ln(\sec\alpha+\tan\alpha)=1$ 时,弹道最长.

解 运动的微分方程(用 x 表示水平坐标,y 表示竖直坐标,取初始点为原点)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

g 是重力加速度.利用初始条件解得

$$x = v_0t\cos\alpha, y = v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

射程持续从 $t=0$ 到 $t=T=(2v_0\sin\alpha)/g$.弹道的长度为

$$S(\alpha)=\int_0^T\sqrt{(v_0\sin\alpha-gt)^2+(v_0\cos\alpha)^2}\,dt$$

置 $w = v_0\sin\alpha - gt$ 与 $u = v_0\cos\alpha$ 得

$$S(\alpha) = -\frac{1}{g}\int_{v_0\sin\alpha}^{-v_0\sin\alpha}\sqrt{w^2+u^2}\,\mathrm{d}w =$$

$$\frac{2}{g}\int_0^{v_0\sin\alpha}\sqrt{w^2+u^2}\,\mathrm{d}w$$

注意到 u 依赖于 α，将上式对 α 微分得

$$S'(\alpha) = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+u^2}\,v_0\cos\alpha + \frac{2}{g}\int_0^{v_0\sin\alpha}\frac{u\,\mathrm{d}w}{\sqrt{w^2+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha} =$$

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}\left(1-\sin\alpha\int_0^{v_0\sin\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{w^2+u^2}}\right) =$$

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}\left(1-\sin\alpha\left(\ln(w+\sqrt{w^2+u^2})\right)_0^{v_0\sin\alpha}\right) =$$

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}\left(1-\sin\alpha\ln(\sec\alpha+\tan\alpha)\right)$$

现在 $\sin\alpha$ 从 0 增加到 1，α 同时由 0 变到 $\pi/2$，并且 $\ln(\sec\alpha+\tan\alpha)$ 从 0 增加到 $+\infty$。这时 $\cos\alpha$ 除 $\alpha=\pi/2$ 外是正的。因此 $\sin\alpha\ln(\sec\alpha+\tan\alpha)=1$ 有唯一的值 $\alpha=\alpha_0\in(0,\pi/2)$。并且当 $0<\alpha<\alpha_0$，$S'(\alpha)>0$；当 $\alpha_0<\alpha<\pi/2$，$S'(\alpha)<0$。因为 S 显然在 $[0,\pi/2]$ 上是连续函数，在区间上 α_0 处有唯一的最大值，即 $a=d_0$ 时弹道最长。计算得近似值 $\alpha_0=56°28'$。

B－2　在半径为 R 的圆柱体上，镗上一个半径为 $r(r\leqslant R)$ 的圆柱形的孔，两轴成直角。

（1）证明：小圆柱套上大圆柱的表面的面积为

$$S = 8r^2\int_0^1\frac{1-v^2}{\sqrt{(1+v^2)(1-m^2v^2)}}\mathrm{d}v$$

这里 $m=r/R$。

（2）如果

$$K = \int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}$$

$$E = \int_0^1\sqrt{\frac{1-m^2v^2}{1-v^2}}\mathrm{d}v$$

证明

$$S = 8(k^2E-(R^2-r^2)K)$$

解　作草图，如图 1 所示。

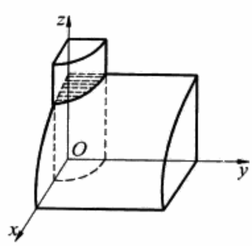


图 1

令两个圆柱曲面是 $x^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2=r^2$，这里 $r\leqslant R$。图中阴影标记的面积是在一个卦限内所求的面积的部分。这个曲面的方程是

$$z=\sqrt{R^2-x^2}$$

故面积为 $S = 8\iint\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

这里重积分的区域是

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

化为二次积分

$$S = 8\int_0^r\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 8R\int_0^r\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$

令 $x/r = v, r/R = m$,结果简化为

$$S = 8r^2\int_0^1\frac{1 - v^2}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - m^2v^2)}}\mathrm{d}v$$

得(1).

为了得(2),记 $r^2(1 - v^2) = R^2(1 - m^2v^2) - (R^2 - r^2)$,代入得

$$S = 8\int_0^1\frac{R^2(1 - m^2v^2)}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - m^2v^2)}}\mathrm{d}v - 8\int_0^1\frac{(R^2 - r^2)}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - m^2v^2)}}\mathrm{d}v =$$
$$8(R^2E - (R^2 - r^2)K)$$

B - 3 从笛卡儿平面内任一点(a,b),证明

(1) 能对抛物线 $y^2 = 4px$ 作三条实的或虚的法线.

(2) 如果$4(2p - a)^2 + 27pb^2 < 0$,这些法线是实的并且互不相同.

(3) 如果(a,b)在曲线 $27py^2 = 4(x - 2p)^2$ 上,则它们中的两个重合.

(4) 仅当(a,b)是点$(2p,0)$,三个全重合.

解 抛物线在点(x,y)的斜率为 $2p/y$,因此联结(a,b)与(x,y)的直线是抛物线在(x,y)的法线,当且仅当

$$(y - b) = (-y/2p)(x - a) = (-y/2p)((y^2/4p) - a)$$

($y = 0$ 的情形也包含在这个方程内).由此得到

$$y^3 + 4p(2p - a)y - 8p^2b = 0 \qquad ①$$

如果计算重根,这三次方程有三个根,可以是实的或复的.因为 y 的(实的或复的)值与在抛物线上(实的或虚的)的点一一对应,问题的(1)部分已做出.

实三次方程 $y^3 + Ay + B = 0$,当且仅当 $\Delta = 27B^2 + 4A^3 \leqslant 0$ 根全为实;当且仅当 $\Delta = 0$ 两根重合;当且仅当 $A = B = 0$ 三根重合.

现在 $A = 4p(2p - a), B = -8p^2b$,所以

$$\Delta = 64p^3(4(2p - a)^3 + 27pb^2)$$

由题容易看出应取 $p > 0$(如同通常抛物线的标准形式). 在此假设下,Δ 的符号与

$$\Delta' = 4(2p - a) + 27pb^3$$

的符号相同.

因此①的根即抛物线的点是相异的及实的当且仅当 $\Delta' < 0$. 两条法线重合当且仅当 $\Delta' = 0$,即 (a,b) 在曲线 $27py^2 = 4(x - 2p)^3$ 上. 最后,当且仅当 $4p(2p - a) = 0, 8p^2b = 0$,即当且仅当 $(a,b) = (2p,0)$,三条法线重合.

B－4 证明:与曲面

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, abc \neq 0 \quad ①$$

相切的三个互相垂直的平面的交点在球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1/a) + (1/b) + (1/c) \quad ②$$

上.

解 首先求平面

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \quad ③$$

与已知二次曲面 Q

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, abc \neq 0$$

相切时系数的条件.

在点 (x_1, y_1, z_1) 处 Q 的切平面方程为

$$ax_1x + by_1y + cz_1z = 1 \quad ④$$

假设③与④是相同的平面,则 $\delta \neq 0$. 并且

$$x_1 = \alpha/a\delta, y_1 = \beta/b\delta, z_1 = \gamma/c\delta \quad ⑤$$

因为 (x_1, y_1, z_1) 是 Q 上的一点,一定有

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}\right) = 1$$

因此

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = \delta^2 \quad ⑥$$

$\delta \neq 0$ 是平面③与 Q 相切的必要条件. 反之,当⑥成立并且 $\delta \neq 0$,则⑤确定 Q 的一个点 $P = (x_1, y_1, z_1)$ 及点 Q 的切线,且 P 的方程④与③等价,所以条件是充分且必要的.

后面将知当⑥成立而 $\delta = 0$ 时会出现什么情况(自然假设 α, β, γ 全非零),则平面③是 Q 的渐近面. 在投影几何里,⑥是③投影地切于 Q 的充要条件. 切点的齐次坐标是 $(\alpha/a, \beta/b, \gamma/c, \delta)$.

当 $\delta \neq 0$,这是由⑤给出的笛氏坐标的通常点.当 $\delta = 0$,这个点在 Q 上无穷远处(有齐次坐标(x,y,z,t)的投影点在 Q 上,当且仅当 $ax^2+by^2+cz^2=t^2$.这个方程由 Q 的方程的每一项乘以 t 使其次数增至 z 而得).渐近平面就是"切 Q 于无穷远处"的平面,也可以看做切点趋向于无穷远处的某一点时,切平面序列的极限.

假设$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$,$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$与$(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$是彼此正交的单位向量,则矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \qquad ⑦$$

是正交的,故它的列也是彼此正交的单位向量,因此

$$\sum \alpha_i^2 = \sum \beta_i^2 = \sum \gamma_i^2 = 1$$

设 Q 的一些切平面以这些向量为法线时这些平面彼此垂直,方程是

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = \delta_i, i = 1,2,3 \qquad ⑧$$

这里
$$\frac{\alpha_i^2}{a} + \frac{\beta_i^2}{b} + \frac{\gamma_i^2}{c} = \delta_i^2$$

因为 $|\delta_i|$ 是原点到第 i 个平面的距离,毕氏定理证明从原点 O 到这些平面的交点 P 的距离为

$$OP^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = \frac{1}{a}\sum \alpha_i^2 + \frac{1}{b}\sum \beta_i^2 + \frac{1}{c}\sum \gamma_i^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

B－5 设 a,b,c 是

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

的根,试确定所有这样的有理值 a,b,c.

解 根的条件等价于

$$a + b + c = -a \qquad ①$$

$$ab + bc + cd = b \qquad ②$$

$$abc = -c \qquad ③$$

当 $c=0$,则 $ab=b$ 与 $2a+b=0$,即或者 $b=0,a=0$ 或者 $a=1,b=-2$.如果 $c\neq 0$,则 $ab=-1$;如果 $a+b=0$,则②成为 $ab=b$,得 $a=1,b=-1,c=-1$;如果 $a+b\neq 0$,则

$$c = \frac{b+1}{a+b} = \frac{a(b+1)}{a(a+b)} = \frac{-1+a}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}$$

由 ①
$$2a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=0$$
得
$$3a^3+2a^2-1=0$$
这个方程没有有理根.因为有的话只可能是 ±1 或者 $\pm\frac{1}{2}$,而这些都不是它的根.因此有三个解答

a	b	c	对应于
0	0	0	$x^3=0$
$+1$	-2	0	$x^3+x^2-2x=0$
$+1$	-1	-1	$x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+1)=0$

B－6　证明
$$\begin{vmatrix} a_1^2+k & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+k & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2+k \end{vmatrix}$$
被 k^{n-1} 除尽,并求其他因子.

解　设 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵
$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$
$\boldsymbol{B}$ 的秩至多为1.因为任何两行(或两列)显然相关.所以在 $\boldsymbol{B}$ 的特征值中有 $n-1$ 个零.故 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式能被 x^{n-1} 除尽.因此
$$\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=x^n-(\boldsymbol{B}\text{ 的迹})x^{n-1}=x^{n-1}(x-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)$$
所以
$$\det(\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{I})=(-1)^n\det(-k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=k^{n-1}(k+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$
另一因子就是 $k+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

B－7　比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 与 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小,这里 $n>8$.

解　当 $n>8$ 时
$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$$
对于 $x>0$,考察函数 $f(x)=(\ln x)/x$,它的导数是 $(1-\ln x)/x^2$,当 $x>\mathrm{e}$ 它是负的.

因此,当 $e \leqslant x < y$,有 $f(x) > f(y)$ 与

$$xy\left(\frac{\ln x}{x}\right) > xy\left(\frac{\ln y}{y}\right)$$

取指数得

$$e^{y\ln x} > e^{x\ln y}$$

即当 $e \leqslant x < y$,有 $x^y > y^x$.当 $n \geqslant 8$,则 $e < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$,所以

$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$$

第4届美国大学生数学竞赛

A－1　试证明:当 $0 < x < a$ 时,多项式

$$(a-x)^6-3a(a-x)^5+\frac{5}{2}a^2(a-x)^4-\frac{1}{2}a^4(a-x)^2$$

仅取负值.

解　作替换 $x=a(1-y)$,则所给多项式化为

$$a^6y^2(y^4-3y^3+(5/2)y^2-(1/2))$$

因为 a^6y^2 总是正的,就足以证明

$$g(y)=y^4-3y^3+(5/2)y^2-(1/2)<0$$

对于 $0<y<1$,因为

$$g'(y)=4y^3-9y^2+5y=y(y-1)(4y-5)$$

g 的临界点是 $0,1,5/4$.在相邻的临界点之间 g 是严格单调的,所以,因 $g(0)=(-1/2)$,$g(1)=0$,故对 $0<y<1$ 有 $(-1/2)<g(y)<0$.

A－2　求

$$\int_0^x\left(1+\frac{(x-t)}{1!}+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{nt}dt$$

的关于 x 的 n 次导数.

解　设

$$\phi_k(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}e^{nt}dt$$

则对于 $k>0$,$\phi'_k(x)=\phi_{k-1}(x)$.同时

$$\phi_0(x)=\int_0^x e^{nt}dt=-\frac{e^{nt}-1}{n}$$

所以对于 $n>k$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\phi_k(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\phi_0(x)=n^{n-k-1}e^{nx}$$

据此,此已给函数的 n 次导数是

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n(\phi_0(x)+\phi_1(x)+\cdots+\phi_{n-1}(x))=$$

$$(n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+1)e^{nx}=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{n-1}e^{nx}, & 当\ n\neq 1\\ e^x, & 当\ n=1\end{cases}$$

A－3 半径为 a 的圆在它所在的平面上沿 x 轴滚动.证明:直径的包络是一条摆线.就是同样沿 x 轴在这个平面上滚动的直径为 a 的圆的圆周上一点画出的摆线.

解 如图1,设这两个圆沿着 x 轴的上边滚动.在时间 t 它们都在点 $T(at,0)$ 与轴相切.令 P 与 Q 各是两圆上在滚动前与原点接触的点,而 D 与 E 分别为大小两圆的中心.又设 P' 是 P 在大圆上的对立点.因为可以沿 x 轴适当地选择原点,故可假定 PP' 是问题中所指的运动的直径.

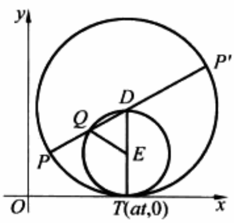


图 1

当 Q 画一条摆线 C,下面要证 PP' 总切 C 于 Q.这样 PP' 的包络是 C.

因为弧 PT = 弧 QT = OT = at.对于半径为 a 与 $(1/2)a$ 的圆有 $\angle PDT=t$, $\angle QET=2t$.因此在时间 t, P 在 $(at-a\sin t, a-a\cos t)$, P' 在 $(at+a\sin t, a+a\cos t)$.并且 Q 的坐标是

$$x=at-(a/2)\sin 2t,\ y=(a/2)-(a/2)\cos 2t$$

对于 Q 运动的参数方程即摆线 C,当 t 不是 π 的倍数,参数化是非奇异的,否则为奇异的(这是因为 dx/dt 与 dy/dt 都是零).对非奇异的 t 的点,C 的切线有方向向量 $(a-a\cos 2t, a\sin 2t)$.所以在 C 上点 Q 的切线以 u 为参数的表示式为

$$\begin{aligned}x&=at-(a/2)\sin 2t+u(a-a\cos 2t)\\ y&=(a/2)-(a/2)\cos 2t+u(a\sin 2t)\end{aligned}\qquad ①$$

① 中置 $u=\dfrac{\cos t-1}{2\sin t}$ 与 $u=\dfrac{\cos t+1}{2\sin t}$.明知 P 与 P' 都在直线上,即对于不是 π 的倍数时的 Q, PP' 是在 Q 处 C 的切线.

当 t 是 π 的倍数,Q 在 x 轴上,曲线 C 在 Q 有一尖点与垂直切线,并且或者 P 或者 P' 在 x 轴上.PP' 也与 C 相切.

A－4 设

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$$

的根 a,b,c 是实的,并且 $a\leqslant b\leqslant c$.试证:当区间 (a,c) 分成六个相等的部分,$f'(x)=0$ 的根将落在以端点 b 算起的第四个部分.如果在问题中 $f'(x)=0$ 的根落在第四个部分的某一个端点上,那么 $f(x)$ 将会是什么形式?

解 当且仅当命题对 $f(x+b)$ 有效时,它对 $f(x)$ 有效.于是

将所有的根减去 b 使排在中间的根为零. 因此,不失一般性,令 $b=0$. 考虑

$$f(x)=(x-a)x(x-c)=x^3-(a+x)x^2+acx$$

这里 $a\leqslant 0\leqslant c$. 问题的第四个子区间会是 $[c/2,2c/3]$.

从 $f'(x)=3x^2-2(a+c)x+ac$ 得 $f'(c/2)=-(1/4)c^2\leqslant 0$ 与 $f'(2c/3)=(-1/3)ac\geqslant 0$. 因为 f 的连续性,在 $[c/2,2c/3]$ 上有 $f'(x)=0$ 的一个根.

当且仅当 $c=0$,根出现在左端点 $c/2$,即两个最大的根重合. 这时 $f(x)=(x-a)x^2$.

当且仅当 $a=0$ 或 $c=0$,根出现在右端点 $2c/3$. 若 $c=0$ 根据上述,区间退化为一点;若 $c\neq 0$ 则 $a=0$,两个最小的根重合,这时 $f(x)=x^2(x-c)$.

恢复原来 a,b,c 的意义,回答问题的第二部分. f' 在左端点为零,当且仅当 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$. 在右端点为零,当且仅当 $f(x)=(x-b)^2(x-c)$ 或 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$.

A-5 证明:平行于平面 $y=z$ 并且与两个抛物线 $y^2=2x$, $z=0$ 及 $z^2=3x$, $y=0$ 相交的直线,运动时所生成的曲面为

$$x=(y-z)\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{3}\right)$$

解 设直线交第一个抛物线于 $(18s^2,bs,0)$,交第二个抛物线于另一个点 $(12t^2,0,bt)$. 直线与平面 $y=z$ 平行的条件是直线的方向向量

$$(18s^2-12t^2,6s,-6t)$$

在那平面上,即 $6s=-6t$. 因此,两点是 $(18t^2,-6t,0)$ 与 $(12t^2,0,6t)$,这里 $t\neq 0$.

这条直线参数表示为

$$(18t^2,-6t,0)+u(6t^2,-6t,-6t) \quad ①$$

这里 u 是参数,故得关于运动的直线生成的曲面为两个参数表示的方程

$$x=18t^2-6ut^2,y=-6t-6ut,z=-6tu$$

这里 $t\neq 0$. 注意到

$$y-z=-6t,(y/2)-(z/3)=-t(3+u) \quad ②$$

消参数得

$$x=6t(3t+ut)=(y-z)(y/2-z/3) \quad ③$$

这就证明了:平行于平面 $y=z$ 且交两已知抛物线于不同的点的任何直线上的任何点在曲面 ③ 上.

反之,若(x_1,y_1,z_1)是曲面③上的一个点,$y_1\neq z_1$,能由②确定参数t与u,使(x_1,y_1,z_1)有①的表达式.然而平面$y=z$上的点是特殊情况,因为此时已知抛物线交平面于点(0,0,0).所以这平面上每一点是在一条平行于(事实上是包含于)这平面,并与两抛物线相交的直线上.把这些直线考虑在内,则应将轨迹③与整个平面$y=z$的接连部分补充进去.曲面③自己交平面$y=z$于一直线$x=0,y=z$.

A-6 如果x轴、曲线$y=f(x)(f(x)>0)$、直线$x=0$与$x=a$所包围的面积的质量中心的x坐标$\tilde{x}$是由$\tilde{x}=g(a)$给定的.证明

$$f(x)=A\frac{g'(x)}{(x-g(x))^2}\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x/(x-g(x))}$$

这里A是正的常数.

解 由形心的定义并限制为正

$$g(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\Big/\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,x\neq 0 \quad ①$$

令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则$F'=f$,①成为

$$F(x)g(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

微分得 $F'(x)g(x)+F(x)g'(x)=xf(x)=xF'(x)$

所以F满足线性微分方程

$$F'(x)=\frac{g'(x)}{x-g(x)}F(x) \quad ②$$

因此

$$F(x)=A\mathrm{e}^{g(x)} \quad ③$$

这里A是正的常数,并且

$$\psi(x)=\int_0^x\frac{g'(t)}{t-g(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t-g(x)}-\ln(x-g(x)) \quad ④$$

于是

$$F(x)=\frac{A}{x-g(x)}\exp\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t-g(t)} \quad ⑤$$

以⑤代入②得

$$f(x)=A\frac{g'(x)}{(x-g(x))^2}\exp\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t-g(t)} \quad ⑥$$

为所求.

在问题的条件下对所有的正的$x,x>g(x)$,即分母$x-g(x)$不能造成函数的奇异性.对于$x<0$有$g(x)>x$,故必须用

$\ln(g(x)-x)$ 代换④中的 $\ln(x-g(x))$，则⑥成为

$$f(x)=\frac{-Ag'(x)}{(x-g(x))^2}\exp\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t-g(t)}$$

在这种情形下，③的常数 A 一定是负的，再次得所求公式.

A－7 (1) 证明

$$\begin{vmatrix}1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b)\\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a)\\ 2(ca+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2\end{vmatrix}=(1+a^2+b^2+c^2)^3$$

(2) 回转半椭球是由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在第一象限部分绕 x 轴旋转构成的. 证明：当且仅当 $b\sqrt{8}\geqslant a\sqrt{5}$ 时，用它的顶点放在水平面上，这个半椭球成稳定的平衡.

解 (1) 第一行加上第三行乘以 b，减去第二行乘以 c 得

$$\begin{vmatrix}1+a^2+b^2+c^2 & c(1+a^2+b^2+c^2) & -b(1+a^2+b^2+c^2)\\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a\\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2\end{vmatrix}=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix}1 & 1 & -b\\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a\\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2\end{vmatrix}=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2ab-2c & 1+b^2+c^2-a^2-2abc & 2ab^2+2a\\ 2ac+2b & -2a-2ac^2 & 1+c^2-a^2+b^2+2abc\end{vmatrix}=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)((1+b^2+c^2-a^2)^2-4a^2b^2c^2+4a^2(b^2+1)(c^2+1))=(1+a^2+b^2+c^2)^3$$

(2) 令 C 是半椭球体 S 的重力中心，V 是它的顶点，考察中心在 C，半径为 CV 的球.

假设 V 附近的球面严格地在 S 内(除去点 V)，则当 S 放在水平面上，V 任何微小的移动引起重心上升，因此 S 是稳定平衡的.

另一方面，假设 V 附近的球面严格在 S 外(但将 V 除外)，则当 S 放在水平面上，V 的任何微小移动引起重心下降，所以 S 是不稳定的.

因此考察从 C 到一个在椭圆面上的可变点 P 的距离函数 $f(P)=CP$.如果这个函数有一个在 V 的严格的局部最小值,平衡是稳定的.如果在 P 有一个严格的局部最大值,平衡是不稳定的,可用 $f(P)^2$ 代替 $f(P)$.

从本题中圆的对称性,对于某个 $c>0$,显然 C 在$(c,0,0)$.而且可将问题局限于考察函数 $f(P)^2$,这里 P 沿着母椭圆$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 变动.若 $P=(x,y)$,则有

$$f(P)^2=(x-c)^2+y^2=(x-c)^2+b^2(1-x^2/a^2)=$$
$$(1-b^2/a^2)x^2-2cx+b^2+c^2$$

我们要确定 $x=a$ 是否使这个多项式在区间$[0,a]$取一个局部最小值.沿整个正 x 轴考察这个多项式,知当 $b^2\geqslant a^2$ 时是严格递减的;当 $b^2<a^2$,则从 $x=0$ 到 $x=ca^2/(a^2-b^2)$ 是递减的,然后递增,因此当 $b^2\geqslant a^2$ 或 $b^2<a^2$,而 $a\leqslant ca^2/(a^2-b^2)$,即 $b^2\geqslant a^2-ac$ 时,V(在两维坐标系中等于$(a,0)$)是局部最小值.当 $b^2<a^2-ac$ 时,V 是严格的局部最大值.

现在找重心的位置,不妨设质量分布均匀,所以重心与形心重合,因此

$$c=\int_0^a x\cdot\pi y^2\mathrm{d}x\Big/\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^a x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\Big/\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}a$$

关于稳定性的条件成为 $b^2\geqslant\frac{5}{8}a^2$,即$\sqrt{8}b\geqslant\sqrt{5}a$ 为所求.

B-1 有一运动质点(x,y),对$(1,0)$与$(-1,0)$的角速度相等而符号相反,证明

$$y(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x=x(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$$

并且验证这是通过$(1,0)$与$(-1,0)$且以原点为中心的等轴(直角)双曲线族的微分方程.

解 如图1,一个质点运动的坐标参数方程为

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$

它关于原点的角度是

$$\frac{x\dot{y}+y\dot{x}}{x^2+y^2}$$

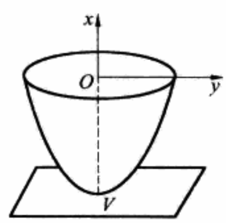


图1

这里小点表示对 t 微分.转移参考中心,先到$(1,0)$然后到$(-1,0)$,则条件可表为

$$\frac{(x-1)\dot{y}-y\dot{x}}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(x+1)\dot{y}-y\dot{x}}{(x+1)^2+y^2}=0$$

得
$$(x\dot{y}-y\dot{x}-\dot{y})(x^2+y^2+1+2x)+$$
$$(x\dot{y}-y\dot{x}+\dot{y})(x^2+y^2+1-2x)=0$$
化简为
$$x(x^2+y^2-1)\dot{y}=y(x^2+y^2+1)\dot{x} \quad ①$$
等价于所求微分方程.

中心等轴双曲线有方程
$$A(x^2-y^2)+B(xy)=1$$
当且仅当 $A=1$,它通过 $(-1,0)$ 与 $(1,0)$,所考虑的族为
$$x^2-y^2+Bxy=1 \quad ②$$
对于 t 微分得
$$2x\dot{x}-2y\dot{y}+B(x\dot{y}+\dot{x}y)=0 \quad ③$$
② 与 ③ 中消去 B 得
$$xy(2x\dot{x}-2y\dot{y})+(x\dot{y}+\dot{x}y)(1-x^2+y^2)=0$$
这里所考虑的双曲线族的微分方程,化简后即为 ①.

B-2 计算下面式子的极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

解 (1) 第一个和
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=$$
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$
是对应于分点
$$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$$
的黎曼小和.可近似表为
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$
所以当 $n\to\infty$,它们的极限是
$$\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$

(2) 第二个和的单项 $1/\sqrt{n^2+i}$ 满足

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, i = 1,2,\cdots,n$$

因此
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

当 $n \to \infty$ 时,两边的极限都是 1.因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\right) = 1$$

(3) 第三个和

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{2}}, i = 1,2,\cdots,n^2$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} = \infty$$

B - 3 求方程

$$y'' + y'p(x) + yQ(x) = 0$$

的任何两个线性无关的积分的乘积 z 所满足的微分方程.

解 设 y_1 与 y_2 是已知微分方程的两个线性无关的解,则任何两个解有形式

$$u = ay_1 + by_2, v = cy_1 + dy_2$$

因为 uv 落在由 y_1^2, y_1y_2, y_2^2 生成的线性空间.为此我们希望能证明它能满足一个三阶线性微分方程.令 $z = uv$,有

$$u'' + pu' + Qu = 0 \quad ①$$

$$v' + Pv' + Qv = 0 \quad ②$$

$$z' = uv' + u'v \quad ③$$

$$z'' = uv'' + 2u'v' + vu'' \quad ④$$

得

$$z'' + Pz' + 2Qz = u(v'' + Pv' + Qu) + v(u'' + Pu' + Qu) + 2u'v' = 2u'v' \quad ⑤$$

微分 ⑤ 得

$$z''' + Pz'' + (P' + 2Q)z' + 2Q'z = 2u'v'' + 2v'u'' \quad ⑥$$

再将 ① 乘以 $2v'$,将 ② 乘以 $2u'$ 相加得

$$2u'v'' + 2v'u'' + 4Pu'v' + 2Qz' = 0 \quad ⑦$$

用 $2P$ 乘 ⑤ 得

$$2Pz'' + 2P^2z' + 4PQz = 4Pu'v' \quad ⑧$$

⑥,⑦ 与 ⑧ 相加,右边的项全消去,得

$$z''' + 3Pz'' + (2P^2 + P' + 4Q)z' + (4PQ + 2Q')z = 0 \quad ⑨$$

是原方程任何两个解的乘积所满足的一个三阶微分方程.

B-4　已知椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的两条垂直的直径,做出与它们共轭的两条直径.证明:通过这些直径的端点的等轴双曲线,也通过椭圆的两焦点.

解　设 E 是已给椭圆,假定 $a^2 > b^2$,则焦点在 $(c,0)$ 与 $(-c,0)$,这里 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. 设已知直径方程为 $y = mx$ 与 $-my = x$.注意到椭圆的直径平行于它的另一条共轭直径的端点的切线.不难得出两共轭直径的方程分别为

$$b^2x + ma^2y = 0, mb^2x - a^2y = 0$$

因此

$$(b^2x + ma^2y)(mb^2x - a^2y) = mb^4x^2 - ma^4y^2 + (m^2 - 1)a^2b^2xy = 0$$

是两共轭直径的直线组成的退化的圆锥曲线 D 的方程.任何通过 D 与 E 的交(即共轭直径的端点)的圆锥曲线(除 E 外)有方程为

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + mb^4x^2 - ma^4y^2 + (m^2 - 1)a^2b^2xy = 0 \quad ①$$

当且仅当 x^2 与 y^2 的和的系数为零,即

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + mb^4 - ma^4 = 0$$

即 $\lambda = ma^2b^2c^2$,圆锥曲线①是等轴双曲线(可能退化).λ 具有这样的值时,圆锥曲线①通过 $(c,0)$,$(-c,0)$ 为所求.

有 $\lambda = ma^2b^2c^2$ 的等轴双曲线①当且仅当常数项 λ 为零时是退化的.仅当 $m = 0$ 时已知椭圆是真椭圆(即 $a \neq b$),即当原直径是椭圆的轴.在这种情形下,共轭直径也是轴,并且没有真的等轴双曲线通过四个点,则两条轴的并是满足条件的退化等轴双曲线.

如果已知椭圆是一个圆,$c = 0$,故 λ 总是零.对于一圆,互垂的直径总是共轭的,并且任何两条这样的直径的并是一条退化等轴双曲线,它通过重合于中心的焦点.

B－5 一辆卡车,它的车轮的半径均为 a 尺,以每秒 ω 弧度的角速度行驶.一个质点从车轮中的轮胎脱出,这里假设 $a\omega^2 > g$,不计空气阻力.证明:质点能够达到的距路面最大高度是 $(a\omega + g\omega^{-1})^2/2g$.

解 若质点开始高度为 h,并且抛出速度向上的分量为 v,在重力场上升高度为 $h+(v^2/2g)$(运动水平分量不影响最大高度).

当质点尚附着于轮胎上运动时,轨道呈摆线.运动方程为

$$x = a\omega t - a\sin \omega t, y = a(1-\cos \omega t)$$

如果当 $\omega t = \theta$ 时质点离开轮胎,则开始进入重力场.自高度为 $a(1-\cos\theta)$ 处以 $y' = a\omega\cos\theta$ 为速度的向上分量的重力运动.因此它达到的高度为

$$H = a(1-\cos\theta) + \frac{a^2\omega^2}{2g}\sin^2\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad ①$$

(以保证开始时质点向上).

选择 θ 求 H 的最大值,置

$$\frac{dH}{d\theta} = a\sin\theta + \frac{a^2\omega^2}{g}\sin\theta\cos\theta = 0$$

得临界点为 $0,\pi,\theta_0$,这里 $\theta_D = \arccos(-g/a\omega^2)$(因为 $a\omega^2 > 0$,有这样的 θ_0).对应的 H 的值是 $0,2a$ 与

$$H_0 = a\left(1+\frac{g}{a\omega^2}\right) + \frac{a^2\omega^2}{2g}\left(1-\frac{g^2}{a^2\omega^4}\right) = \frac{1}{2g}(a\omega + g\omega^{-1})^2$$

因为 $(a\omega + g\omega^{-1})^2 > 4ag, H_0 > 2a$,所以 H 的最大值是 H_0.

我们也能将 ① 写成

$$H = H_0 - \frac{a^2\omega^2}{2g}\left(\cos\theta + \frac{g}{a\omega^2}\right)^2$$

来求 H 的最大值.

B－6 假设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 连续,证明

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1}\int_{z=x}^{z=y} f(x)f(y)f(z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3!}\left(\int_{t=0}^{t=1} f(t)\,dt\right)^3$$

解 令 $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$,则 $F'(u) = f(u)$,所求方程的右

边为 $(1/3)F(1)^3$.左边逐步积分得

$$\int_{x=0}^{x=1} f(x)\left(\int_0^1 f(y)(F(y) - F(x))\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 f(x)[(1/2)(F(y) - F(x))^2]_{y=x}^{y=1}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)(F(1) - F(x))^2\mathrm{d}x =$$
$$-(1/6)(F(1) - F(x))^3\Big|_0^1 = (1/6)F(1)^3$$

为所求.

B－7 (1) 证明:函数方程

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)f(x) + f(y)f(y) - 1$$

(x,y 是实数)的任何解 $f(t)$ 有

$$f''(t) = \pm m^2 f(t),\quad m \text{ 为大于等于 0 的常数}$$

假设 $f(t)$ 的二次异数存在且连续,则 $f(t)$ 是函数 $\pm\cos mt$, $\pm\cos hmt$ 中的一个.

(2) 设有 n 个常数值 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, n 个彼此不同的常数值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及由 x 的恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2\cdots x^{n-1} & p(x) \\ 1 & a_1 & a_1^2\cdots a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2\cdots a_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2\cdots a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix} \equiv 0$$

定义的一个多项式 $P(x)$.对于一个已知多项式 $\phi(t)$,定义另一个多项式 $Q(x)$,它为上面的恒等式中将 $P(x),b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代之以 $Q(x),\phi(b_1),\phi(b_2),\cdots,\phi(b_n)$ 所得的 x 的恒等式所确定.证明:用 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 除 $\phi(p(x))$ 所得余式为 $Q(x)$.

解 (1) 由已知函数方程

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + f(y)^2 - 1 \quad ①$$

对 y 微分得

$$f'(x+y)f(x-y) - f(x+y)f'(x-y) = 2f(y)f'(y) \quad ②$$

然后再对 x 微分得

$$f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0 \quad ③$$

在 ① 与 ② 内置 $x = y = 0$ 得 $f(0)^2 = 2f(0)^2 = 1$ 与 $2f(0)f'(0) = 0$,故

$$f(0) = \pm 1, f'(0) = 0 \qquad ④$$

现在对任一已知数 t,在 ③ 内令 $x = y = t/2$,得

$$f''(t)f(0) - f(t)f''(0) = 0$$

它等价于

$$f''(x) \pm m^2 f(t) = 0 \qquad ⑤$$

这里 $m = |f''(0)|^{1/2}$.利用初始条件 ④⑤ 积分得 $f(t) = \pm \cos mt$ 或者 $f(t) = \pm \cos hmt$,这决定于 ⑤ 中的符号是取正号还是取负号.如果 $m = 0$ 解是常数.反之上面的解的每一个都满足关于 m 的任何值的函数方程.

(2) 利用范得蒙行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

不为零.若在定义 $P(x)$ 的行列式中用 a_1 代入 x_1,将第一行减去第二行后再按第一行展开,得

$$V(P(a_1) - b_1) = 0$$

故 $P(a_1) = b_1$.同理可得 $P(a_i) = b_i, i = 2,3,\cdots,n$.

同样利用关于 Q 的行列式可证 $Q(a_i) = \Phi(b_i), i = 1,2,\cdots,n$.显然 Q 是小于 n 次的多项式.

假设多项式 $\Phi(P(x))$ 除以 $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$,剩下的余式 $R(x)$ 次数小于 n,则

$$\Phi(P(x)) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)S(x) + R(x)$$

这里 $S(x)$ 是多项式.用 $x = a_i$ 代入得

$$R(a_i) = \Phi(P(a_i)) = \Phi(b_i) = Q(a_i)$$

所以有关于 x 的 n 个不同的值使得 $Q(x) - R(x)$ 为零.但因其次数小于 n,故 $Q(x) - R(x)$ 恒等于零,并且余式为 $Q(x)$,得证.

第5届美国大学生数学竞赛

A① - 1　一边长为 $2a$ 的正方形总位于 xy 平面的第一象限内,当此正方形移动时,它的两个相邻顶点始终分别保持在 x 轴上和 y 轴上.求正方形中心的轨迹.

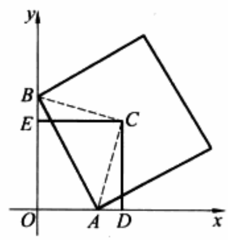


图1

解　设 A 和 B 为正方形的两相邻顶点,分别位于 x 轴上和 y 轴上.设 C 为正方形的中心,D 和 E 分别为由 C 至 x 轴和 y 轴所引垂线之垂足.设 O 为坐标原点.

则 $\angle ACB$ 为直角,$\angle DCE$ 为直角,而且 $\triangle ACD$ 全等于 $\triangle BCE$(斜边和一锐角相等).因此 C 的坐标 x 和 y 相等,$OECD$ 为一正方形.所以,当给定正方形按照题设条件移动时,它的中心 C 沿着从 (a,a) 至 $(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a)$ 的线段来回运动.

A - 2　设多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2(x-b)$,其中 $a \neq b$,试导出表示余项的公式.

解　因为 $f(x)$ 除以一个三次多项式,故余项 $R(x)$ 至多是 x 的二次多项式,比如说 $R(x) = Ax^2 + Bx + C$,则有

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)Q(x) + Ax^2 + Bx + C$$

和

$$f'(x) = 2(x-a)(x-b)Q(x) + (x-a)^2Q(x) + (x-a)^2(x-b)Q'(x) + 2Ax + B$$

由这些关系得

$$f(a) = Aa^2 + Ba + C, f(b) = Ab^2 + Bb + C$$

$$f'(a) = 2Aa + B$$

对 A,B,C 求解又得

$$A = \frac{1}{(b-a)^2}(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a))$$

$$B = \frac{-1}{(b-a)^2}(2a(f(b) - f(a)) - (b^2 - a^2)f'(a))$$

$$C = \frac{1}{(b-a)^2}((b-a)^2f(a) + a^2(f(b) - f(a)) + ab(a-b)f'(a))$$

① 本界竞赛的 B - 1 题是本题的一个推广.

因此 $R(x)=\frac{1}{(b-a)^2}((f(b)-f(a)-(b-a)f'(a))x^2-$
$(2a(f(b)-f(a))+(b^2-a^2)f'(a))x+$
$((b-a)^2f(a)+a^2(f(b)-f(a))+$
$ab(a-b)f'(a)))$

容易验证,上式亦可写成如下形式

$$R(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2-\frac{f'(a)}{b-a}(x-a)(x-b)$$

A - 3 问下列级数是收敛的还是发散的?

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{7}\right)^2+\frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{7}\right)^3+\frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{7}\right)^4+\cdots$$

解 $S=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{2!}{3^2}(\frac{19}{7})^2+\frac{3!}{4^3}(\frac{19}{7})^3+\frac{4!}{5^4}(\frac{19}{7})^4+\cdots$

设 $a_n=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}(\frac{19}{7})^{n-1}$,则 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,设 $a=\frac{19}{7}$,因

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{n!}{(n+1)^n}a^n}{\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}a^{n-1}}=a\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

由于
$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

因此
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}<1$$

故级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

注 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k>1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

A - 4 求二次曲线族$(x+2y)^2=a(x+y)$的正交轨线族.问两族曲线在坐标原点交成的角等于多少?

解 给定曲线族为一抛物线族,所有抛物线在原点均与直线 $x+y=0$ 相切.当 $a=0$ 时,抛物线退化为二重线$(x+2y)^2=0$,应将它考虑作二条退化抛物线,位于第 IV 象限内的半直线是 a 取正值趋于零时的极限情形,位于第 II 象限内的半直线是 a 取负值

趋于零时的极限情形.

为要找出抛物线族的微分方程,可把给定方程微分,并由原方程及其求导所得的方程中消去 a,即由

$$(x+2y)^2=a(x+y) \quad ①$$

$$2(x+2y)(1+2y')=a(1+y') \quad ②$$

消去 a 得 $2(x+y)(x+2y)(1+2y')=(x+2y)^2(1+y')$

化简为

$$(3x+2y)y'+x=0 \quad ③$$

方程中约去的因子 $x+2y$ 正好反映直线 $x+2y=0$ 是曲线族的一个退化元素.

此微分方程沿直线 $x+y=0$(它不包含原抛物线族的任何元素)有定义,故直线 $x+y=0$ 是曲线族对应于情形 $a=\infty$ 的另一个退化元素.

对微分方程

$$xy'=3x+2y \quad ④$$

作积分,便得到所要求的正交轨线族.事实上,④ 可写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y+3x)=\frac{2(y+3x)}{x}$$

它的解是

$$y+3x=kx^2 \quad ⑤$$

其中,k 为任意常数.这是一个新的抛物线族,除 y 轴上的点外,经过平面的每一个点处都有该族中唯一的一条曲线.如果把微分方程 ④ 改写为

$$x=(3x+2y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

显然 y 轴也是一条积分曲线,所以 y 轴也属于正交轨线族.

容易看出,新曲线族 ⑤ 中所有的曲线在原点均与直线 $y+3x=0$ 相切(但由 y 轴所表示的退化二重抛物线除外).

在坐标原点,两族曲线的交角即是两直线 $x+y=0$ 与 $3x+y=0$ 的夹角 θ.利用两直线的斜率,可得

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-1-(-3)}{1+(-1)(-3)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

所以 $\theta=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

A－5 一半径为 a 的圆面绕其所在平面内与圆心相距为 $b(b>a)$ 的一条直线旋转 180°.问当 b/a 为何值时,旋转所生成的立体的重心位于立体的表面上?

解 按下法取定坐标系,把母圆开始所在的平面作为 xz 平

面，把旋转轴作为 z 轴. 则生成的立体为一半环体(环体即是由圆环面所界的立体).

根据对称性，显然所求形心必位于 y 轴上，设为$(0,\overline{y},0)$，题目要求有 $\overline{y} = b - a$(图 1).

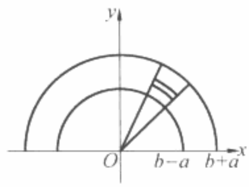


图 1

为求坐标 $\overline{y}$，在 xy 平面上引进极坐标. 相应于平面面积元素 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，体积元素为

$$2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

从而立体对 y 轴的重力矩 M_y 的元素为

$$2r\sin\theta\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

我们有 $\overline{y} = M_y/V$，其中 V 是半环体的体积.

$$V = \int_0^{\pi}\int_{b-a}^{b+a}2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$
$$2\pi\int_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r\mathrm{d}r =$$
$$2\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi(b+a\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = \pi^2a^2b$$

$$M_y = \int_0^{\pi}\int_{b-a}^{b+a}2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta =$$
$$4\int_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r^2\mathrm{d}r =$$
$$4a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi(b+a\sin\varphi)^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi =$$
$$2\pi a^2b^2+\frac{\pi}{2}a^4$$

在计算上述两个积分时，均用到代换 $r = b + a\sin\varphi$，因此得到

$$\overline{y} = \frac{M_y}{V} = \frac{a^2+4b^2}{2\pi b}$$

但又要求 $\overline{y} = b - a$，所以有

$$2\pi b^2 - 2\pi ab = a^2 + 4b^2$$

若令 $c = b/a$，则

$$(2\pi-4)c^2 - 2\pi c - 1 = 0$$

结果有

$$c = \frac{\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi-4}}{2\pi-4}$$

(因为 c 必是正数，故取正号)

A - 6　对于 xy 平面(水平面)内的每一个圆,都用圆面"上方"的一个点来"代表",这个点位于经过圆心的竖直线上,到圆心的距离等于圆的半径.

证明:与一定圆相交成定角的所有圆的"代表"的轨迹为一单叶双曲面(一个部分).

再考虑平面内的适当圆族,证明:在双曲面上必有两族母线存在.

解　用 C 表示定圆,并设圆心为 O,半径为 a.在 xy 平面内以 O 为原点取定直角坐标,并照惯例引进第三坐标 z.两条相交的光滑曲线的夹角 α 是指在交点处它们的切线间的两个夹角中之较小者,所以有 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

固定这样一个 α,且设以 p 为圆心,r 为半径的圆 C' 与定圆 C 在 B 处相交所成之角为 α,则

$$(OP)^2 = a^2 + r^2 \pm 2ar\cos\alpha$$

$\angle OBP$ 为钝角时符号取"+",$\angle OBP$ 为锐角时符号取"-".如果 P 的平面坐标是 (x_0, y_0),则 C' 可由点 (x_0, y_0, r) 代表.因此,所有这种代表点都属于集合 $A = A_1 \cup A_2$,这里 A_1 由条件

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 - 2az\cos\alpha, z > 0$$

确定,A_2 由条件

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 + 2az\cos\alpha, z > 0$$

确定.

反之,给定 A 的任一个点 (x_0, y_0, r),则半径为 r,圆心为 (x_0, y_0) 的圆 C' 与 C 必相交于两点($\alpha = 0$ 时重合为一点).欲明此点,只须注意到

$$(r - a)^2 \leqslant a^2 + r^2 \pm 2ar\cos\alpha = x_0^2 + y_0^2 \leqslant (r + a)^2$$

所以从 C 的圆心到 C' 的圆心的距离界于 $|r - a|$ 与 $r + a$ 之间.

除情形 $\alpha = 0, \pi/2$ 以外,集合 A_1 和 A_2 分别是由两双曲线

$$x^2 = (z \pm a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha$$

绕 z 轴旋转所产生的两个不同双曲面的一部分.当 $\alpha = \pi/2$ 时,两双曲线重合,因而 A_1 和 A_2 重合.当 $\alpha = 0$ 时,两双曲线退化,因而产生锥面(此时"相交"变成"相切").

设 B 是 C 之一定点,又设 R 是从 B 出发的四条半直线(假定 $0 < \alpha < \pi/2$)中的一条,它与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 α,则圆心在 R 上又通过 B 的所有圆与 C 的交角为 α,因此可用 A 的一点来代表.由于这些圆的半径将随其 x 标(或 y 标)的变化按比例地增加,故代表它们的点在空间形成一条半直线,这条半直线即是 A 的一条母线.而且这两条半直线在 B 处与 C 再相交又生成位于 A_1 中的二半直

线.

在 B 处的另外两条半直线则生成位于 A_2 中的二半直线. 如果这些半直线中的一条当做母线绕 z 轴旋转，则它生成 A 上的一整族母线. 因而 A 有四族母线，两族在 A_1 上，两族在 A_2 上. 如果 $\alpha=\pi/2$，由于此时从 B 出发垂直于 OB 的半直线只有两条，故只有两族母线，但此时有 $A_1=A_2$.

A 的每一个点 Q 都对应着以 P 为圆心的一个圆，这种圆与 C 两次相交，比如交于 B 和 B'（这里假定 $0<\alpha\leqslant\pi/2$），则对应于 $\overrightarrow{BP}$ 和 $\overrightarrow{B'P}$ 的母线是通过 Q 的两条不同的母线，而且由于旋转不会使 $\overrightarrow{BP}$ 和 $\overrightarrow{B'P}$ 重合，这两条母线必属于不同的母线族. 于是，通过 A 的每一个点都有属于不同族的两条母线.

如果 $A=0$，除了对应于 C 的点 $(0,0,a)$ 外，通过 A 的每一个点都只有一条母线，而且 A 的所有母线都通过 $(0,0,a)$.

B－1　一边长为 $2a$ 的正方形始终位于 xy 平面的第一象限，当此正方形移动时，它的两个相邻顶点总分别保持在 x 轴上和 y 轴上. 试证：在正方形内部或在正方形边界上的点的轨迹通常为一二次曲线（一部分）. 对于正方形的什么样的点，这种轨迹会发生退化？

解　设 A 和 B 是分别位于 x 轴上和 y 轴上的正方形的两相邻顶点，设 $P(x,y)$ 是正方形内一指定点，则 P 之坐标由下式给出

$$\begin{cases}x=n\sin\theta+l\cos\theta\\ y=m\sin\theta+n\cos\theta\end{cases}\qquad ①$$

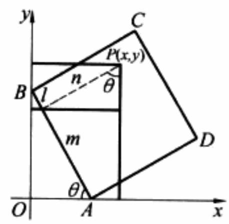


图 1

其中 n,l,m 和 θ 的定义如图 1 所示.

对 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 求解方程组 ①，得到

$$(lm-n^2)\cos\theta=mx-ny$$
$$(lm-n^2)\sin\theta=-nx+ly$$

因此对于 θ 的任何值，P 之坐标均满足方程

$$(lm-n^2)^2=(mx-ny)^2+(-nx+ly)^2\qquad ②$$

② 可化为

$$(m^2+n^2)x^2-2n(l+m)xy+(l^2+n^2)y^2=(lm-n^2)^2\qquad ③$$

③ 一般表示一条有心二次曲线，其判别式是

$$\Delta=4n^2(l+m)^2-4(m^2+n^2)(l^2+n^2)=-4(lm-n^2)^2$$

显然，Δ 不能为正. 如果 $\Delta<0$，则 ③ 表示一个椭圆或一个圆. ③ 表示一个圆的充要条件是 $m^2=l^2$ 和 $n(l+m)=0$ 成立. 由于 $l+m=AB$ 不能为零，因而表示一个圆的充要条件就是 $n=0$ 和 $l=m$ 成立，即 P 是 AB 的中点.

如果 $\Delta=0$，则 ③ 右边的项也为零，③ 可化为

$$\frac{l+m}{m}(mx-ny)^2=0$$

它等价于 $y=(m/n)x$,故 P 沿着一直线移动.

$\Delta=0$ 或 $lm=n^2$ 的几何意义是 P 位于以 AB 为直径的一个半圆上(注意:n 是 l 和 m 的比例中项).当 $l=m=n$ 时,P 成为给定正方形的中心,其轨迹是直线 $y=x$ 的一部分,这正是本届竞赛 A－1 题已得之结论.

如果 $\Delta\neq 0$,即如果 $lm\neq n^2$,则参数式 ① 是非退化的(即 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 不同时为零),所以当 θ 由 0 变化到 $\pi/2$ 时,点 P 沿其椭圆轨线光滑移动.

如果 $\Delta=0$,则如前述,P 在一个以 AB 为直径的半圆上.这个圆的另一半将通过原点 O,因此,当 θ 由 0 变化到 $\pi/2$ 时,半圆上的点 P 先离开原点方向移动,直至 PO 成为这个动圆的直径,然后再移动回来.要从分析上看出这一点,只须注意到 x 是 θ 的函数,回移仅当 x 有一临界值时才能发生.但 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta=0$ 必须 $\tan\theta=n/l$,这意指 PB 垂直于 y 轴,所以 PO 为动圆的一条直径.

B－2　对于给定抛物线族

$$y=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a$$

(1) 求顶点的轨迹.

(2) 求包络.

(3) 画出包络和该族两个典型曲线的略图.

解　(1) 把给定方程化为标准形式

$$y+\frac{35}{16}a=\frac{a^3}{3}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2$$

由此得出具有代表性的顶点是

$$\left(-\frac{3}{4a},-\frac{35}{16}a\right)$$

如果 $a=0$,则给定曲线为一直线,不是抛物线,所以它无顶点.显然,给定族中所有抛物线的顶点都在双曲线 $xy=105/64$ 上.反之,双曲线上的每一个点都是给定族中一条唯一的抛物线的顶点,因为若 (x_0,y_0) 在双曲线上,则从 $x_0=-3/4a$,$y_0=-35a/16$ 可以唯一地解出 a 的值.

(2) 令

$$f(x,y,a)=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a-y$$

则
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,y,a)=(ax+2)(ax-1)$$

为了找出曲线族的包络,我们应由 $\partial f/\partial a=0$ 和 $f=0$ 中消去 a.

由于 $\partial f/\partial a$ 的两个因子等于零时将有 $ax=1$ 或 $ax=-2$,故得

$$xy=\frac{(ax)^3}{3}+\frac{(ax)^2}{2}-2ax=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2=\frac{-7}{6}$$

或

$$=\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+4=\frac{10}{3}$$

容易证明,对应于参数 a 的抛物线与双曲线 $xy=-7/6$ 相切于点 $\left(\frac{1}{a},\frac{-7a}{6}\right)$, 又与双曲线 $xy=10/3$ 相切于点 $\left(-\frac{2}{a},-\frac{5}{3}a\right)$.

因此,所求之包络是两双曲线的并.

(3) 作图,如图 1 所示.

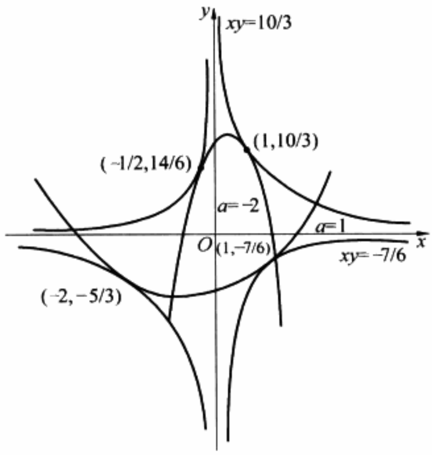


图 1

> B-3 给定
>
> $$x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$$
>
> 其中 φ 和 ψ 是下列偏微分程的解
>
> $$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=1 \qquad ①$$
>
> 假定 x 和 v 为自变量,试证 ① 可以变换为
>
> $$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad ②$$
>
> 并概要说明通过对 ② 积分怎样获得 ① 之解. ① 还有另外什么解?

解 由题意显然可知:对每个 x 和 v 必存在唯一的 u 和 y,使得 $x=\varphi(u,v)$ 和 $y=\psi(u,v)$,也就是必有函数 α 和 β 使得 $u=\alpha(x,v)$ 和 $y=\beta(x,v)$. 我们先假定这些函数都具连续的一阶偏

导数，然后再更仔细地来讨论可微性假定.

为减少记号混淆，我们令 $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ 分别表示 φ 和 ψ 对其第一个和第二个自变量的偏导数. 利用这种记号，方程 ① 可以表为

$$\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1=1$$

当 x 和 v 取作自变量时，令

$$\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial u}{\partial x}\text{和}\frac{\partial u}{\partial v}$$

表示 y 和 u 的偏导数，则有

$$\varphi_1\frac{\partial u}{\partial v}+\varphi_2=0 \quad ③$$

$$\varphi_1\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad ④$$

$$\psi_1\frac{\partial u}{\partial v}+\psi_2=\frac{\partial y}{\partial v} \quad ⑤$$

$$\psi_1\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x} \quad ⑥$$

由 ⑤，③ 及 ① 得

$$\varphi_1\frac{\partial y}{\partial v}=\psi_1\varphi_1\frac{\partial u}{\partial v}+\psi_1\varphi_1=-\psi_2\varphi_2+\varphi_1\psi_2=1$$

两边同乘以 $\partial u/\partial x$，并引用 ④ 则得

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

这即为所要求的方程 ②，现设

$$y=\int^{v}f(x,\eta)\mathrm{d}\eta+g(x),u=\int^{x}f(\xi,v)\mathrm{d}\xi+h(v)$$

其中 f,g 和 h 均是连续函数，则显然有

$$\frac{\partial y}{\partial v}=f(x,v)=\frac{\partial u}{\partial x}$$

而且我们得出 ② 的一个范围广泛的解类.

假设

$$y=\alpha(x,v) \quad ⑦$$

$$u=\beta(x,v) \quad ⑧$$

给出 ② 的一个解，即 $\alpha_2=\beta_1$；并且假设 β_1 永不为零，则由 ⑧ 能解出 x 为 u 和 v 的函数，比方说 $x=\varphi(u,v)$，将这个结果再代入 ⑦，又能把 y 表为 u 和 v 的函数，比方说 $y=\psi(u,v)$. 于是，把 u 和 v 看做自变量，就有

$$\beta_1\frac{\partial x}{\partial u}=1 \quad ⑨$$

$$\beta_1\frac{\partial x}{\partial v}+\beta_2=0 \quad ⑩$$

$$\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} \qquad ⑪$$

$$\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \alpha_2 = \frac{\partial y}{\partial v} \qquad ⑫$$

由 ⑨ 及 ⑪ 知 $\alpha_1 = \beta_1 \frac{\partial y}{\partial u}$,所以

$$\beta_1\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial y}{\partial v} - \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial v} = \alpha_2 \qquad ⑬$$

因为已设 $\alpha_2 = \beta_1$ 及 β_1 永不为零,故可得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

这即是①.因此,由满足 β_1 不等于零的 ② 之解可以得出 ① 之解.

在 x 和 v 为独立变量的假设下,确立了 ① 和 ② 的等价性.根据隐函数定理,这相当于(局部地)假设 φ_1(原来函数 φ 之偏导数)不等于零.如果 φ_1 在一点 (u_0,v_0) 等于零,则由 ① 显然 φ_2 在 (u_0,v_0) 不等于零,又由连续性假设,φ_2 在 (u_0,v_0) 邻近也不等于零.因此,我们能局部地解出 v 为 x 和 u 的函数,而且在互换 u 与 v 的位置后,论证仍如前面所述那样进行.这样就得到 ① 的所有其他的局部解.再考察一个极端情形,设 φ_1 处处等于零,那么 $x = \varphi(v)$ 与 u 无关.于是 ① 成为 $\varphi'\psi_1 = -1$,由于 φ' 只依赖于 v,这个方程可以关于 u 积分,故得

$$\varphi'\psi = -u + k(v)$$

因而对任何有非零导数的函数 φ 和任何函数 k 均有

$$x = \varphi(v)$$

$$y = (-u + k(v))/\varphi'(v) \qquad ⑭$$

方程 ⑭ 给出了 ① 的一个解,它不属于以前已得出的解类.这种解正是所要求的 ① 的另外的解.

讨论与说明 虽然许多论证对于 C^1 类函数有效,但我们最先仍假定只考虑 C^∞ 类函数,而且只局部地考虑问题的解.

根据这些假定,在任一个满足 $\varphi_1 \neq 0$ 的点邻近,由最初的方程 $x = \varphi(u,v)$ 能把 u 解出并局部地确定为 x 和 v 的函数,从而把 u 表为 x 和 v 的一个 C^∞ 函数.u 一经表为 x 和 v 的 C^∞ 函数,代入 $y = \psi(u,v)$ 就能把 y 也表为 x 和 v 的一个 C^∞ 函数.② 的求导因而可以毫无困难地进行.这许多论证都只要求 φ 为 C^1 函数.

在求解 ② 时,我们现在要求 f,g 和 h 都属于 C^∞ 类.比方说 f 是定义在矩形开集 $I \times J$ 上的 C^∞ 函数,这里 I 和 J 均是 R 内的开区间.取 $a \in I$,$b \in J$,而且定义

$$y = \int_b^v f(x,\eta)\mathrm{d}\eta + g(x), u = \int_a^x f(\xi,v)\mathrm{d}\zeta + h(v)$$

则这些函数都是 ② 的 C^∞ 解;反之,② 的每一个具有矩形定义域

的 C^∞ 解都有这种形式.正是在于这一点,把函数限定到 C^∞ 类是重要的.对于 ② 的具有有限可微性的所有解类(比方说 C^1 类或 C^2 类),要显示它们的特征是不容易的.

B－4　一质点在一与距离 k 次方成反比的有心力作用下运动.如果质点的运行轨道为一圆(假设有心力均由圆周上的点出发),试求 k 的值.

解　采用极坐标,选取力心为极点,质点圆轨道的一条直径为极轴,则轨道方程为

$$r = A\cos\theta \tag{①}$$

式中 A 是圆的直径.

运行方程为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{m}f \tag{②}$$

$$r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{③}$$

式中 m 是质点质量,f 是中心力量值.因为 f 带有负号,故正的 f 表示一吸引力.

方程 ③ 乘以 r 之后,再积分就给出

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{④}$$

故质点的动量矩守恒.

两次微分 ①,并运用 ④,便得

$$\frac{dr}{dt} = -A\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Ah\sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Ah\cos\theta}{r^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{2Ah\sin\theta}{r^3}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{h^2}{r^3} - \frac{2A^2h^2\sin^2\theta}{r^5}$$

然后代入 ②,又得

$$-\frac{f}{m} = -\frac{h^2}{r^3} - \frac{2A^2h^2\sin^2\theta}{r^5} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = -\frac{2h^2}{r^5}(r^2 + A^2\sin^2\theta) = -\frac{2A^2h^2}{r^5}$$

所以有 $f = 2mA^2h^2r^{-5}$ 及 $k = 5$.

B－5 作出曲线

$$y=\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$$

的略图，并证明

$$\int_0^\infty\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$$

存在.

解 令

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$$

则 f 为一奇函数，它的图形是对称于原点的，所以我们只须考虑 x 的非负值.

显然

$$x\geqslant\frac{x}{1+x^6\sin^2x}\geqslant\frac{x}{1+x^6}$$

在点 $x=n\pi$（n 为整数），曲线与直线 $y=x$ 相切. 在点 $x=(n+1/2)\pi$，曲线与 $y=x/(1+x^6)$ 的图形相切.

因此，$f(x)$ 的图形在上曲线 $y=x$ 和下曲线 $y=x/(1+x^6)$ 之间振荡.

除了很接近 π 的整数倍那些值之外，对于大的 x 值 f 是很小的，即接近下曲线. 实际上，在 π 的整数倍处，图形的特点在于它具有又高又窄的尖峰（尖峰实际比图 1 上画出的窄得多. 例如，在离 2π 0.1 的范围以内，函数值 f 下降不到 0.02）.

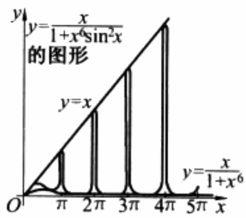


图 1

因为 f 在整个积分区域上为非负，故 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性问题等价于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是否有界，也就是等价于

$$\sum_{n=1}^\infty\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

是否收敛？

注意当 $|t|\leqslant\pi/2$ 时 $|\sin t|\geqslant(2/\pi)|t|$ 成立.

令 $k_n=2\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^3$，则对任何正整数 n 及对

$$(n-1/2)\pi\leqslant x\leqslant(n+1/2)\pi$$

有

$$1+x^6\sin^2x=1+x^6\sin^2(x-n\pi)\geqslant$$

$$1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^6\pi^6\frac{4}{\pi^2}(x-n\pi)^2=$$

$$1+k_n^2(x-n\pi)^2$$

故得
$$f(x) \leqslant \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+k_n^2(x-n\pi)^2}$$

所以
$$\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{1+k_n^2u^2} \leqslant$$
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+k_n^2u^2} =$$
$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi^2}{k_n^2} \leqslant \frac{A}{n^2}$$

对于某个与 n 无关的数 A 成立.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛,故可断言
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} f(x)\mathrm{d}x$$
亦收敛.

所以 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

第6届美国大学生数学竞赛

A-1 设 a,b,c 为实常数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 当 $|x|$ 时满足条件 $|f(x)|\leqslant 1$. 试证:当 $|x|\leqslant 1$ 时,成立 $|f'(x)|\leqslant 4$.

解 若 $a\neq 0$,则 $y=ax^2+bx+c$ 的图形为一抛物线,不失一般性,可设其开口向上,即设 $a>0$(稍后我们再讨论 $a=0$ 的直线情形).由于对称性,我们可以假定 b 非负,则抛物线的顶点属于左半平面,显然 $\max\limits_{|x|\leqslant 1}|f'(x)|$ 在 $x=1$ 时出现,而且这个最大值等于 $2a+b$.还需证明 $2a+b\leqslant 4$.

现在 $f(1)=a+b+c\leqslant 1, f(0)=c\geqslant -1$,所以 $a+b\leqslant 2$. 因为 a 和 b 两者都非负,故有 $a\leqslant 2$ 及 $2a+b\leqslant 4$.

$a=0$ 的情形:若 $a=0$,则

$$f'(x)=b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

所以
$$|f'(x)|\leqslant\frac{|f(1)|+|f(-1)|}{2}\leqslant 1$$

A-2 设 $a(x),b(x),c(x)$ 和 $d(x)$ 都是 x 的多项式.试证

$$\int_1^x a(x)c(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)d(x)\mathrm{d}x-\int_1^x a(x)d(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)c(x)\mathrm{d}x$$

可被 $(x-1)^4$ 除尽.

解 由于 a,b,c,d 都是多项式,则所考察的积分式也是一个多项式,设为 $F(x)$.为明确起见,我们把积分变量换写为 t,所以

$$F(x)=\int_1^x ac\mathrm{d}t\cdot\int_1^x bd\mathrm{d}t-\int_1^x ad\mathrm{d}t\cdot\int_1^x bc\mathrm{d}t$$

显然 $F(1)=0$,由此知 $F(x)$ 可被 $(x-1)$ 除尽,而且

$$F'(x)=ac\int_1^x bd\mathrm{d}t+bd\int_1^x ac\mathrm{d}t-ad\int_1^x bc\mathrm{d}t-bc\int_1^x ad\mathrm{d}t$$

于是有 $F'(1)=0$.又

$$F''(x) = (ac)'\int_1^x bd\mathrm{d}t + (bd)'\int_1^x ac\mathrm{d}t - (ad)'\int_1^x bc\mathrm{d}t - (bc)'\int_1^x ad\mathrm{d}t + acbd + bdac - adbc - bcad$$

于是又有 $F''(1) = 0$.最后

$$F'''(x) = (ac)''\int_1^x bd\mathrm{d}t + (bd)''\int_1^x ac\mathrm{d}t - (ad)''\int_1^x bc\mathrm{d}t - (bc)''\int_1^x ad\mathrm{d}t + (ac)'bd + (bd)'ac - (ad)'bc - (bc)'ad$$

可以看出,其中不包含积分的四项等式$((ac)\cdot(bd))' - ((ad)\cdot(bc))' = 0$,于是还有 $F'''(1) = 0$.因此 $F(x)$ 可被$(x-1)^4$除尽.

A - 3 位于边长为 b 的一正方形四角上的四个雷达站同时发现一枚飞弹,这时飞弹至四个雷达站的距离,按照环绕正方形次序,各为 R_1, R_2, R_3, R_4.证明:

$$R_1^2 + R_3^2 = R_2^2 + R_4^2$$

并证明此时飞弹离开地面的高度 h 由下列公式给出:

$$h^2 = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2) - \frac{1}{8b^2}(R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 - 2R_1^2R_3^2 - 2R_2^2R_4^2)$$

解 如图 1,设飞弹在正方形 $ABCD$ 的投影为P(可在形外),于是 $R_i^2 = R'^2_i + h^2(i = 1,2,3,4)$, $R_1^2 + R_3^2 = R_2^2 + R_4^2$,显然,下求 h.

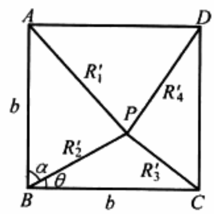


图 1

由 $\cos^2\alpha + \cos^2\theta = 1$ 及余弦定理,有

$$\left(\frac{R'^2_2 + b^2 - R'^2_1}{2R'_2 b}\right)^2 + \left(\frac{R'^2_2 + b^2 - R'^2_3}{2R'_2 b}\right)^2 = 1$$

由于 $R'^2_2 - R'^2_1 = R_2^2 - R_1^2$ 之类,故

$$(R_2^2 + b^2 - R_1^2)^2 + (R_2^2 + b^2 - R_3^2)^2 = 4(R_2^2 - h^2)b^2$$

解之得结论.

其次,单单由 $R'_1 \sim R'_4$ 已可知 b,但单知 $R_1 \sim R_4$ 则不可.

A - 4 设函数 $g(x)$ 对一切 x 值有连续的一阶导数$g'(x)$.又设对每一 x 下列条件成立:(1)$g(0) = 0$;(2) $|g'(x)| \leqslant |g(x)|$.试证:$g(x)$ 恒等于零.

解 我们首先把微分不等式变换为积分不等式.设 $x \geqslant 0$,利用(1),(2) 和 g' 的连续性,有

$$|g(x)| = \left|\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |g'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |g(t)|\mathrm{d}t$$

于是

$$|g(x)| \leqslant \int_0^x |g(t)|\mathrm{d}t, x \geqslant 0 \qquad ①$$

任取 $a \geqslant 0$. 因为 g 是可微的,所以 g 在任何有限区间上连续且有界. 这样就有一个数 K,使得

$$|g(x)| \leqslant K, 0 \leqslant x \leqslant a$$

如果 $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a$,有 $|g(t)| \leqslant K$,则 ① 给出

$$|g(x)| \leqslant \int_0^x K\mathrm{d}t = Kx, 0 \leqslant x \leqslant a$$

若当 $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a$ 时有 $|g(t)| \leqslant Kt$,则 ① 又给出

$$|g(x)| \leqslant \int_0^x Kt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Kx^2, 0 \leqslant x \leqslant a$$

如此继续,则可得出

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{n!}Kx^n, 0 \leqslant x \leqslant a \qquad ②$$

对一切正整数 n 均成立.

为要严格地证明 ②,我们采用数学归纳法,已经证明 ② 当 $n = 1$ 时成立. 假设 ② 当 $n = P$ 时成立,即设 $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a$ 时有 $|g(t)| \leqslant Kt^p/P!$. 把这一假设用于 ① 中,我们得到

$$|g(x)| \leqslant \int_0^x \frac{1}{P!}Kt^p\mathrm{d}t = \frac{1}{(P+1)!}Kx^{p+1}, 0 \leqslant x \leqslant a$$

所以 ② 当 $n = P + 1$ 时也成立. 故 ② 对一切 n 都成立.

在 ② 中令 $x = a$,且令 $n \to \infty$,则有

$$|g(a)| \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!}Ka^n = 0$$

故 $g(a) = 0$. 由于 a 是任意的,所以 g 在整个 $[0, +\infty)$ 上等于零.

考虑由等式 $h(x) = g(-x)$ 定义的函数 h. 因为 h 有连续的导数且满足(1) 和(2),根据已经证得的结论,h 在 $[0, +\infty)$ 上必等于零,所以 g 在 $(-\infty, 0]$ 上也等于零.

与上述论证稍有不同的一种证法是直接证明下面形式的不等式成立

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{n!}L|x|^n, -a \leqslant x \leqslant a$$

然后对正的和负的变元同时获得命题的证明.

A－5　求由坐标平面与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的一个切平面所界的最小体积.

解　给定椭球面在点(x_1,y_1,z_1)处的切平面的方程是

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1$$

它在x,y和z三轴上的截距分别为

$$\frac{a^2}{x_1},\frac{b^2}{y_1},\frac{c^2}{z_1}$$

由此切平面与三个坐标平面所围成立体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\left|\frac{a^2b^2c^2}{x_1y_1z_1}\right| \qquad ①$$

(如果$x_1y_1z_1=0$,则四个平面围成无界区域)因此

$$V^2=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}\frac{y_1^2}{b^2}\frac{z_1^2}{c^2}\right)^{-1} \qquad ②$$

但

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}\cdot\frac{y_1^2}{b^2}\cdot\frac{z_1^2}{c^2}\right)^{1/3}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)=\frac{1}{3}$$

等号仅当

$$\frac{x_1^2}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{1}{3} \qquad ③$$

时成立(算术平均值与几何平均值不等式).所以

$$V^2\geqslant\frac{27}{36}a^2b^2c^2,V\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{3}\,abc$$

等号仅当(x_1,y_1,z_1)为满足③的八个点中的一个时成立,八个点是$(\pm a/\sqrt{3},\pm b/\sqrt{3},\pm c/\sqrt{3})$.

当然,限制(x_1,y_1,z_1)为椭球面上一个点,先找出乘积$x_1y_1z_1$的最大值,因而求出V的最小值,这也是可行的.

A－6　一单位质量的质点在一直线上运动,它所受的作用力$f(v)$是其速度v的函数,但具体形式不知.观测质点的运动,发现在时间t内质点通过的路程x可用公式$x=at+bt^2+ct^3$来表示,式中a,b,c均为常数,数值由观测决定.试对进行实验的v值范围求出函数$f(v)$.

解 对于单位质量的一个质点，牛顿运动定律采取形式

$$F = 力 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

因为已给
$$x = at + bt^2 + ct^3$$
故有
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a + 2bt + 3ct^2$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2b + 6ct$$
现用 v 来表示为 F
$$F^2 = 4b^2 + 24bct + 36c^2t^2 =$$
$$4b^2 + 12c(2bt + 3ct^2) = 4b^2 + 12c(v - a)$$
所以
$$F = f(v) = \pm\sqrt{4b^2 - 12ac + 12cv}$$
根式前面的符号应取与 $2b + 6ct$ 相同的符号，因为当问题的假设被满足时，对于所研究的时间区间，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 不改变符号，否则 v 将两次取相同的值.

B－1 令 K 表示半径为1的一个圆盘的圆周，令 k 表示联结 K 上两点 a，b 且含于圆盘内部的一条圆弧. 假设 k 把圆盘分成面积相等的两部分. 试证：k 的长度大于2.

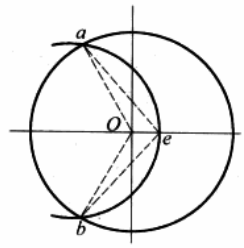


图 1

解 如果 K 上两点 a 和 b 正好是同一条直径的端点，那么就不存在从 a 至 b 且二等分圆盘的圆弧. 因此，我们可以这样选定坐标系，使得 K 为单位圆 $x^2 + y^2 = 1$，同时 a 和 b 分别具有坐标 (c,d) 和 $(c,-d)$，其中 $c < 0$.

由于弧 k 把圆盘分成面积相等的两部分，所以它与正 x 轴必相交于一点 e，如图1所示，如果 O 是原点，我们即得 k 的长度大于 $2ae > 2aO = 2$.

B－2 设 A 和 B 为一抛物线 P 上的两个变点，使得在 A 和 B 处的两条切线相互垂直. 证明：由 A，B 及 P 之顶点所成的三角形形心的轨迹为一抛物线 P_1. 对 P_1 再重复上述过程，又得一抛物线 P_2，余类推，设如此得到的抛物线序列为 $P, P_1, P_2, \cdots, P_n$. 如果 P 的方程是 $y^2 = mx$，试求 P_n 的方程.

解 因为 P 是方程为 $y^2 = mx$ 的一条抛物线，所以 P 的任一点的坐标都有形式 (mt^2, mt)，其中 t 为某个实数，反之，每一个这样的点都在 P 上. 与 P 在 (mt^2, mt) 处相切的直线的斜率为 $1/2t$.

设 A 和 B 是坐标分别为 (ms^2, ms) 和 (mt^2, mt) 的两点. 在 A 和 B 处 P 的两条切线相互垂直的充要条件是 $(1/2s)(1/2t) = -1$，

即是

$$st=-\frac{1}{4} \quad ①$$

点 A,点 B 和 P 之顶点(0,0) 所成三角形的形心是

$$\left(\frac{1}{3}m(s^2+t^2),\frac{1}{3}m(s+t)\right) \quad ②$$

如果垂直性条件 ① 被满足,则该形心必在一条新抛物线

$$y^2=\frac{1}{3}m\left(x-\frac{m}{6}\right) \quad ③$$

上.反之,抛物线 ③ 上的任一点 (x,y) 必有形式 ②,因为总能求解方程组

$$\frac{1}{3}m(s+t)=y$$

$$st=-\frac{1}{4}$$

给出实的 s 和 t.实际上,s 和 t 是 $s^2-(3y/m)s-\frac{1}{4}$ 的零点,而这个二次三项式又有正的判别式.因而题目中所考察的轨变是由 ③ 给出的整条抛物线 P_1.

于是,为要从 P 得到 P_1,只须把常数从 m 变为 $m/3$,并把顶点向右移动 $m/6$.所以,为要从 P_1 得到 P_2,又只须把常数从 $m/3$ 变为 $(m/3)/3$,并把顶点再向右移动 $(m/3)/6$,因此 P_2 的方程是

$$y^2=\frac{1}{9}m\left(x-\frac{1}{6}m-\frac{1}{18}m\right)$$

继续这种推论,可以看出 P_n 具有方程

$$y^2=\frac{1}{3^n}m\left(x-\frac{1}{6}m-\frac{1}{6\cdot 3}m-\frac{1}{6\cdot 3^2}m-\cdots-\frac{1}{6\cdot 3^{n-1}}m\right)=$$

$$\frac{1}{3^n}m\left(x-\frac{m}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right)$$

B - 3 有一半径为 R 的实心球,其密度 ρ 是离开球心的距离 r 的函数.如果球对球内任意一点的引力量值是 kr^2(k 为常数),试求出函数 $\rho=\rho(r)$.并且求出在球外面距球心为 r 远处的一点所受引力的量值.(对于一薄球壳体作如下假定:如果点 P 在壳体里面,则设壳体对 P 的引力值为零;如果 P 在壳体外面,则设引力值为 m/r^2,其中 m 是壳体的质量,r 是 P 到球心的距离)

解 设 P 是距离球心为 r 的一点.我们把实心球看做许多薄同心球壳体的一个并集.对 P 的引力是各个壳体的引力之和.所有这些引力都作用在同一个方向,所以可把它们的量值简单相加.

距离球心为 s,厚度为 Δs 的壳体体积近似地等于 $4\pi s^2\Delta s$,质量近似等于 $4\pi\rho(s)s^2\Delta s$,所以当 $r>s$ 时该壳体对 P 的引力值近似等于

$$\frac{4\pi\rho(s)s^2\Delta s}{r^2}$$

当 $r<s$ 时引力值为零.因此对 P 的总引力的精确值是

$$F=\begin{cases}\int_0^r \frac{4\pi\rho(s)s^2\mathrm{d}s}{r^2}, \text{若 } r\leqslant R\\ \int_0^R \frac{4\pi\rho(s)s^2\mathrm{d}s}{r^2}, \text{若 } r>R\end{cases} \qquad ①$$

已知当 $r\leqslant R$ 时 $F=kr^2$,故有

$$kr^2=\int_0^r \frac{4\pi\rho(s)s^2\mathrm{d}s}{r^2}, r\leqslant R$$

我们必须解出 ρ.两边乘以 r^2,然后关于 r 微分则得

$$4kr^3=4\pi\rho(r)r^2$$

所以

$$\rho(r)=\frac{k}{\pi}r$$

即为所要求的 ρ 之表示式.

把 ρ 代入 ①,就有

$$F=\frac{4\pi}{r^2}\int_0^R \frac{ks}{\pi}s^2\mathrm{d}s=\frac{kR^4}{r^2}, r>R$$

B－4 对每一个正整数 n,令

$$p_n=(1+1/n)^n, P_n=(1+1/n)^{n+1}, h_n=\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$$

证明:$h_1<h_2<\cdots<h_n<\cdots$.

解 容易得出

$$h_n=2(n+1)^{n+1}n^{-n}(2n+1)^{-1}$$

考虑由下式定义的函数 g

$$g(x)=\ln 2+(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-\ln(2x+1)$$

则当 $0<x<+\infty$ 时有

$$g'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{2}{2x+1}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{4}{(2x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}<0$$

因此 g' 在$(0,+\infty)$上单调减少.由于

$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x+1}=0$$

又知 g' 在$(0,\infty)$上为正.因而 g 在$(0,\infty)$上单调增加,所以 n 为正整数时 $h_n=\exp g(n)$ 是一严格增序列.

B－5　证明：大于$(\sqrt{3}+1)^{2n}$的下一个整数能被2^{n+1}除尽.

解　证明本题以及许多类似问题的关键是知道大于$(1+\sqrt{3})^{2n}$的下一个整数是$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$.我们先证明这一点，事实上，对每个正整数$n$，都有整数$A_n$和$B_n$，使得成立

$$(1+\sqrt{3})^{2n}=A_n+B_n\sqrt{3}$$

及

$$(1-\sqrt{3})^{2n}=A_n-B_n\sqrt{3}$$

因而$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=2A_n$也必是一个整数.由于$|1-\sqrt{3}|<1$，故$0<(1-\sqrt{3})^{2n}<1$.所以$2A_n$确是大于$(1+\sqrt{3})^{2n}$的下一个整数.

于是问题变为证明$2A_n$能被2^{n+1}除尽，或A_n能被2^n除尽.

我们用归纳法证明对所有的n，A_n和B_n二者都能被2^n除尽.因为$A_1=4$和$B_1=2$，故命题当$n=1$时成立.假设命题当$n=k$时成立，则有

$$A_{k+1}+B_{k+1}\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2(A_k+B_k\sqrt{3})=$$
$$(4A_k+6B_k)+(2A_k+4B_k)\sqrt{3}$$

所以

$$A_{k+1}=2(2A_k+3B_k),B_{k+1}=2(A_k+2B_k)$$

由归纳假设显然A_{k+1}和B_{k+1}二者都能被2^{k+1}除尽，命题当$n=k+1$时也成立，故命题对任意正整数n均成立.本题获证.

B－6　一质点在一圆心为O的圆上运动.已知它在一点P从静止开始，到达另一点Q又静止下来，中间再无其他静止点.试证：质点的加速度矢量在P与Q之间的任何一点均不为零，而且在P与Q之间的某一点R，加速度矢量必沿半径RO的方向.

解　设圆之半径为r.如果把圆心选为卡氏坐标系的原点，则质点的坐标为$(r\cos\theta,r\sin\theta)$，其中$\theta$是时间$t$的函数.微分两次之后，可以看出加速度矢量是

$$r\frac{d\omega}{dt}(-\sin\theta,\cos\theta)+r\omega^2(-\cos\theta,-\sin\theta)\qquad①$$

其中$\omega=d\theta/dt$为角速度.由于$(-\sin\theta,\cos\theta)$和$(-\cos\theta,-\sin\theta)$为切线方向和内法线方向的正交单位矢量，故看出①之两项分别是加速度的切向分量和法向分量，因为$\omega\neq0$，所以加速度矢量决不为零.因为开始和末了都有$\omega=0$，由罗尔定理必存在一中间时刻，使得$d\omega/dt=0$.又因为$r\omega^2>0$，所以此时加速度矢量沿半径指向圆心.

第7届美国大学生数学竞赛

A－1 设数列$\{a_n\}$满足条件

$$(2-a_n)a_{n+1}=1,n\geqslant 1$$

试证:当$n\to\infty$时$\lim a_n$存在且等于1.

解 在分析形如$a_{n+1}=f(a_n)$的递推式时,常常先用图示法.即在同一个坐标系中先作出f的图形和直线$y=x$(本题中$f(x)=1/(2-x)$).然后从直线上一点(a_1,a_1)出发向上或向下移动到图形上一点(a_1,a_2).然后又水平地移回到直线上一点(a_2,a_2),然后再垂直地移动到(a_2,a_3),等等.依次联结这些点则形成一条折线.如果序列$\{a_n\}$收敛于极限L,则折线必收敛于(L,L);而且,若L是f的一个连续点,则$f(L)=L$.常有可能一看便明白序列的变化情形.例如对于本题,显然从任一点出发(只要不碰到f无定义的点2)的折线最后必到达$(1,1)$的左下方区域,而且要继续向着点$(1,1)$靠近.

下面来论证这个过程,先证明

$$x\leqslant\frac{1}{2-x}\qquad ①$$

对$x<2$成立.事实上,由

$$\frac{1}{2-x}-x=\frac{(1-x)^2}{2-x}$$

立即知①为真.又若$x\leqslant 1$,则$1/(2-x)\leqslant 1$.

设$1<a_1<3/2$.可断言对某个n,必有$a_n\geqslant\frac{3}{2}$.假若不然,由①可得$1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant\frac{3}{2}$,所以$\{a_n\}$是收敛的,比如收敛于$L$;则$1<L\leqslant\frac{3}{2}$,且$f(L)=L$;但这样的$L$并不存在.因此有$a_n\geqslant\frac{3}{2}$,从而$a_{n+2}\leqslant 1$.(注意:由于序列满足给定递推式,我们不必担心对某个k成立$a_k=2$的可能性)所以总有一个指标p使得$a_p\leqslant 1$,故有

$$a_p\leqslant a_{p+1}\leqslant a_{p+2}\leqslant\cdots\leqslant 1$$

因此,序列收敛于一数 M,且 $f(M)=M$.这即蕴涵 $M=1$.

A-2　设一实值连续函数对于所有实 x 和 y 满足函数方程

$$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$$

证明

$$f(x)=(f(1))^{x^2}$$

解　因为0^0无定义,所以满足已给函数方程的实值连续函数 $f(x)\equiv 0$ 并不满足关系式 $f(0)=(f(1))^0$,因而题目要稍加条件限制.

假定对某个 y_0,有 $f(y_0)\neq 0$.由于

$$f(x)f(y_0)=f(\sqrt{x^2+y_0^2})=f(-x)f(y_0)$$

故对一切 x 有$f(x)=f(-x)=f(|x|)$.现用归纳法证明对任意正整数 n 和任意实数x,成立

$$f(\sqrt{n}x)=(f(x))^n \quad ①$$

① 对 $n=1$ 显然为真,假设 ① 对 $n=k$ 为真,则有

$$f(\sqrt{k+1}x)=f(\sqrt{k+1}\,|x|)=f(\sqrt{(\sqrt{k}x)^2+x^2})=$$
$$f(\sqrt{k}x)f(x)=(f(x))^kf(x)=$$
$$(f(x))^{k+1}$$

所以 ① 对一切正整数都为真.

如果 p 和 q 为非零整数,则有

$$f(p)=f(|p|)=f(\sqrt{p^2}\cdot 1)=(f(1))^{p^2}$$

及

$$f(|p|)=f\left(\sqrt{q^2}\left|\frac{p}{q}\right|\right)=\left(f\left(\left|\frac{p}{q}\right|\right)\right)^{q^2}$$

由此二式即得

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^{q^2}=(f(1))^{p^2} \quad ②$$

如果 $f(1)>0$,则又得

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)=(f(1))^{p^2/q^2}$$

这就说明,要求证明的结论对 x 的一切有理值(或许除去 $x=0$)成立.根据连续性,结论必对 x 的一切值成立.

如果 $f(1)=0$,则对一切非零整数 p 和q,② 蕴涵 $f(p/q)=0$,所以$f(x)=0$对一切有理数x成立,因而对一切实数x亦成立.

最后证明不可能有$f(1)<0$.事实上,若p为偶数q为奇数,则方程 ② 蕴涵$f(p/q)>0$.因此$f(x)>0$对 x 的一个稠密集成立,所以 $f(x)\geqslant 0$ 对一切 x 成立;特别,有 $f(1)\geqslant 0$.

A－3 给定一平面图形(图 1)以及在该平面内但不在线段 $s_1, s_2, \cdots, s_6$ 上的任意两点 Q_1 和 Q_2. 证明:联结 Q_1 和 Q_2 且具有下述性质的折线 P 不存在:

(1) P 穿过每一 $s_i(i=1,2,\cdots,6)$ 恰有一次.

(2) P 不与它自身相交.

(3) P 不通过任一个顶点 V_1, V_2, V_3, V.

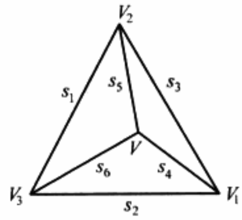


图 1

解 先给出一个引理:

引理 在由三角形确定的一个平面内有一条折线,如果它不经过三角形的顶点,它穿过三角形的每条边恰好一次,它的两个端点又都不在三角形的边界上,则此折线必有一个端点位于三角形内部.

假设存在如题所述的一条折线 P. P 穿过每个三角形 VV_1V_2, VV_2V_3 和 VV_3V_1 的每条边恰好一次,则由引理这些三角形的每一个内部都必有 P 的一个端点. 但这些三角形内部互不相交, P 又只有两个端点,所以这是不可能的.

引理的证明 设 T 为三角形,设以 Q_1 和 Q_2 为端点的折线 P 满足引理条件.

如果 Q_1 在 T 的内部,则引理已成立,因而假定 Q_1 在 T 的外部. 当我们沿着 P 从 Q_1 移向 Q_2 时,我们只遇到外点,直到我们穿过 T 的第一条边为止;然后我们只遇到内点,直到我们穿过 T 的第二条边为止. 此后我们又只遇到外点,直到我们穿过 T 的第三条边为止;而且从这里开始,包含端点 Q_2 在内的所有点全在 T 的内部. 所以 Q_2 是一个内点.

A－4 一门海岸炮在一固定垂直平面内能以0°和90°之间的任一仰角发射. 如果空气阻力忽略不计,炮弹离开炮口时的初速为一常数($=v_0$),试求出该平面内位于水平线上方能被炮弹击中的点的集合 H.

解 取炮口为坐标原点,垂直发射方向取为 y 轴正向,水平发射方向取为 x 轴正向,建立坐标系. 对于给定角 α 和给定初始条件,运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

导致解 $$x=v_0t\cos\alpha, y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

消去 t 得
$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}x^2\sec^2\alpha$$
对于一固定正数 x，上式可以写为
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2}(\tan\alpha - \frac{v_0^2}{gx})^2$$
由此易知，能够选取 α 以使点 (x, y) 被击中的充要条件是
$$y \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \qquad ①$$
为要击中点 $(0, y)$，则应铅直向上发炮，即取 $\alpha = 90°$；这时关于 y 的参数方程可以写成
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{g}{v_0}t - 1\right)^2$$
所以能够击到 $(0, y)$ 的充要条件显然是 $y \leqslant v_0^2/2g$. 因此，所要求的集合 H 由不等式 ① 及 $0 \leqslant x, 0 < y$ 定义.

A－5　设 a_1, b_1, c_1 均为正数，其和等于 1. 对 $n = 1, 2, \cdots$ 定义
$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n, b_{n+1} = b_n^2 + 2c_na_n, c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n$$
证明：当 $n \to \infty$ 时 a_n, b_n, c_n 的极限都存在，并且求出这些极限.

解　首先注意到
$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)^2$$
所以由归纳法知对一切 k 都有 $a_k + b_k + c_k = 1$，而且所有 a_n, b_n 和 c_n 也全为正数.

定义 $E_n = \max(a_n, b_n, c_n)$ 和 $F_n = \min(a_n, b_n, c_n)$. 若能证明下述事实
$$F_1 \leqslant F_2 \leqslant F_3 \leqslant \cdots \leqslant F_n \leqslant F_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant$$
$$E_{n+1} \leqslant E_n \leqslant \cdots \leqslant E_3 \leqslant E_2 \leqslant E_1 \qquad ①$$
$$\lim_{n\to\infty}(E_n - F_n) = 0 \qquad ②$$
则根据 ① 和 ② 即知 E_n 弱单调减小到某个极限 L，F_n 弱单调增大到同一极限 L. 因为 $F_n \leqslant a_n \leqslant E_n$，所以必蕴涵 $a_n \to L$. 同理蕴涵 $b_n \to L$ 和 $c_n \to L$. 由于 $a_n + b_n + c_n = 1$，故 $L = \frac{1}{3}$.

为证明 ①，假定对某个 n 值有 $a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$，则在方程组
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n^2 + b_nc_n + b_nc_n \\ b_{n+1} &= a_nc_n + b_n^2 + a_nc_n \\ c_{n+1} &= a_nb_n + a_nb_n + c_n^2 \end{aligned} \qquad ③$$

的每个方程中,其右边部分均小于或等于 $a_n^2 + a_nb_n + a_nc_n = a_n$,且又均大于或等于 $a_nc_n + b_nc_n + c_n^2 = c_n$.因此有 $E_{n+1} \leqslant E_n$ 和 $F_{n+1} \geqslant F_n$,故得证①.

为证明②,仍假定对某个 n 有 $a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$.令

$$a_n - b_n = \alpha \geqslant 0$$

$$b_n - c_n = \beta \geqslant 0$$

$$a_n - c_n = \delta = \alpha + \beta \geqslant 0$$

则

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = |a_n - b_n||a_n + b_n - 2c_n| = \alpha(\delta + \beta) = (\delta - \beta)(\delta + \beta) \leqslant \delta^2$$

$$|a_{n+1} - c_{n+1}| = |a_n - c_n||a_n + c_n - 2b_n| = \delta(\alpha - \beta) \leqslant \delta(\alpha + \beta) = \delta^2$$

$$|c_{n+1} - b_{n+1}| = |b_n - c_n||2a_n - b_n - c_n| = \beta(\alpha + \delta) \leqslant (\delta - \alpha)(\delta + \alpha) \leqslant \delta^2$$

这组不等式表明对所有 n 成立

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leqslant (E_n - F_n)^2$$

所以对所以 n 成立

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leqslant (E_1 - F_1)^{2^n}$$

因为已给 $E_1 < 1$ 和 $F_1 > 0$,故 $E_1 - F_1 < 1$,从而得到②.本题证毕.

> A-6 一个3×3矩阵的行列式等于零,且其任一元素的余因子等于该元素的平方.(a_{ij} 的余因子是划去第 i 行和第 j 列后得到的行列式与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积)试证:矩阵中每个元素都为零.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 $n \times n(n > 1)$ 矩阵,设 $\boldsymbol{B}$ 是其余因子构成的矩阵的转置矩阵.通常称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.而且,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵为 $(\det \boldsymbol{A})^{n-2}\boldsymbol{A}$(对 $n = 3$ 的情形可直接验证).假定 $n > 2$,则蕴涵着:如果 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵,则 $\boldsymbol{B}$ 的秩至多是 $n - 2$;即 $\boldsymbol{B}$ 的所有 $(n-1) \times (n-1)$ 子行列式均为零.

对于本题,令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

则已知条件蕴涵

$$B=\begin{pmatrix}a^2 & d^2 & g^2\\ b^2 & e^2 & h^2\\ c^2 & f^2 & i^2\end{pmatrix}$$

我们来证明 $\boldsymbol{B}$ 的元素至少有一个为零.因为 $\boldsymbol{B}$ 的所有 2×2 子行列式均为零,所以特别有

$$a^2e^2-b^2d^2=0$$
$$b^2f^2-c^2e^2=0$$
$$c^2d^2-a^2f^2=0$$

由此得

$$ae=\pm bd$$
$$bf=\pm ce \qquad ①$$
$$cd=\pm af$$

如果这些方程中负号都正确,则把它们一起相乘就得出 $abcdef=-abcdef$,故可断言 a,b,c,d,e,f 中必有一个为零,所以 B 有一个零元素.另一方面,如果①的至少一个方程中正号正确,则 A 的一个 2×2 子行列式为零,所以 $\boldsymbol{B}$ 仍有一个零元素.

任一秩为 0 或 1 的矩阵,如果它至少有一个零元素,则它必有一整行或一整列零元素.事实上,若有零元素的一列不全为零,则此列生成列空间,其他每一列都是它的一个倍数,所以必定出现一整行零元素.故知 $\boldsymbol{B}$ 有一整行元素为零,或有一整列元素为零.相应地,$\boldsymbol{A}$ 也有一整行元素为零,或有一整列元素为零.于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有其他元素的余因子均为零,这就说明 $\boldsymbol{B}$ 的所有其他元素必均为零.所以 $\boldsymbol{A}=0$,得所欲证.

B－1　设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$,且对 $x\geqslant1$,有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

试证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,且极限值小于 $1+\pi/4$.

解　因为 f' 处处为正,故 f 严格递增,从而

$$f(t)>f(1)=1,t>1$$

所以

$$f'(t)=\frac{1}{t^2+f^2(t)}<\frac{1}{t^2+1},t>1 \qquad ①$$

于是

$$f(x)=1+\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t<$$
$$1+\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=1+\frac{\pi}{4}$$

由于 f 递增且有界,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且至多为 $1+\pi/4$.再由

① 便得到严格的不等式

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 + \int_1^{\infty} f'(t)\mathrm{d}t < 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

B - 2 设 $f(x)$ 是一定义在闭区间 $[0,1]$ 内的可微函数,满足

$$|f'(x)| \leqslant M, 0 < x < 1$$

试证

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

解 令

$$E_k = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right), k = 1,2,\cdots,n$$

由于 f 是可微的,因而是连续的,所以由积分中值定理知必存在一数 η_k,使得

$$\frac{k-1}{n} < \eta_k < \frac{k}{n}$$

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}f(\eta_k)$$

由微分中值定理又知必存在一数 ξ_k,使得

$$\eta_k < \xi_k < (k/n)$$

$$f(\eta_k) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\eta_k - \frac{k}{n}\right)f'(\xi_k)$$

于是

$$|E_k| = \frac{1}{n}\left|f(\eta_k) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\eta_k - \frac{k}{n}\right| |f'(\xi_k)| \leqslant \frac{1}{n^2}M$$

因此

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} E_k\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

B - 3 设 x,y 为平面内点的笛卡儿坐标. I 表示线段 $1 \leqslant x \leqslant 3, y = 1$. 对于 I 上的每一点 P,在联结原点与 P 的线段上取一点 P^*,使得距离 PP^* 等于 1/100. 当 P 沿 I 运动时,对应点 P^* 沿某一曲线 C^* 运动. 设 $l(I)$ 和 $l(C^*)$ 分别是 l 和 C^* 的长度. 问 $l(I)$ 和 $l(C^*)$ 哪一个较大?证明你的结论.

解 引用极坐标,则已给线段 $1 \leqslant x \leqslant 3, y = 1$ 在直线 $r_1 = \csc\theta$ 上,且曲线 C^* 的方程为 $r_2 = \csc\theta - h$,其中 $h = 1/100$. 于是所考察的弧长由下式给出

$$l(I) = \int_{\arctan 1/3}^{\arctan 1} \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$l(C^*) = \int_{\arctan 1/3}^{\arctan 1} \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

显然有 $\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}r_2/\mathrm{d}\theta$ 和 $r_2 < r_1$，所以 $l(C^*) < l(I)$.

B－4 设 $P(z) = z^2 + az + b$ 是一具有复系数 a, b 的复变量 z 的二次多项式. 又设对满足 $|z| = 1$ 的每一个 z 均有 $|P(z)| = 1$. 试证：$a = b = 0$.

解 已给 $P(z) = z^2 + az + b$. 令 $a = p + \mathrm{i}q, b = r + \mathrm{i}s$，其中 p, q, r, s 均为实数. 可以得出

$$|P(1)| = |P(-1)| = |P(\mathrm{i})| = |P(-\mathrm{i})| = 1$$

及

$$|P(1)|^2 = |1 + p + \mathrm{i}q + r + \mathrm{i}s|^2 = 1 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2p + 2r + 2pr + 2qs$$

$$|P(-1)|^2 = |1 - p - \mathrm{i}q + r + \mathrm{i}s|^2 = 1 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2p + 2r - 2pr - 2qs$$

$$|P(\mathrm{i})|^2 = |-1 + \mathrm{i}p - q + r + \mathrm{i}s|^2 = 1 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2q - 2r - 2qr + 2ps$$

$$|P(-\mathrm{i})|^2 = |-1 - \mathrm{i}p + q + r + \mathrm{i}s|^2 = 1 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2q - 2r + 2qr - 2ps$$

把这些方程相加，得

$$4 = 4 + 4(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$$

由此得 $p = q = r = s = 0$，所以 $a = b = 0$.

注意，利用一个互异的单位根集合，同样可以得到证明. 如果 ξ 是一个 n 次本原单位根，$n > 2$，则

$$n = \sum_{k=1}^{n} |P(\xi^k)|^2 = n(1 + |a|^2 + |b|^2)$$

于是得出 $a = b = 0$. 利用一个积分来代替和数也可以得到证明. 因为对所有实的 θ，有

$$1 = |P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + b)(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \overline{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \overline{b}) = \overline{b}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + (\overline{a} + a\overline{b})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 + |a|^2 + |b|^2 + (a + \overline{a}b)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + b\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$$

如果在 $[0, 2\pi]$ 上积分这个等式，则有

$$2\pi = 2\pi(1 + |a|^2 + |b|^2)$$

于是依旧得出 $a = b = 0$.

B－5　设 a,b,c,d 为不同整数,使得
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$
有一个整数根 r.证明
$$4r=a+b+c+d$$

解　因为 r 是一根,故
$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=4$$
又因为 a,b,c,d 是不同的整数,故 $r-a,r-b,r-c,r-d$ 也是不同的整数,且其乘积等于4.但乘积为4的四个不同整数的集合只有一个,即$\{1,-1,2,-2\}$,因而
$$(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)=1-1+2-2=0$$
所以
$$4r=a+b+c+d$$

B－6　OX,OY,OZ 是互相垂直的直线,C 是 OZ 上一定点,U 和 V 分别是 OX 上和 OY 上的两变点.一点 P 使得 PU,PV,PC 相互垂直,试求点 P 的轨迹.

解法1　取 OX,OY,OZ 为坐标轴,令 $U=(u,0,0)$,$V=(0,v,0)$,$C=(0,0,c)$.设 $P(x,y,z)$ 是轨迹上的一点,则$(x-u,y,z)$,$(x,y-v,z)$ 和$(x,y,z-c)$ 必是互相垂直的矢量,所以
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=xu+yv\\x^2+y^2+z^2&=xu+zc\\x^2+y^2+z^2&=yv+zc\end{aligned}\qquad ①$$
相加后面两个方程,再减去第一个方程,得
$$x^2+y^2+z^2=2zc\qquad ②$$
所以 P 在以 C 为球心,以 $|CO|$ 为半径的球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ 上.注意若 $c=0$,即 $C=0$,则 P 必是 O.但这时 PC 已不是一直线,所以没有轨迹.因此假定 $c\neq 0$.

由 ① 又看出 $xu=yv=zc$,所以,若 $z\neq 0$,则 x 与 y 都不为0.若 $z=0$,则由 ② 知 $x=y=0$.

反之,如果 $P=(x,y,z)$ 是球面 ② 上满足 $xy\neq 0$ 的任意一点,则 $z\neq 0$,且
$$u=zc/x,v=zc/y$$
给出 ① 的一个解,所以矢量 PU,PV 和 PC 两两垂直;如果 $P=O$,则对任取的非零的 u 与 v,PU,PV 和 PC 都两两垂直.因此,所求的轨迹为一去掉两个大圆但包含点 O 的球面.

解法2 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边之半这个定理可以给出本题一个初等的综合证明.如图1所示,设 M 是 UV 的中点.如果 P 在轨迹上,则 CP 垂直于平面 PUV,且 $\angle UPV$ 为一直角.因为 PM 是 $\triangle PUV$ 的一条中线,OM 是 $\triangle OUV$ 的一条中线,根据上面所引述的结果,有 $PM=\frac{1}{2}UV=OM$.直角三角形 CPM 和 COM 有一条公共的斜边 CM,又有一对全等的直角边,所以这两个三角形全等.从而 $CP=CO$,故 P 在以 C 为球心,CO 为半径的球面上,PU 和 PV 是该球面的切线.

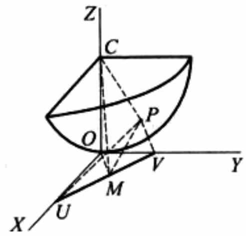


图1

反之,设 P 是球面上的任意一点,并设在 P 处的切平面与 OX 和 OY 分别相交于 U 和 V.因为 $\overline{PM}$ 和 $\overline{MO}$ 都是从球面外一点 M 所引球面之切线,所以 $\overline{PM}=\overline{MO}$.但 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{UV}$,故 $\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{UV}$.由所引述的平面几何定理之逆定理,便知 $\angle UPV$ 为一直角.由于 PU 和 PV 都在球面的切平面内,显然 $\angle CPV$ 和 $\angle CPU$ 也都为直角.

第8届美国大学生数学竞赛

A－1　设 z 为一复数，满足 $|z|=1$. 问 $|z^3-z+2|$ 的最大值是多少？

解　令 $f(z)=z^3-z+2$. 不妨先求 $|f(z)|^2$ 的最大值. 如果 $|z|=1$，则 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 $y^2=1-x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}|f(z)|^2=&|(x+\mathrm{i}y)^3-(x+\mathrm{i}y)+2|^2=\\&|x^3-3x(1-x^2)-x+2+\\&\mathrm{i}y(3x^2-(1-x^2)-1)|^2=\\&(4x^3-4x+2)^2+(1-x^2)(4x^2-2)^2=\\&16x^3-4x^2-16x+8=L(x)\end{aligned}$$

因此要求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}L(x)$，这个最大值必在一个临界点达到，或是在一个端点处达到. 解方程 $L'(x)=48x^2-8x-16=0$ 得临界点为 $x=-\frac{1}{2},\frac{2}{3}$. 由于

$$L(-1)=4,L\left(-\frac{1}{2}\right)=13,L\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27},L(1)=4$$

故知 L 的最大值为13，最大点是 $x=-\frac{1}{2}$. 所以当 $\mathrm{Re}\,z=-\frac{1}{2}$，即当 $z=(-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ 时，$|f(z)|$ 在单位圆上取得最大值为 $\sqrt{13}$.

A－2　相切的两个球面有一公共的切锥面. 这三个曲面把空间分成许多部分，只有一个"环形"部分由所有三个曲面围成. 假设两个球面的半径分别是 r 和 R，试求"环形"部分的体积.（答案要求表为 r 和 R 的有理函数）

解法1　设 α 为锥面角，两球面的位置如截痕图（图1）所示，球心在 O_1 和 O_2，坐标系原点在切点 O.

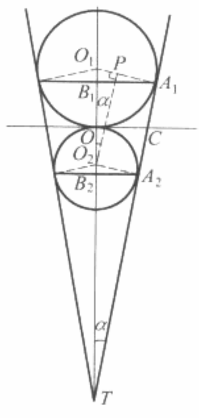


图1

较大圆的方程是

$$x^2+y^2+2Rx=0$$

较小圆的方程是

$$x^2+y^2-2rx=0$$

由图可知 $\sin\alpha = \dfrac{O_1P}{O_1O_2} = \dfrac{R-r}{R+r}$

从而 $\cos^2\alpha = 4Rr/(R+r)^2$

我们来计算由面积 $A_1A_2B_2B_1$ 绕 x 轴旋转所产生的平截头圆锥体的体积 V_1.因为

$$\text{较大锥体的体积} = \frac{1}{3}\pi A_1B_1^2 \cdot B_1T = \frac{1}{3}\pi R^2\cos^2\alpha \cdot R\cot\alpha\cos\alpha = \frac{16\pi}{3}R^3\frac{r^2R^2}{(R-r)(R+r)^3}$$

$$\text{较小锥体的体积} = \frac{16\pi}{3}r^3\frac{r^2R^2}{(R-r)(R+r)^3}$$

故它们的差为

$$V_1 = \frac{16\pi}{3}\cdot\frac{r^2R^2}{(R+r)^3}\cdot(R^2+Rr+r^2)$$

设 V_2 和 V_3 分别是含于平截头圆锥体内的较大球截形和较小球截形的体积,则有

$$V_2 = \pi\int_{R(\sin\alpha-1)}^{0}(-x^2-2Rx)\mathrm{d}x = \pi\left[-\frac{x^3}{3}-Rx^2\right]_{R(\sin\alpha-1)}^{0} = \frac{4\pi R^3r^2}{3(R+r)^3}(3R+r)$$

这里利用了

$$R(\sin\alpha-1) = -2Rr/(R+r)$$

同样有

$$V_3 = \pi\int_0^{r(1+\sin\alpha)}(-x^2+2rx)\mathrm{d}x = \pi\left[-\frac{x^3}{3}+rx^2\right]_0^{r(1+\sin\alpha)} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^2r^3}{(R+r)^3}(R+3r)$$

于是,要求的体积由下式给出

$$V_1-V_2-V_3 = \frac{4\pi}{3}\frac{R^2r^2}{(R+r)^3}\times(4(R^2+Rr+r^2)-3R^2-Rr-3r^2-Rr) = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^2r^2}{R+r}$$

解法 2 根据卡瓦利里(Cavalieri)原理可以给出本题一个巧妙的几何解法.

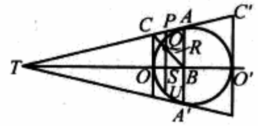


图 2

考虑图 2,设图形绕 BT 轴旋转.由 $\overline{AC}$,$\overline{CO}$ 和圆弧 $\widehat{AO}$ 围成的区域 Δ 所生成的立体是一个小于一球截形的平截头圆锥体.我们来证明它的体积与三角形区域 BOC 所生成的锥体体积是相等的.

如图 2,考虑在 B 和 C 之间垂直于 BT 的任一条直线,它与 $\overline{AC}$

交于 P,与 $\overset{\frown}{AO}$ 交于 Q 等.线段 $\overline{PQ}$ 在旋转时生成一个环形区域,其面积为

$$\pi(PS^2 - QS^2) = \pi(PS + QS)(PS - QS) = \pi PU \cdot PQ = \pi(AP)^2$$

由相似性,知 $$\frac{AP}{AC} = \frac{BS}{BO} = \frac{RS}{CO}$$

因为圆之切线 AC 和 OC 相等,故有 $AP = RS$.于是环形区域的面积又为 $\pi(RS)^2$,这正是由 $\overline{RS}$ 所生成的圆形区域的面积.所以,根据卡瓦利里原理,由 Δ 所生成的立体体积与三角形区域 BOC 所生成的锥体体积是相等的.

对于由 $\overline{AC'}$,$\overline{C'O'}$ 和圆弧 $\overset{\frown}{AO'}$,围成的曲线区域 Δ' 所生成的立体,以及由三角形区域 $BO'C'$ 所生成的锥体,上述论证同样适用.

注意:如果 $R = r$,上述论证即变成下述定理的一个经典证明:一个半球及其外切圆柱所界的区域的体积等于这个圆柱体积的三分之一.因此,半球的体积等于这个圆柱体积的三分之二.

现在回到原来的问题(参看图 2),所要求的体积 V 是两个锥体的体积之和,这两个锥体具有由 OC 生成的公共底面,高线分别为 OB_1 和 OB_2,所以 $V = \frac{1}{3}\pi OC^2 \cdot B_1B_2$.由于 O_1C 和 O_2C 二等分互补的角 A_1CO 和 OCA_2,故 $\angle O_1CO_2$ 为一直角.因而有 $OC^2 = O_1O \cdot OO_2 = Rr$ 及 $B_1B_2 = O_1O_2\cos^2\alpha = 4Rr/(R + r)$,所以

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^2r^2}{R + r}$$

A - 3 设 $\{a_n\}$ 是一极限为 0 的递减的正数序列,使得对一切 n 有

$$b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$$

试证 $$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1$$

证明 因为 b_n 都是 a_n 的二次差分,故令 $c_n = a_n - a_{n+1}$ 是方便的,于是

$$c_n - c_{n+1} = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = b_n$$

由于 a_n 递减地趋于零,故对一切 n 有 $c_n \geqslant 0$,且 $c_n \to 0$.

对 $k \geqslant m$,我们有 $\sum_{i=m}^{k} b_i = c_m - c_{k+1}$,所以

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = c_m = a_m - a_{m+1}$$

类似地，有
$$\sum_{m=1}^{k}(a_m - a_{m+1}) = a_1 - a_{k+1}$$
所以
$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_m - a_{m+1}) = a_1$$
于是
$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=m}^{\infty}b_i\Big) = a_1$$

所有的项 b_i 都是非负的，当非负项求和时，改变项的位置不会影响和数的值. 对于每个下标 n，b_n 项在上述二重和数中正好出现 n 次，且在每一和数 $\sum\limits_{i=m}^{\infty}b_i(m = 1,2,\cdots,n)$ 中只出现一次，所以有
$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=m}^{\infty}b_i\Big) = a_1$$

A－4 设 D 是半径为 r 的一个圆所围成的平面区域. 设 (x,y) 是 D 的一点，并考虑以 (x,y) 为圆心 δ 为半径的一个圆. 用 $l(x,y)$ 表示此圆在 D 外边的那段弧的长度. 试求
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 取已知圆圆心为原点，先把积分变换为极坐标系下的积分. 若点 (x,y) 的极坐标为 (ρ,θ)，则 $l(x,y) = L(\rho)$，这里
$$L(\rho) = 0, 0 \leqslant \rho \leqslant r - \delta$$
而且，把余弦定律用于 $\triangle OPQ$(图 1) 又知
$$L(\rho) = 2\delta\varphi = 2\delta\arccos\Big(\frac{r^2 - \rho^2 - \delta^2}{2\rho\delta}\Big),\quad r - \delta \leqslant \rho \leqslant r$$

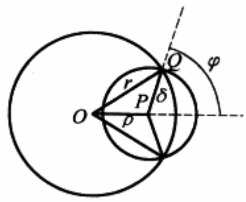


图 1

因此，我们必须求出
$$A = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r L(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$$
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_{r-\delta}^r 2\delta\rho\arccos\Big(\frac{r^2 - \rho^2 - \delta^2}{2\rho\delta}\Big)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$$
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{4\pi}{\delta}\int_{r-\delta}^r \rho\arccos\Big(\frac{r^2 - \rho^2 - \delta^2}{2\rho\delta}\Big)\mathrm{d}\rho$$
作代换 $\rho = r - \delta u$，则得
$$A = \lim_{\delta\to 0}4\pi\int_0^1(r - \delta u)\arccos\Big(\frac{2ur - \delta(1 + u^2)}{2(r - \delta u)}\Big)\mathrm{d}u$$
因为当 $u \in [0,1]$ 和 $\delta \in [0,\frac{1}{2}r]$ 时，被积函数是 u 和 δ 的一个连续函数，且积分区域是有界的，所以能够断言极限 A 存在，而且
$$A = 4\pi\int_0^1\lim_{\delta\to 0}(r - \delta u)\arccos\Big(\frac{2ur - \delta(1 + u^2)}{2(r - \delta u)}\Big)\mathrm{d}u =$$

$$4\pi\int_0^1 r\arccos u\mathrm{d}u$$

利用分部积分法,就得

$$A = 4\pi r[u\arccos u]_0^1 + 4\pi r\int_0^1 \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$0 + 4\pi r[-\sqrt{1-u^2}]_0^1 = 4\pi r$$

A - 5 设 $x_1,\cdots,x_n$ 表示 n 次单位根,计算

$$\prod (x_i - x_j)^2, i < j$$

解 因为

$$t^n - 1 = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n) \quad ①$$

可见

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^{n-1} \quad ②$$

微分 ① 便有

$$nt^{n-1} = \sum_{i=1}^{\infty}(t - x_1)\cdots(t - x_{i-1})(t - x_{i+1})\cdots(t - x_n)$$

对 $t = x_1,x_2,\cdots,x_n$ 求值,则得

$$nx_1^{n-1} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_{n-1})(x_1 - x_n)$$

$$nx_2^{n-1} = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_{n-1})(x_2 - x_n)$$

$$nx_3^{n-1} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_3 - x_{n-1})(x_3 - x_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$nx_n^{n-1} = (x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\cdots(x_n - x_{n-1})$$

将这些方程相乘即得

$$n^n(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1} = \prod_{i<j}(-(x_i - x_j)^2) =$$

$$(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$$

再应用 ② 就求出

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 = n^n(-1)^{(n-1)^2}(-1)^{-n(n-1)/2} =$$

$$(-1)^{(n-1)(n-2)/2}n^n$$

A－6 (1) 一个力作用在一闭平面曲线的元素 ds 上.这个力的量值为 $r^{-1}ds$,其中 r 是在所考察的点的曲率半径;这个力的方向垂直于曲线,且指向曲线的凸侧.证明:作用在曲线所有元素上的这个力系保持平衡.

(2) 证明

$$x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

解 (1) 题目可更明确地解释如下:设 C 是一长为 L 的闭平面曲线,通过其弧长 s 用 $x=x(s)$ 和 $y=y(s)$ 表示,这里 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是周期为 L 的 C^2 类周期函数.令 $\dot x,\dot y,\ddot x,\ddot y$ 分别表示

$$\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2}$$

今考虑沿曲线定义的一个力系 F,其中 $F_x=(\dot x\ddot y-\dot y\ddot x)\dot y$,$F_y=-(\dot x\ddot y-\dot y\ddot x)\dot x$.证明这个力系处于平衡状态.

注意 在 (x,y) 处的曲率由 $\dot x\ddot y-\dot y\ddot x$ 给出,选取 F_x 和 F_y 的符号应使 F 指向 C 之凸侧.

平衡条件是

$$\int_0^L F_x ds=\int_0^L F_y ds=0 \qquad ①$$

和

$$\int_0^L xF_y ds-\int_0^L yF_x ds=0 \qquad ②$$

这里 ① 意指在任何方向的合力必须等于零,② 意指对于原点的合力矩必须等于零.

注意到 $\dot x^2+\dot y^2=1$,由此得 $\dot x\ddot x+\dot y\ddot y=0$.于是有

$$\int_0^L F_x ds=-\int_0^L(-\dot x\dot y\ddot y+\ddot x\dot y^2)ds=-\int_0^L(\ddot x\dot x^2+\ddot x\dot y^2)ds=$$

$$-\int_0^L\ddot x(\dot x^2+\dot y^2)ds=-\int_0^L\ddot x ds=-\dot x\Big|_0^L=0$$

同样有 $\int_0^L F_y ds=0$,因而条件 ① 是满足的.又有

$$\int_0^L xF_y ds-\int_0^L yF_x ds=-\int_0^L x\dot x(\dot x\ddot y-\dot y\ddot x)ds-\int_0^L y\dot y(\dot x\ddot y-\dot y\ddot x)ds=$$

$$-\int_0^L(x\ddot y\dot x^2+x\ddot y\dot y^2-y\ddot x\dot x^2-y\ddot x\dot y^2)ds=$$

$$-\int_0^L[x\ddot y(\dot x^2+\dot y^2)-y\ddot x(\dot x^2+\dot y^2)]ds=$$

$$-\int_0^L(x\ddot y-y\ddot x)ds=-(x\dot y-y\dot x)\Big|_0^L=0$$

因而条件 ② 也是满足的,所以力系 F 保持平衡.

(2) 令

$$f(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots$$

则 $$f'(x)=1+x\left(2x+\frac{2}{3}\cdot 4x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6x^5+\cdots\right)=$$

$$1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^6+\cdots\right)=$$

$$1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf(x))=1+xf(x)+x^2f'(x)$$

所以 $f'(x)$ 满足微分方程

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x) \qquad ①$$

与初始条件

$$f(0)=0 \qquad ②$$

注 当 $|x|<1$ 时，f 的级数是收敛的，因此所有形式计算都合理.

在区间 $(-1,1)$ 上 ① 是一个一阶线性非奇异微分方程，所以它有满足 ② 之唯一解.

因为 $(\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$ 满足 ① 与 ②，故得

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

> B－1 设 $f(x)$ 为一有根 x_1,x_2 和 x_3 的三次多项式，又设 $f(2x)$ 能被 $f'(x)$ 除尽. 试计算 $x_1:x_2:x_3$.

解 令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. 因为 $f(2x)$ 能被 $f'(x)$ 除尽，故对某个 q 和 p 有

$$8x^3+4ax^2+2bx+c=(3x^2+2ax+b)(px+q)$$

比较系数得出

$$3p=8,2ap+3q=4a$$
$$bp+2aq=2b,qb=c$$

由此得到

$$p=8/3,q=-4a/9,b=4a^2/3,c=-16a^3/27$$

所以 $$f(x)=x^3+ax^2+\frac{4}{3}a^2x-\frac{16}{27}a^3.$$

令若 $a=0$，那么 $f(x)=0$ 的所有根都为零，它们的比是不确定的，因而假定 $a\neq 0$，令 $w=3x/a$，并且考察

$$F(w)=27f(x)=27f\left(\frac{aw}{3}\right)=a^3(w^3+3w^2+12w-16)=$$

$$a^3(w-1)(w^2+4w+16)$$

$F(w)=0$ 的根是 $1,-2\pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. 而 $f(x)=0$ 的根与 $F(w)=0$ 的根有相同的比,故有

$$x_1:x_2:x_3=1:(-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}):(-2-2\sqrt{3}\mathrm{i})$$

B－2　一动圆运动时总是与一通常直角坐标系的所有三个坐标面保持切触.试求圆心的轨迹.

解　当 θ 变化时, $a\cos\theta+b\sin\theta$ 的最大值和最小值分别是 $\sqrt{a^2+b^2}$ 和 $-\sqrt{a^2+b^2}$. 因此,为要使零是函数 $a\cos\theta+b\sin\theta+c$ 的一个极值,其充要条件是 $c^2=a^2+b^2$.

设动圆 C 的半径为 r,圆心为 (x_1,x_2,x_3). 又设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是互相正交的单位矢量,且 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 C 之平面. 则 C 由如下形式的点组成

$$r\cos\theta\boldsymbol{v}+r\sin\theta\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}\qquad①$$

其中 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$. 因为 C 与每一个坐标平面都相切,故每一个函数

$$rv_i\cos\theta+rw_i\sin\theta+x_i\qquad②$$

对某个 θ 值都为零,而对其他 θ 值则只取正值或只取负值. 根据第一段所述的结果,必有

$$x_i^2=r^2v_i^2+r^2w_i^2\qquad③$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 为单位矢量,所以

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+r^2(w_1^2+w_2^2+w_3^2)=2r^2$$

故 $\boldsymbol{x}$ 在球心为原点,半径为 $r\sqrt{2}$ 的球面 S 上. 而且,由于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是互相正交的单位矢量,故

$$u_i^2+v_i^2+w_i^2=1,i=1,2,3$$

因而 ③ 可以写为

$$x_i^2=r^2(1-u_i^2)\qquad④$$

由此得出

$$x_i^2\leqslant r^2,i=1,2,3\qquad⑤$$

反之,假设 (x_1,x_2,x_3) 是满足 ⑤ 的 S 的任一点. 则我们能对 u_1,u_2,u_3 求解 ④,所得 $\boldsymbol{u}=\{u_1,u_2,u_3\}$ 将是一单位矢量. 然后可以选择 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$,使得 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 为互相正交的单位矢量,而且方程 ③ 将成立. 所以函数 ② 将以零为一极值,所以根据 ① 参数表出的圆将与每一个坐标平面相切.

综上所述,便知所求之轨迹为球面 S 在立方体 $|x_i|\leqslant r(i=1,2,3)$ 内的那部分球面.(如果位于一坐标平面内的圆不算作与该平面相切,则像 $(\pm r,\pm r,0)$ 这样的 12 个点必须被删除)

B－3 如果 n 为一正整数,试证

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$$

其中,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解 因为当 $x>0$ 时 $\sqrt{x}$ 有负的二阶导数,故其图形向下凹,且对一切 $x\geqslant 0$ 有

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}<\sqrt{x+\frac{1}{2}}$$

从而对一切 $x\geqslant 0$ 有 $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<\sqrt{4x+2}$,因此

$$[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}]\leqslant[\sqrt{4x+2}]$$

假若对某个正整数 n,有 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\neq[\sqrt{4n+2}]$,令 $p=[\sqrt{4n+2}]$,则

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<p\leqslant\sqrt{4n+2}$$

平方后得 $2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<p^2\leqslant 4n+2$

所以 $2\sqrt{n(n+1)}<p^2-2n-1\leqslant 2n+1$

再平方后又得

$$4n(n+1)<(p^2-2n-1)^2\leqslant 4n^2+4n+1$$

因为此不等式中外面两数是两个相继整数,而且中间的数也是一个整数,故有 $(p^2-2n-1)^2=(2n+1)^2$,所以 $p^2=4n+2$.但最后这一等式是不能成立的,因为一个整数的平方与 2 对模 4 不可能同余.此项矛盾证明对每一正整数 n 都有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$$

B－4 用 $\min(x,y)$ 表示 x 和 y 两个数中的较小者.问 λ 为何值时,方程

$$\int_0^1\min(x,y)f(y)\mathrm{d}y=\lambda f(x)$$

在 $(0,1)$ 内有不恒等于零的连续解?这些解是什么?

解 给定方程可以写为

$$\lambda f(x)=\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \quad ①$$

由此显然可知:如果 $\lambda\neq 0$,则 f 是可微的,所以有

$$\lambda f'(x)=xf(x)-xf(x)+\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \quad ②$$

因而 f' 又是可微的,所以又有

$$\lambda f''(x) = -f(x) \qquad ③$$

如果 $\lambda = 0$,则将导致方程 $0 = -f(x)$.因为我们只对不恒为零的函数有兴趣,故下面将假定 $\lambda \neq 0$.

③ 之通解是

$$f(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x$$

其中 $\mu = \lambda^{-1/2}, \lambda > 0$;或是

$$f(x) = A\cos hvx + B\sin hvx$$

其中 $v = (-\lambda)^{-1/2}, \lambda < 0$.

显然,由 ① 可得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$,所以不论 λ 是正数还是负数,均有 $A = 0$.由 ② 可得 $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 0$,这分别给出

$$B\mu\cos \mu = 0 \quad 或 \quad Bv\cos hv = 0$$

最后的方程仅当 $B = 0$ 时才能成立,因而 $f = 0$;故可断言当 $\lambda < 0$ 时 ① 没有非零解.

对于 $\lambda > 0$,只是在 $\cos \mu = 0$,即是 μ 为 $\pi/2$ 的奇倍数时才能有非平凡解.事实上,容易验证

$$f(x) = B\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}x \qquad ④$$

是一个解,此时

$$\lambda = \mu^{-2} = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$$

其中 k 为任一整数,B 为任意数.由于 k 的负值产生相同的解,故这里又仅需考虑 $k = 0,1,2,\cdots$.

> B-5　当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时,满足条件 $|a + bt + t^2| \leqslant 1$ 的数对 (a,b) 布满 (a,b) 平面内的某个区域.问这个区域的面积等于多少?

解　考察

$$f(t) = a + bt + t^2$$

这个函数恰有一个临界点 $t = -b/2$,临界值为 $a - b^2/4$.在区间 $[0,1]$ 上,f 只在端点处及在临界点处(若临界点在 $[0,1]$ 内,即若 $b \in [-2,0]$)才能有极值.所以当 $b \notin [-2,0]$ 时 f 的极值是

$$f(0) = a, f(1) = a + b + 1$$

当 $b \in [-2,0]$ 时极值集合是 $\{a, a+b+1, a-b^2/4\}$.所以对一切 $t \in [0,1]$ 成立 $|f(t)| \leqslant 1$ 的充要条件是

$$b \notin [-2,0],\ |a| \leqslant 1,\ |a+b+1| \leqslant 1$$

或　$b \in [-2,0],\ |a| \leqslant 1,\ |a+b+1| \leqslant 1,\ \left|a - \dfrac{b^2}{4}\right| \leqslant 1$

因此,所求区域如图 1 所示,其中从 A 到 B 的弧是抛物线 $a -$

$b^2/4=-1$ 的一部分.

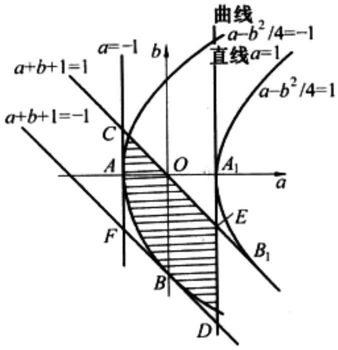


图 1

所求区域之面积可用多种方法求得.平行四边形 $CEDF$ 的面积显然等于4.我们必须减去 AFB 块的面积.因为 AF 和 FB 都与抛物线相切,故 AFB 块的面积是 $\triangle AFB$ 的面积的 $\frac{1}{3}$(阿基米得法则).但 $\triangle AFB$ 之底 AF 的长为1,高线的长也为1,故其面积为 $\frac{1}{2}$,因而曲线块 AFB 的面积为 $\frac{1}{6}$.于是 $CEDBA$ 的面积为 $4-\frac{1}{6}=\frac{23}{6}$.

B-6 (1) 设 V_1,V_2,V_3 和 V 是立方体的四个顶点,V_1,V_2 和 V_3 均是 V 的邻接点,即线段 VV_1,VV_2 和 VV_3 均是立方体的棱.把立方体正交投影到一个平面,并采用复数来标记该平面上的点(z 平面,高斯平面).设 V 的射影为原点,V_1,V_2 和 V_3 的射影分别用复数 z_1,z_2 和 z_3 作标记.试证:$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

(2) 设 a 为一行列式,其中每一个对角线元素的绝对值均大于它所在行的其他元素的绝对值之和,即

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$$

试证:此行列式不等于零.(考察对应的齐次线性方程组)

解 (1) 取空间笛卡儿氏坐标 w,x,y,使得在给定的高斯平面内 x 轴为实轴,y 轴为虚轴,则作投影时每一点 (w,x,y) 被映到 (O,x,y).

假设 $(w_1,x_1,y_1),(w_2,x_2,y_2)$ 和 (w_3,x_3,y_3) 是空间内互相正交的单位向量.则矩阵

$$\begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

为一正交矩阵，因而它的列向量也是互相正交的单位向量，特别有

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$
$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$$

上述单位向量在高斯平面内的正交射影分别是复数 $x_1+\mathrm{i}y_1$，$x_2+\mathrm{i}y_2$ 和 $x_3+\mathrm{i}y_3$，且

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)^2+(x_2+\mathrm{i}y_2)^2+(x_3+\mathrm{i}y_3)^2=$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2+2\mathrm{i}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=0$$

假设给定立方体的边长为 a．因为顶点 V 映到原点，故它必具形式 $V=(b,0,0)$，且有互相正交的单位向量 (w_j,x_j,y_j)，使得

$$V_j=(b,0,0)+a(w_j,x_j,y_j),j=1,2,3$$

故 V_j 在高斯平面内的射影是

$$z_j=a(x_j+\mathrm{i}y_j)$$

并且成立 $$z_1^2+z_2^2+z_3^2=a^2((x_1+\mathrm{i}y_1)^2+(x_2+\mathrm{i}y_2)^2+(x_3+\mathrm{i}y_3)^2)=0$$

(2) 对应的线性方程组是

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,i=1,2,\cdots,n$$

假若系数矩阵的行列式为零，则方程组必存在一非平凡解 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$．设 m 是使 $|\bar{x}_m|$ 为最大(即 $|\bar{x}_m|\geqslant|\bar{x}_j|,j=1,2,\cdots,n$) 的一个下标．由于解是非平凡的，显然 $|\bar{x}_m|\neq 0$．考察上述方程组中的第 m 个方程，并写成形式

$$-a_{mm}\bar{x}_m=\sum_{j\neq m}a_{mj}\bar{x}_j$$

于是有

$$|a_{mm}||\bar{x}_m|\leqslant\sum_{j\neq m}|a_{mj}||\bar{x}_j|\leqslant\Big(\sum_{j\neq m}|a_{mj}|\Big)|\bar{x}_m|$$

所以得 $$|a_{mm}|\leqslant\sum_{j\neq m}|a_{mj}|$$

但这与已知条件相矛盾，故所设行列式不能为零．

第9届美国大学生数学竞赛

A－1 (1) 有通过三个点$(0,-a,0)$,$(a,0,-a)$与$(-a,a,0)$并分别平行x轴,y轴与z轴的三条直线,$a>0$.另有一条变动的直线,它与三条已知直线的每一条有一个公共点.求由变动直线形成的曲面方程.

(2) 哪些平面割曲面$xy+xz+yz=0$成:① 圆,② 抛物线.

解 (1) 设L_1,L_2,L_3分别为平行于x轴通过点$(0,-a,a)$,平行于y轴通过点$(a,0,-a)$,平行于z轴通过点$(-a,a,0)$的三条直线.设S为所求的轨迹.

令$P=(p,-a,a)$,$Q=(a,q,-a)$,$R=(-a,a,r)$分别为三个在L_1,L_2,L_3上的共线点.设$X=(x,y,z)$是在这条直线上的任意一个点,则向量PX,QX与RX成比例,即矩阵

$$\begin{bmatrix} x-p & y+a & z-a \\ x-a & y-q & z+a \\ x+a & y-a & z-r \end{bmatrix} \quad ①$$

的秩为1.特别是

$$(x-p)(y-a)=(x+a)(y+a)$$
$$(x-p)(z+a)=(x-a)(z-a) \quad ②$$

所以

$$(x+a)(y+a)(z+a)=(x-p)(y-a)(z+a)=(x-a)(y-a)(z-a) \quad ③$$

即

$$(x+a)(y+a)(z+a)=(x-a)(y-a)(z-a) \quad ④$$

等价于

$$xy+yz+zx+a^2=0 \quad ⑤$$

故S的每一个点(x,y,z)满足这个方程.

要完成这个命题证明,就要确定由⑤或等价于⑤的④所定义的曲面J的每一个点是否是轨迹S的一个点.

令M_1,M_2,M_3分别是通过$(0,a,-a)$平行于x轴,通过

$(-a,0,a)$平行于y轴,通过$(a,-a,0)$平行于z轴的直线.由⑤显然它们都在曲面J上.我们要证明删去M_1,M_2,M_3后J会等于S.

假设Y是M_1的一个点,则没有通过Y的直线交L_1,L_2,L_3.如果这样的直线存在,它就会在L_2与Y的平面π_2上,又在L_3与Y的平面π_3上.因为L_2与L_3不共面,这两个平面不相同.因$Y\in\pi_2\cap\pi_3$,所以这两个平面不平行,故$\pi_2\cap\pi_3$是一条直线,这条直线正好是M_1,但不交于L_1,因此$Y\notin S$.同样没有M_2与M_3上的点在S上.故$S\subseteq J-(M_1\cup M_2\cup M_3)$.

现在证明M_1平行于L_1并与L_2,L_3相交.对于这样一条直线,一定是通过L_2平行于L_1的平面与通过L_3平行于L_1的平面的交线.同样地,M_2是平行于L_2并与L_1及L_3相交的直线,M_3是平行于L_3并与L_1及L_2相交的直线.

设Z是L_1的一个点,但不在M_2或M_3上.令N是由Z与L_2及Z与L_3确定的两平面的交线.因为N与L_2共面,它或者与L_2相交或者与L_2平行.同样,N或者与L_3相交或者与L_3平行.但是N不同时与L_2及L_3平行,因为这些直线是偏斜的.因此①N与L_1及L_2相交,与L_3平行;或者②N与L_1及L_3相交,与L_2平行;或者③N与三条直线L_1,L_2,L_3都相交.

上面的①②分别导出$N=M_3$及$N=M_2$的结论.因为$Z\in N$但$Z\notin M_2$,所以这是不可能的.于是N与三条直线L_1,L_2,L_3相交,故$Z\in S$.这就证明了$J-(M_1\cup M_2\cup M_3)\subseteq S$,综上所述得$S=J-(M_1\cup M_2\cup M_3)$.

(2)已知曲面是包含三个坐标轴的二次锥面(图1).可以证明它是直圆锥.已知锥与平面$x+y+z=1$的交线c是一个圆,因为在c上

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=1-0=1$$

因此c是单位球面与平面$x+y+z=1$的交,所以这曲面是直圆锥,并且它的轴是直线$x=y=z$.

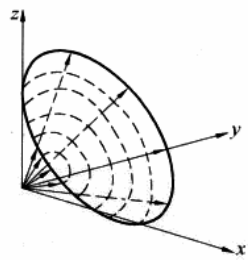


图1

当且仅当垂直于轴$x=y=z$且不通过原点的平面割锥成圆,这些平面的方程为

$$x+y+z=p,p\neq 0$$

至于平面割锥成抛物线,是当且仅当平面平行于但不包含锥的某个母线.一般说来,即平行但不等于锥的某个切平面.

在(x_0,y_0,z_0)处(不是原点)锥的切平面方程为

$$(z_0+y_0)x+(x_0+z_0)y+(x_0+y_0)z=0$$

设平面

$$ax+by+cz=d \qquad ⑥$$

割锥成抛物线,则 $d \neq 0$ 并且 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$,而且存在锥上一点 $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ 使得

$$(a,b,c) = \lambda(y_0 + z_0, x_0 + z_0, x_0 + y_0) \quad ⑦$$

由 ⑦ 的三个方程可解出 x_0,y_0,z_0

$$2\lambda(x_0,y_0,z_0) = (-a+b+c, a-b+c, a+b-c) \quad ⑧$$

因为 (x_0,y_0,z_0) 在锥上,则有

$$\begin{aligned}&(-a+b+c)(a-b+c)+(-a+b+c)(a+b-c)+\\&(a-b+c)(a+b-c)=\\&4\lambda^2(x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0)=0\end{aligned} \quad ⑨$$

化简后 a,b,c 必满足

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0 \quad ⑩$$

反之,设 a,b,c 是不全为零满足 ⑩ 的任何三个数,并且 $d \neq 0$. 取 $\lambda \neq 1/2$,由 ⑧ 确定的数 x_0,y_0,z_0 它们不全为零,并由 ⑨ 与 ⑩ 知 (x_0,y_0,z_0) 在已知锥上,因此平面 ⑥ 平行于但不等于在 (x_0,y_0,z_0) 的切平面,于是与锥交于一抛物线.

这就证明了,当且仅当 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $d \neq 0$,而且 ⑩ 成立时,平面 ⑥ 割锥成抛物线.

A－2 从相同的始点 O 作三个向量,各长 a,b 与 c. 设 E 是以 O 为顶点以已知向量为棱的平行六面体;而设 H 是以 O 为顶点以已知向量为高的平行六面体. 证明:E 与 H 的体积的乘积等于 $(abc)^2$. 推广这个定理到 n 维,并给出证明.

解 这里从一般情形着手. 令 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是一个 n 维空间的向量,称这些向量生成一个平行体 P,意味着它们线性无关. 并且

$$P = \{\sum \lambda_i \boldsymbol{v}_i \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}$$

平行体 P 的体积是 $|\det \boldsymbol{A}|$,这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵,它的行是 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 在某个笛卡儿坐标系的分量.

因为这些 v 线性无关,有线性函数 $f_1,\cdots,f_n$ 使得对所有的 i,j 有

$$f_j(v_i) = \delta_{ij}\|\boldsymbol{v}_i\|^2$$

这里 δ_{ij} 是克罗内克符号($d_{ij}=0$ 当 $i \neq j$; $d_{ii}=1$). 因为每一个线性泛函可以用一个内积实现,故存在向量 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n$ 使得对所有的 i,j 有

$$(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{w}_j) = \delta_{ij}\|\boldsymbol{v}_i\|^2$$

这些 w 线性无关,这是因为 $\sum \alpha_i \boldsymbol{w}_j = 0$ 时

$$(v_i, \sum \alpha_i w_j) = \alpha_i \| v_i \|^2 = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \qquad ①$$

有
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

因此,向量 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 生成一个平行体 Q.向量 v_i 是 Q 的由所有 w 中除 w_i 外生成的面上的高.因为它与面垂直,由①,w_i 在方向 v_i 上的投影的长为 $\| v_i \|$.

设 B 是 $n \times n$ 矩阵,它的行是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,则 Q 的体积 $= |\det B| = |\det B^{T}|$,这里 B^{T} 是 B 的转置.

方程①表明,AB^{T} 是对角线矩阵

$$\mathrm{diag}(\| v_1 \|^2, \| v_2 \|^2, \cdots, \| v_n \|^2)$$

因此 $(P$ 的体积$)\cdot(Q$ 的体积$) = |\det A|\cdot|\det B^{-1}| =$

$$|\det AB^{-1}| = \| v_1 \|^2 \| v_2 \|^2 \cdots \| v_n \|^2$$

三维的情形用平行六面体 E 与 H 代替 P 与 Q,因为 $\| v_1 \| = a, \| v_2 \| = b, \| v_3 \| = c$,由上面的公式得关于三维的结果.

A-3 假设复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 全非零,并且 $|a_r - a_s| > 1$,当 $r \neq s$.证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n^3)$$

收敛.

解 设 $S_k = \{n \mid k < |a_n| \leqslant k+1\}, k = 0,1,2,\cdots$,圆盘 $|z - a_n| \leqslant 1/2$ 由假设都不相交,并且对于 $n \in S_k$,这些圆盘全在圆环

$$\{z \mid k - 1/2 \leqslant |z| \leqslant k + 3/2\}$$

内(当 $k=0$ 是一个圆盘).设 $|S_k|$ 表示 S_k 的基数(势),则面积加起来得

$$|S_k| \cdot \frac{\pi}{4} \leqslant \pi\left((k+\frac{3}{2})^2 - (k-\frac{1}{2})^2\right) = 2\pi(2k+1)$$

于是对于 $k > 0$, $|S_k| \leqslant 8(2k+1)$.单独计算可证明 $|S_0| \leqslant 9$.

对于 $k \geqslant 1$,因为 $2k+1 \leqslant 3k$,则有

$$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leqslant \frac{|S_k|}{k^3} \leqslant \frac{8(2k+1)}{k^3} \leqslant \frac{24}{k^2}$$

因为 S_0 是有限的,$\sum_{n \in S_0} 1/|a_n|^3$ 是有限的,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^3} = \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leqslant \sum_{n \in S_0} \frac{1}{|a_n|^3} + \sum_{R=1}^{\infty} \frac{24}{k^2} < \infty$$

上式左边级数的各项全为正,可以重新排列.上式证明了原来的级数绝对收敛.

A-4 已知顶点为 A,B,C,D 的四面体内的一点 P,使得 $PA+PB+PC+PD$ 为最小.证明:两角 $\angle APB$ 与 $\angle CPD$ 相等,并且被同一条直线所平分.还有哪些其他成对的角相等?

解 考察以 A,B 为焦点的回转椭球 ε_1,它通过已知点 P. ε_1 是使得 $|AX|+|XB|=|AP|+|PB|$ 的所有点 X 的轨迹,并且在 ε_1 的内部的点 Y 满足 $|AY|+|YB|<|AP|+|PB|$.设 ε_2 是以 C 与 D 为焦点通过 P 的回转椭球.因为 P 使得距离 $|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$ 最小,椭球 ε_1 与 ε_2 没有公共内点.因此在点 P 处它们相切并且有一条公共的法线 l,它与线段 AB,CD 相交,由反射性,l 平分 $\angle APB$ 与 $\angle CPD$.

最后证明两角是相等的.分别考察射线 PA,PB,PC 与 PD 上的点 A_1,B_1,C_1,D_1,例如:

令 $|PA_1|+|PB_1|+|PC_1|+|PD_1|=1$.直线 l 交线段 A_1B_1 于它的中点 M,交线段 C_1D_1 于它的中点 N,所以 P 在新的四面体(图1)A_1,B_1,C_1,D_1 两对立棱的中点的连线上.同理证明 P 在 A_1C_1 与 B_1D_1 的中点 Q 与 R 的连线上,而 M,N,R,Q 是平行四边形的顶点,P 是它们的对角线的交点,因此 P 平分 MN,所以 $\triangle A_1PB_1$ 与 $\triangle C_1PD_1$ 全等,故 $\angle APB=\angle CPD'$.同样可证 $\angle APC=\angle BPC$,$\angle APD=\angle BPC$.

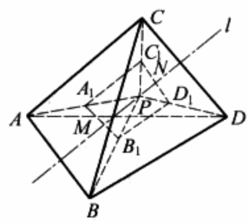


图 1

A-5 在复平面的每一个象限,方程

$$z^6+6z+10=0$$

有多少根?

解 令 $P(z)=z^6+6z+10$,$P(z)$ 关于实数 z 的最小值是 $P(-1)=5$,因此方程没有实根.因为 $\operatorname{Im}(P(\mathrm{i}y))=6y\neq 0$ 除非 $y=0$,又 $P(0)\neq 0$,故也不能有纯虚根.

根的和为零,所以不会所有的根全在右半平面,也不会所有的根全在左半平面.因为 P 有实系数,共轭根成对出现,所以在第一象限的根数与第四象限的相同.在第二象限的根数与第三象限的相同.因此有两种可能:

(1) 在第一象限与第四象限的每一个内有一个根,而在第二象限与第三象限的每一个内有两个根.

(2) 在第一象限与第四象限的每一个内有两个根,而在第二象限与第四象限的每一个内有一个根.

在(1),(2)的可能性之间过细地研究第一象限的根,再做出抉择.

假设 $z_1 = re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi/2$ 是 $z^6 + 6z + 10 = 0$ 在第一象限的根，则 $6z_1 + 10$ 也在第一象限并且辐角 $\arg(6z_1 + 10) < \arg z_1 = \theta$，因为 $z_1^6 = r^6 e^{6i\theta} = -(6z_1 + 10)$，$z_1^6$ 在第三象限.

同时因为 $0 < 6\theta < 3\pi$ 得 $\pi < 6\theta < (3/2)\pi$. 并且因此 $6\theta - \pi$ 是 $-z_1^6$ 的辐角，它在 0 与 $\pi/2$ 之间，所以 $6\theta - \pi = \arg(6z_1 + 10) < \theta$，得 $\theta < \pi/5$. 故在第一象限的任何一个根有辐角在 $(0, \pi/5)$ 内.

假设 z_1 与 z_2 是第一象限不同的根，则

$$0 = (P(z_1) - P(z_2))/(z_1 - z_2) = z_1^5 + z_1^4 z_2 + z_1^3 z_2^2 + z_1^2 z_2^3 + z_1 z_2^4 + z_2^5 + 6 \quad ①$$

因为 z_1 与 z_2 都有辐角在 $(0, \pi/5)$ 内，在 ① 的右边的每一项有辐角在 $[0, \pi]$ 内，于是这些项的和不能是零，矛盾. 所以在第一象限，方程不能有两个不同的根，结论 ① 成立.

A－6　对于每一个实的或复的 x，证明

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2\cos(2x/3^k)}{3} = \frac{\sin x}{x}$$

解　恒等式

$$\sin 3\theta - \sin \theta = 2\sin \frac{1}{2}(3\theta - \theta)\cos \frac{1}{2}(3\theta + \theta)$$

导出恒等式　$\sin 3\theta = \sin \theta(1 + 2\cos 2\theta)$

因此对于任何 x

$$\sin x = \sin(x/3)(1 + 2\cos(2x/3)) = \sin(x/9)(1 + 2\cos(2x/9)(1 + 2\cos(2x/3)))$$

经 n 次迭代之后得

$$\sin x = \sin(x/3^n)\prod_{k=1}^{\infty}(1 + 2\cos(2x/3^k)) \quad ①$$

对于 $x = 0$，题中关系式右边没有定义，但若把 $(\sin 0)/0$ 解释为 $1(= \lim\limits_{x\to 0} \sin x/x)$，则所要证的等式是正确的，因为在它的右边的无限乘积内每一个因子是 1.

若 $x \neq 0$，用 x 除 ①，重新排列后，得

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(x/3^n)}{x/3^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1 + 2\cos(2x/3^k)}{3}\right)$$

现在　$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/3^n)}{x/3^n} = 1$$

因此得　$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + 2\cos(2x/3^k)}{3} = \frac{\sin x}{x}$$

B－1 开区间(0,1)的每一个有理数 p/q(p,q 是互素的正整数)由长度为 $1/2q^2$ 中心在 p/q 的闭区间所覆盖.证明:$\sqrt{2}/2$ 不被上述的闭区间中的任何一个所覆盖.

解 问题可改述如下,若 p 及 q 为整数 $0<p<q$,则

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2} \qquad ①$$

是不能成立的.

设 p,q 是整数,$0<p<q$,则$(\sqrt{2}/2)+(p/q)<2$,所以如果①成立有

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}$$

得 $|q^2-2p^2|<1$.但是 q^2-2p^2 是整数,所以 $q^2-2p^2=0$.因为 $\sqrt{2}$ 是无理数,所以这是不可能的.显然对于整数 p,q 使得 $p\geqslant q>0$ 时,① 不能成立.

B－2 (1) 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\ln\ln n)}{\ln n}$$

发散.

(2) 假设 $p>0,a>0$ 并且 $ac-b^2>0$,证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(p+ax^2+2bxy+cy^2)^2}=\pi p^{-1}(ac-b^2)^{-1/2}$$

解 (1) 收敛级数不可能有这样一些数段,它们的和可以任意大,所以我们要证明已知级数有这样一些数段.

对于一个正整数 k 考虑 n 的集合 N_k,使得

$$2\pi k-(1/3)\pi\leqslant\ln\ln n\leqslant 2\pi k$$

设

$$T_k=\sum_{N_k}\frac{\cos(\ln\ln n)}{\ln n} \qquad ①$$

要证 $k\to\infty$ 时,$T_k\to\infty$.现在

$$N_k=\{n\mid\exp\exp(2\pi k-(1/3)\pi)\leqslant n\leqslant\exp\exp(2\pi k)\}$$

所以 N_k 内元素的个数 $|N_k|$ 满足

$$|N_k|\geqslant\exp\exp 2\pi k-\exp(\alpha\exp 2\pi k)-1$$

这里 $\alpha=\exp(-(1/3)\pi)$.在 ① 的和内的每一项最小是

$$\frac{\cos(-(1/3)\pi)}{\exp 2\pi k}=\frac{1}{2\exp 2\pi k}$$

故 $$T_k \geqslant (1/2x_k)(\exp(x_k)-\exp(\alpha x_k)-1)$$

这里 $x_k=\exp 2\pi k$.

由洛必达法则并利用 $\alpha<1$ 有

$$\lim_{x\to\infty}(1/x)(\exp x-\exp \alpha x)=\lim_{x\to\infty}(\exp x-\alpha\exp \alpha x)=\infty$$

因为 $k\to\infty$ 时 $x_k\to\infty$,因此 $k\to\infty$ 时 $T_k\to\infty$.

这就证明了给定的级数是发散的.

(2) 选择适当的 θ,将轴旋转 θ,由

$$x=u\cos\theta+v\sin\theta$$

$$y=-u\sin\theta+v\cos\theta \qquad ②$$

二项式 $ax^2+2bxy+Cy^2$ 可化为

$$Au^2+Cv^2 \qquad ③$$

在 ② 的条件下判别式 $ac-b^2$ 是一个不变量,$AC=ac-b^2$.因为原来的形式是正定的,也同样有 $A>0,C>0$,变换是保积的.于是问题变为求积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(p+Au^2+Cv^2)^2}$$

经过代换 $$u=\sqrt{p/A}\,s,v=\sqrt{p/C}\,t$$

积分化为

$$\frac{1}{p\sqrt{AC}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{(1+s^2+t^2)^2} \qquad ④$$

仅需证明在 ④ 中积分的值是 π,通过极坐标

$$s=r\cos\theta,t=r\sin\theta$$

得 $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2}=2\pi\int_0^{\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}=2\pi\left[\frac{-1}{2(1+r^2)}\right]_0^{\infty}=\pi$$

B-3 设 K 是一条闭的平面曲线,K 的任何两点之间的距离总小于1,证明:K 在一个半径为 $1/\sqrt{3}$ 的圆周内部.

解 我们将证明更加一般的结果,如果 K 是一个在平面内的闭有界集,使得 K 的任何两点之间的距离小于1,则 K 在半径为 $1/\sqrt{3}$ 的圆周内部.

如果 K 不到两点则结果是平凡的.所以假设 K 至少有两点,则有一个包含 K 的最小半径 r 的闭圆盘 D(在后面的引理给出证明).只要证明它的半径是 $r<1/\sqrt{3}$ 即可.因为此时 K 在与 D 同心而半径为 $1/\sqrt{3}$ 的圆周内部.

如图1,令 D 的中心为 O,C 是包围它的圆.首先证明 $C\cap K$

不会在 C 的一个开半圆上.假设不然,它在开半圆 S 上.令 T 是剩下的闭半圆,则 K 与 T 是不相交的紧致集.因此它们从一个到另一个有正的距离 δ.现在若 D 按从 O 对着 S 的中心的方向移动 $(1/2)\delta$,K 会完全进入 D 的内部.但是 D 若由一个较小的半径的同心圆盘代替,它也会包含 K,这是不可能的.

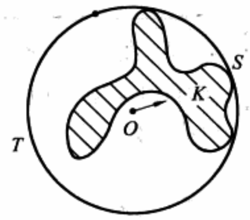


图 1

设 P 与 Q 是 $C\cap K$ 的点,它们尽可能地远离(从 $C\cap K$ 的紧致性知这样的点存在).若 P 与 Q 各在 C 的直径的相对两端点,则 $2r=|PQ|<1$,于是 $r<(1/2)<(1/\sqrt{3})$,得证.若 P 与 Q 不在直径的相对两端点,则由上文知 $C\cap K$ 不在劣弧 PQ 上,则可在优弧 PQ 上取第三个点 $R\in K$.

对于中心为 O 的圆上任何三点 P,Q,R 一定会有下面四个方程之一

$$\angle POQ+\angle QOR=\angle POR \quad ①$$

$$\angle QOP+\angle POR=\angle QOR \quad ②$$

$$\angle POR+\angle ROQ=\angle POQ \quad ③$$

$$\angle POQ+\angle QOR+\angle ROP=2\pi \quad ④$$

就上述情形来说,适当选择 P 与 Q 可以消去①与②,又因为③中 R 会在劣弧 PQ 上,这不可能,故④成立.结论是三个角中最大的至少是 $2\pi/3$.因此

$$|PQ|=2r\sin(1/2\cdot\angle POQ)\geqslant 2r\sin\pi/3=r\sqrt{3}$$

因为 $|PQ|<1$,则有 $r<1/\sqrt{3}$,得证.

引理 若 K 是一个平面内至少包含两个点的有界集(闭的或者不是),则存在一个包含 K 的最小半径的闭圆盘.

引理的证明 因为 K 有界,存在某些包含 K 的闭圆盘.又因为 K 至少包含两个点 P 与 Q,所以这些圆盘的半径不小于 $1/2|PQ|$.

设 r 是所有这些圆盘的最大下界.设 $D_1,D_2,D_3,\cdots$ 是包含 K 并分别以 $O_1,O_2,O_3,\cdots$ 为中心的闭圆盘序列,并选择 $r_n\to\gamma$.

因为$\{O_n\}$是在平面上的有界序列,由波尔察诺 - 魏尔斯特拉斯定理,有收敛的子序列,不妨设即$\{O_n\}$本身收敛比如说收敛于 O.

令 D 是绕 O 的半径为 r 的闭圆盘,要证 $K\subseteq D$.令 Z 是 K 的任一点,对于所有的 n,Z 是 D_n 的一个点,于是 $|O_nZ|\leqslant\gamma_n$.因此 $|OZ|=\lim|O_nZ|\leqslant\lim\gamma_n=r$,故 $Z\in D$.因此 $K\subseteq D$.显然没有比它更小的圆盘包含 K.引理得证.

B－4　证明：在展开式

$(1/4)(1+x-(1-6x+x^2)^{1/2}) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$

中的系数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是正整数.

解　设

$$y = y(x) = (1/4)(1+x-(1-6x+x^2)^{1/2})$$

对于 $(1-6x+x^2)^{1/2}$ 用上二项式定理，y 能展开成关于 x 的收敛的幂级数，只要 $|x^2|+|6x|<1$. 因为 $y(0)=0$，级数为

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad ①$$

现在

$$2y^2 - (1+x)y + x = 0 \quad ②$$

当②内 y 用幂级数代入，有

$$2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)^2 = (1+x)(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) - x$$

比较 x 的系数：知 $a_1 = 1$；当 $n > 1$

$$2(a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1) = a_n + a_{n-1}$$

得 $a_2 = 1$；并且对于 $n > 2$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2\sum_{i=2}^{n-2} a_ia_{n-i}$$

所以当 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是正整数时，a_n 也是正整数. 因为 a_1 与 a_2 是正整数，所以所有的系数 $\{a_i\}$ 都是正整数.

B－5　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是任意正数序列，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant e$$

解　要证对于无穷多个整数 n 有

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}$$

用间接法. 假设不真，则对于某个 k 及对于所有的 $n \geqslant k$

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{n+1}{n} \quad ①$$

得

$$\frac{a_n}{n} \geqslant \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}$$

所以

$$\frac{a_k}{k} \geqslant \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_k+1}{k+1} \geqslant \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \frac{a_{k+2}}{k+2} \geqslant \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \frac{a_1}{k+3} + \frac{a_{k+3}}{k+3}$$

归纳得对于 $p \geqslant k$ 有

$$\frac{a_k}{k} \geqslant a_1\left(\sum_{i=k+1}^{p}\frac{1}{i}\right)+\frac{ap}{p}$$

则
$$\sum_{i=k+1}^{p}(1/i) \leqslant a_n/ka_1$$

但调和级数是发散的,所以 $\sum_{i=k+1}^{p}(1/i)$ 无界.故对于所有的 $n > k$,关系 ① 不成立.因此一定有无穷多个的整数 n 使得

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}$$

则
$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

B-6 令 C 是一个有连续转动的切线的闭凸曲线,设 O 是 C 内的一点.对 C 上的每一点 P 定义 C 上的点 $T(P)$ 如下:在 P 作 C 的切线,从 O 作切线的垂线,$T(P)$ 是垂线与曲线 C 的交点.

从 C 上一点 P_0 开始,用公式

$$P_n = T(P_{n-1}),\quad n \geqslant 1$$

定义 P_n.证明:点列趋于一个极限,并且序列 P_n 的极限具有这些点的性质.(考虑下面的事实,T 是一个连续的变换,凸曲线在它的每一切线中的一侧,这不要证明)

解 "具有连续转动的切线"的意思是 C 是 C^1 类曲线.

令 $g(P)$ 是从 O 到一点 P 的距离,这函数除 O 外在整个平面上有定义且可微.因为 c 不通过 O,在 c 上 g 是可微的.在 P 处它有一个临界点当且仅当在 P 处 g 的梯度是在 P 垂直于 c(即线 $\overline{OP}$ 与在 P 处 c 的切线垂直).这就是条件 $T(P) = P$.

因为 T 是 c 映为自身的连续映象,T 的不动点的集 F 是闭的,并且 $c - F$ 对于 c 是一个开集,它的每一个分量是以 F 的两个元素为界的开弧.函数 g 在任何这样的弧上是严格单调的,因为在这里它没有临界点.

假设 P 不是 T 的一个不动点,考虑图 1 中 $\overline{PQ}$ 是曲线 c 在 P 的切线,$\overline{OQ}$ 与 $\overline{PQ}$ 垂直.因 $T(P) \neq P$,$P \neq Q$,故 $|OP| > |OQ|$.

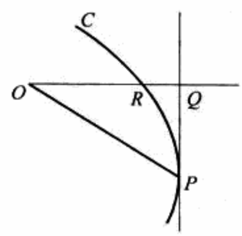


图 1

因为原点 O 与 c 的全部在切线 $\overline{PQ}$ 的同一侧,并且 $R = T(P)$ 是射线 $\overline{OQ}$ 上有 $|OQ| > |OR|$,因此 $g(T(P)) < g(P)$.而且,在 $\angle POQ$ 内部的那部分 c 上,没有 T 的不动点 S.因为这样的一个点 S 将在闭三角区域 POQ 内,而且在 S 处垂直于 OS 的垂线 l 将包含线段 OP 上内部的一点.这个点会在 c 的内部.但是若 $S = T(S)$,则 l 将在 S 切于 c,不会包含 c 内的一点.因此我们的结论是:c 的

开弧$\widehat{PR}$在$c-F$内.所以,或者$R=T(P)$像P一样在$c-F$的分量内,或者$T(P)$是那个分量的一个端点且$T(P)\in F$.(注意:c可以包含整个线段PQ,在此情况下$T(P)=Q,T(Q)=Q$)

现在假设P_0是已给的,对于$n\geqslant 1,P_n=T(P_{n-1})$,如果$P_0\in F$,则显然$P_0=P_1=\cdots$叙列收敛于$P_0$.如果$P_0\notin F$,令$A$与$B$是$c-F$的包含$P_0$在内的分量$D$的端点.选择端点的记号使得

$$g(A)<g(P_0)<g(B)$$

(因为g在D上是严格单调的,所以这是可能的).我们已经证明$g(P_1)<g(P_0)$,并且或者$P_1\in D$或者当$P_1=A,P_1$是D的端点,此时$P_1=A$.重复这种论述就会得到:或者当$P_0,P_1,P_2,\cdots$全在D内;或者对于某个$k,P_k=A$,从而所有的$n\geqslant k,P_n=A$.后者显然有$P_n\to A$.对前者,因为$g(P_0)>g(P_1)>g(P_2)>\cdots$,$P_0,P_1,P_2,\cdots$是在$D$内的一个单调叙列,故在$\overline{D}$内的某点$x$处收敛.

现在$T(x)=T(\lim\limits_{n\to\infty}P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}T(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{n+1}=X$.于是$X$是$T$的一个不动点,并且$X\in\overline{D}$,故$X=A$或$X=B$.但是$g(X)=\lim g(P_n)\leqslant g(P_0)<g(B)$,于是$X=A$.这就证明了在任何情形$P_n\to A$,即当$P_0\in c-F$,则$P_n$收敛于$c-F$的包含$P_0$的分量对$O$较近的端点.$\lim P_n$是$T$的不动点.

T的任何不动点Y是取$P_0=Y$的叙列的极限.

第10届美国大学生数学竞赛

A－1 比 a/b 为何值时，蚶线 $r = a - b\cos\theta$ 是凸曲线？$(a > b > 0)$.

解 在极坐标内，若 $r = f(\theta)$ 以 2π 为周期且恒正，则它的图形是一个环绕原点的简单闭曲线. 由于 $a > b > 0$，故本题正属于这种情形. 若 $r^2 + (r')^2 > 0$，则这样的曲线对于参数 θ 是非奇异的. 这论断对本题亦为真. 曲率为

$$\frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}} = K$$

(只要 f 是 C^2 类)

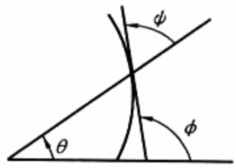


图 1

曲线是凸的当且仅当曲率处处非负(图 1)，即当且仅当 $r^2 + 2(r')^2 + rr'' \geqslant 0$. 对于 $r = a - b\cos\theta$ 有

$$r' = r''b\sin\theta = b\cos\theta$$

与
$$r^2 + 2(r')^2 - rr'' = a^2 + 2b^2 - 3ab\cos\theta$$

此式当且仅当 $a^2 + 2b^2 - 3ab \geqslant 0$ 时总是非负的(因为 a 与 b 是正的，当 $\theta = 0$ 时有最小值)，即 $(a - 2b)(a - b) \geqslant 0$. 由假设 $a - b > 0$ 故 $a \geqslant 2b$，所以当且仅当 $a \geqslant 2b$ 时蚶线是凸的.

A－2 判别下列级数的敛散性：

(1) $\dfrac{1}{\ln(2!)} + \dfrac{1}{\ln(3!)} + \dfrac{1}{\ln(4!)} + \cdots + \dfrac{1}{\ln(n!)} + \cdots$.

(2) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}} + \cdots + \dfrac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}} + \cdots$.

解 对于 $n \geqslant 2$ 有 $n^n > n!$，因此

$$n\ln n > \ln(n!)$$

与
$$1/\ln(n!) > 1/n\ln n$$

级数(1) 比级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 1/n\ln n$ 较优，因为

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\ln x - \ln\ln 2$$

的广义积分是发散的，得知(1) 发散.

级数(2) 的第 n 项分母是 $3^{1+(1/2)+\cdots+(1/n)}$，而 $1+(1/2)+\cdots+(1/n)\sim \ln n$. 故(2) 的第 n 项约为 $1/(3^{\ln n})=1/(n^{\ln 3})$. 当 $p>1$ 时 $\sum n^{-p}$ 收敛，又 $\ln 3>1$，得知(2) 收敛.

A－3　序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 由下列条件定义：

$$x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+(2n-1)x_n}{2n},n\geqslant 1$$

这里 a 与 b 是已知数，试用 a 与 b 表示 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　重新排列原递推关系

$$x_{n+1}-x_n=(-1/2n)(x_n-x_{n-1})$$

得
$$x_{n+1}-x_n=(-1/2)^n(1/n!)(x_1-x_0)=(-1/2)^n(1/n!)(b-a)$$

而
$$x_{n+1}=x_0+\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)=a+(b-a)\sum_{i=0}^{n}(1/2)^i(1/i!)$$

右边的和数是关于 $e^{-1/2}$ 的幂级数部分和，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)e^{-1/2}$$

A－4　(1) 有一个底面为三角形的直立棱柱，其彼此相邻的三个面(即两个侧面与一个底面) 的面积之和为给定值. 证明：这些面有相等面积并且彼此垂直时体积最大.

(2) 证明：

$$\frac{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots}=\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

解　(1) 如图 1，设底面三角形两边为 a 与 b，夹角为 θ. 直立棱柱体的高为 c. 若 L 为三个面的面积和

$$L=ac+bc+(1/2)ab\sin\theta$$

体积为
$$V=(1/2)ab\sin\theta$$

令 $X=ac,Y=bc,Z=(1/2)ab\sin\theta$ 分别为三个面的面积，则

$$V^2=(1/2)XYZ\sin\theta$$

这里 X,Y,Z 是三个正数，它们的和为 L. 对于正数有不等式

$$(XYZ)^{1/3}\leqslant(X+Y+Z)/3$$

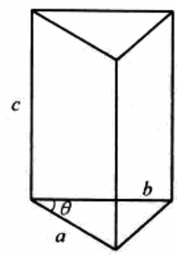


图 1

故 $$V^2 \leqslant (1/2)(L/3)^3 \sin\theta$$

即 $$V \leqslant (1/\sqrt{2})(L/3)^{3/2}$$

仅当 $X = Y = Z = (1/3)L, \sin\theta = 1$ 时等式成立. 但是当所有这些条件成立时, 三个面的面积都相等并且彼此垂直.

剩下证明这些条件直立棱柱体能满足, 对此仅需取 $a = b = 2c = \sqrt{2L/3}, \theta = \pi/2$ 即可.

(2) 式中分子的级数对于所有的 x 收敛, 令它的和为 $f(x)$; 另知分母的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)(x^2/2)^n = e^{x^2/2}$$

问题等价于要证明

$$f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \qquad ①$$

对表示 f 的级数逐项微分, 得

$$f'(x) = 1 + xf(x) \qquad ②$$

这个一次线性微分方程与初始条件 $f(0) = 0$ 一起确定 f. 于是可用两法得 ①. 或者微分 ① 的右边, 即可看出 $f(x)$ 满足 ② 与初始条件; 或者用通常的方法解 ②(对应齐次方程)

$$g'(x) - xg(x) = 0$$

有通解 $g(x) = ce^{x^2/2}$, 则 $e^{-x^2/2}$ 是 ② 的一个积分因子

$$\frac{d}{dx}(f(x)e^{-x^2/2}) = e^{-x^2/2}$$

立即得 ①.

A－5 正整数变量 n 的函数 $D(n)$ 具有下列性质: 当 p 是素数时

$$D(1) = 0, \quad D(p) = 1$$

对任何两个正整数 u 与 v, 有

$$D(u,v) = uD(v) + vD(u)$$

解决下面三个问题:

(1) 证明: 这些性质是相容的, 并且确定唯一的 $D(n)$. (导出一个关于 $D(n)/n$ 的公式, 假设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 这里 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数)

(2) 对于什么样的 $n, D(n) = n$?

(3) 定义 $D^2(n) = D(D(n))$ 等, 求 m 趋向于 α_1 时 $D^m(63)$ 的极限.

解 (1) 假设有一个函数 D 具备所要求的性质, 则

$$\frac{D(uv)}{uv}=\frac{D(u)}{u}+\frac{D(v)}{v} \quad ①$$

由归纳法得

$$\frac{D(u_1u_2\cdots u_k)}{u_1u_2\cdots u_k}=\sum_i\frac{D(u_i)}{u_i}$$

因此,当 p 是素数

$$\frac{D(p^\alpha)}{p^\alpha}=\alpha\frac{D(p)}{p}=\frac{\alpha}{p}$$

对于任何一个整数 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$p_i$ 为素数,有

$$\frac{D(n)}{n}=\sum_i\frac{\alpha_i}{p_i} \quad ②$$

这个等式表明最多存在一个函数有已给的性质.

另一方面,因为每一个整数 $n>1$ 可分解为某些素因子,若不计次序,则这分解法是唯一的.并且素数的次序不影响②的和.我们定义 $D(1)=0$;当 $n>1$ 用②定义 $D(n)$.所以当 p 是素数 $D(p)=1$ 并且 D 满足①,即

$$D(u,v)=uD(v)+vD(u)$$

所以有唯一的一个具有已给性质的函数.

为了以后参考,应注意对于 $n>1$ 有 $D(n)>0$.

(2) 方程 $D(n)=n$ 等价于

$$\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{p_k}=1 \quad ③$$

这里 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的素因子分解.若③乘以 $p_1p_2\cdots p_{k-1}$ 即看出 $p_1p_2\cdots p_k\alpha_k/p_k$ 是一个整数.因为这些 p 全不相同,故 p_k 除尽 α_k,所以 α_k/p_k 是一个整数.由③显然 $k=1$ 时 $\alpha_k=p_k$.故 $D(n)=n$ 的任何一个解有 $n=p^p$ 的形式,这里 p 是素数.反之任何一个这样的 n 是一个解.

(3) $D(63)=51$, $D^2(63)=D(51)=20$

$$D^3(63)=D(20)=24,\quad D^4(63)=D(24)=44$$

$$D^5(63)=D(44)=48$$

$D^m(63)$ 已开始随着 m 增加而增加.

假设 $n=4k$,这里 $k>1$,则

$$D(n)=D(4)k+4D(k)=4(k+D(k))>4k=n$$

所以当 $n>4$ 且 n 可以用4除尽,则 $D(n)>n$,$D(n)$ 亦可用4除尽.这就说明序列

$$D(n),D^2(n),D^3(n),\cdots,D^m(n),\cdots$$

是严格增加的.因为 D 取整数值,当 $n=4k$,$k>1$ 时 $D^m(n)\to\infty$,若 $m\to\infty$.

对于上面的情形应用这个结论,知当 $m\to\infty$ 时 $D^m(63)=$

$D^{m-2}(20) \to \infty$.

A－6 幂级数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = f(x)$$

的每一个系数 a_n，或者取值为1，或者取值为0.试证下面两结论成立：

(1) 若 $f(0.5)$ 是一个有理数，则 $f(x)$ 是一个有理函数.

(2) 若 $f(0.5)$ 不是一个有理数，则 $f(x)$ 不是一个有理函数.

解 (1) 假设 $f(0.5) = f(1/2)$ 是一个有理数.为了证明 f 是一个有理函数，注意到

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots$$

于是 $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 能当做为 $f(1/2)$ 的二进制展开，当仅且当数是有理数时，这个数的二进制展开终于周期.(一个二进位的有理数，有两个二进位的表示，它们都终于周期，例如 $3/8 = 0.011\ 000\cdots = 0.101\ 111\ 11\cdots$，这种两面性在下面的讨论里不必考虑)

于是当 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 是一个有理数，则它的二进位展开一定是终于周期的，即存在整数 N 与 k，使得 $a_{k+n} = a_n$，对于所有的 $n \geqslant N$，则

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N + \\ & x^{N+1}(a_{N+1} + a_{N+2}x + \cdots + a_{N+k}x^{k-1}) \cdot \\ & (1 + x^k + x^{2k} + \cdots) = \\ & a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N + \\ & \frac{x^{N+1}}{1-x^k}(a_{N+1} + a_{N+2}x + \cdots + a_{N+k}x^{k-1}) \end{aligned}$$

这就说明 f 是有理函数，结论(1)得证.

(2) 证与(2)相反的形式：当 f 是一个有理函数，它的幂级数在零处存在，并且每个系数或为0或为1，则 $f(1/2)$ 是有理数.设

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}{c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k} \quad ①$$

对于 f 的已知级数有

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

当 $k + n > m$ 时，比较 x^{k+n} 的系数得

$$c_0a_{n+k} + c_1a_{n+k-1} + \cdots + c_ka_n = 0$$

因为 $c_0 \neq 0$,能解出 a_{n+k},即

$$a_{n+k} = -\frac{1}{c_0}(c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n) \quad ②$$

这是用前面 k 个系数 $a_{n+k-1}, \cdots, a_k$ 来表示 a_{n+k} 的线性递推关系.

假设对于某整数 r 与 s 有 $r + k > m$ 与 $s > 0$,有

$$a_{r+s} = a_r$$

$$a_{r+s+1} = a_{r+1}$$

$$\vdots$$

$$a_{r+s+k-1} = a_{r+k-1}$$

由 ② 推得 $a_{r+s+k} = a_{r+k}$.据归纳法,对任何正数 t 有 $a_{r+s+t} = a_{r+s}$.

因为已知每一个 a 或者为 0 或者为 1,最多能有 2^k 个不同的 k 数组的相继系数,并因此对于 $r > m - k$ 与 $s > 0$ 一定有 k - 数组

$$(a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{r+k-1})$$

相同于 k 数组

$$(a_{r+s}, a_{r+s+1}, \cdots, a_{r+s+k-1})$$

的确一定会有这样的例子,那里

$$m - k < r < r + s \leqslant m - k + 1 + 2^k$$

一旦这样一个重复出现,在上面已看到从那点起系数出现周期性,周期为 s.于是这些 a 是终于周期的,故

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum a_i \frac{1}{2^i}$$

有一个终于周期的二进展开,所以它是一个有理数.结论(2)得证.

B-1　在一条直街上有 n 家住户,每家有一个或多于一个小学生.在街的什么地方让小学生集中,他们走的路的距离的总和最小?

解　设第 i 个小学生的家的直线坐标是 x_i,设小学生的编号为 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.因为步行到集中点 z 的总距离是 z 的连续函数,$z \to \pm\infty$,$f(z) \to \infty$,最佳集中点存在,令它为 y.不论在何处集中,第一个与第 n 个一共至少步行 $x_n - x_1$,第二个与第 $n-1$ 个一共至少步行 $x_{n-1} - x_2$ 等等.

当 n 是偶数 $n = 2k$,全体小学生至少步行 $(x_n - x_1) + (x_{n-1} - x_2) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)$.等价于集中点 y 属于每一个区间 $[x_1, x_{n-1}], [x_2, x_{n-2}], \cdots, [x_{k-1}, x_k]$ 内的情形.因为这些区间是一个套一个的,故 $y \in [x_k, x_{k-1}]$.

当 n 是奇数 $n = 2k-1$,按上面的配对,第 k 个学生没有对,他

步行至少为0.整个步行距离至少为$(x_n - x_1) + (x_{n-1} - x_2) + \cdots + (x_{k+1} - x_{k-1}) + 0$,故 $y = x_k$.

B-2 半轴为 a 与 b 的椭圆,它的周长有两个显然的近似值,即 $\pi(a+b)$ 与 $2\pi(ab)^{1/2}$.当比值 b/a 很接近1时,哪一个比较接近真实值?

解 椭圆参数表示为 $x = a\cos t, y = b\sin t$.由椭圆的长度公式知长度为

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

为周知的椭圆积分.当 b/a 接近1时考虑 L,置 $b = (1+\lambda)a$ 且考虑

$$L(\lambda) = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + (2\lambda + \lambda^2)\cos^2 t}\,dt$$

显然为 λ 的一个解析函数.求它的幂级数至二次项

$$L(\lambda) = a\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}(2\lambda + \lambda^2)\cos^2 t - \frac{1}{8}(2\lambda + \lambda^2)^2\cos^2 t + \cdots\right)dt =$$

$$2\pi a\left(1 + \frac{1}{4}(2\lambda + \lambda^2) - \frac{3}{64}(2\lambda + \lambda^2)^2 + \cdots\right) =$$

$$2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}\lambda^2 + \cdots\right)$$

后者表示式是由$(1+z)^{1/2}$的二项式展开而得的,后来略去 λ 的三次以上的所有的项.

因为对于较小的 λ 的值(事实上是当 $|2\lambda| + \lambda^2 < 1$) 级数绝对收敛.上面的运算合理.

题中提出的周长近似式是

$$\pi(a+b) = 2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)$$

与 $$2\pi\sqrt{ab} = 2\pi a\sqrt{1+\lambda} = 2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}\lambda^2\cdots\right)$$

因为三个函数有相同的常数项与一次项,所以它们的差别是对于较小的 λ 的二次项,有

$$L(\lambda) > 2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) > 2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}\lambda^2 + \cdots\right)$$

所以椭圆周长 $\pi(a+b)$ 比 $\pi\sqrt{ab}$ 好,几乎好三倍.事实上

$$L(\lambda) - 2\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) \sim \frac{1}{16}\lambda^2$$

而 $$L(\lambda) - 2\pi a\sqrt{1+\lambda} \sim \frac{3}{16}\lambda^2$$

B－3　在阳历里按公元纪年.

(1) 年数不被 4 除尽是平年.

(2) 年数被 4 除尽但不被 100 除尽是闰年.

(3) 年数被 100 除尽但不被 400 除尽是平年.

(4) 年数被 400 除尽,是闰年.

(5) 闰年 366 天,平年 365 天.

证明:圣诞节在星期三的概率不是 1/7.

解　按照已知规律,任何接连 400 个阳历年中,有 303 个平年,97 个闰年,共 $400\times 365+97$ 天.因为这个数可用 7 除尽($400\equiv 1,365\equiv 1,97\equiv -1 \pmod 7$).在 400 年内有整数个星期(事实上是 20 871 个星期).因此圣诞节(或日历中其他一天)在星期中轮流出现的日子是400次.如果 N 年圣诞节是在星期三,则圣诞节在星期三的概率是 $N/400$.但 $N/400\neq 1/7$,对于任何整数 N.

B－4　有一个正柱体,它的横截面是一椭圆,半轴为 a 与 b,这里 $a>b$.柱体很长,由很轻的均匀物质做成.柱体横放在水平地面上,它与地面相切于一直线,这条直线是各个横截面的短轴的下端的连线.沿着这些短轴上端点的连线,放一条很重的均匀的直的金属线,长度与柱体同.金属线牢固地与柱体结合.我们不计柱体的重量,金属线的宽度,以及与地面的摩擦.

因为上述系统为对称,所以具有平衡性.这种平衡性可以理解为当 b/a 很小时是稳定的,当这个比接近 1 时是不稳定的.考察这个论点,并求稳定与不稳定分界时的比值 b/a.

解　因为柱体是长的,仅能作滚动,因此可以将注意力集中到与柱体的轴垂直的平面上,问题成为二维的情形,等价于方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的椭圆,限制在平面上,但是可自由地沿直线 $y=-b$ 滚动.椭圆的重量不计,但有一个重的颗粒加在椭圆的 $P=(0,b)$ 处,重力沿 y 轴的负向作用,要求确定在稳定的条件下的比例值 a/b.假设椭圆从开始的位置滚动很小.当滚动时,点 P 升高要反抗重力,椭圆在点 Q 将稳定平衡(图 1).另一种情形,如果轻微的滚动,点 P 下降,在点 Q 的平衡是不稳定的.

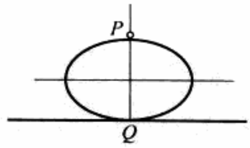


图 1

因此考虑从点 P 到此椭圆上一可变点 Z 的距离 $|PZ|$ 来决

定平衡是稳定的或者不是稳定的.当这个函数在点 Q 有严格的局部最小值,则平衡是稳定的.另一方面,若 $Z = Q$ 而 $|PZ|$ 有严格局部最大值,平衡是不稳定的.对 $|PZ|^2$ 考察可得同样结论.

假设 Z 是点$(a\sin t, -b\cos t)$(它在椭圆上),则 $t = 0$ 对应 $Z = Q$.这时

$$|PZ|^2 = a^2\sin^2 t + b^2(1+\cos t)^2$$

令 $a = rb$,上式成为

$$|PZ|^2 = b^2((r^2-1)\sin^2 t + 2 + 2\cos t)$$

对于 t 的一阶导数是

$$b^2((r^2-1)\sin 2t - 2\sin t)$$

当 $t = 0$ 时为零.二阶导数为

$$b^2(2(r^2-1)\cos 2t - 2\cos t)$$

当 $t = 0$ 时为 $2b^2(r^2-2)$.故当在 $t = 0$ 处,若 $r^2 < 2$,则有严格局部极大值,因而是不稳定的.当 $r^2 > 2$,有严格局部极小值,因而是稳定的,所以 a/b 的临界值是$\sqrt{2}/2$.

进一步考虑 $r^2 = 2$ 的情形,函数变成

$$b^2(\sin^2 t + 2 + 2\cos t) = b^2(4-(1-\cos t)^2)$$

当 $t = 0$ 通常有严格局部极大值,所以是不稳定的.

B-5 (1) 已知第 n 项是 $s_n + 2s_{n-1}$ 的序列收敛,证明:序列 $\{s_n\}$ 也收敛.

(2) 变动一个平面的位置,使之包含一个锥,锥的体积为 $\pi a^3/3$,它的曲面的直角坐标方程为 $2xy = z^2$.求这个变动平面的包络方程,并将结果应用于一般的二阶锥(即锥面).

解 (1) 假设 $\lim(s_n + 2s_{n+1}) = 3L$,则

$$\lim((s_n - L) + (s_{n+1} - L)) = 0$$

置 $t_n = s_n - L$,则 $\lim(t_n + 2t_{n+1}) = 0$.要证明 $\lim t_n = 0$ 也就证得 $\lim s_n = L$,从而得知序列$\{s_n\}$收敛.

给定 $\varepsilon > 0$,选择 k 使得 $|t_n + 2t_{n+1}| < \varepsilon$ 对所有的 $n \geqslant k$ 成立.对 p 用归纳法得

$$t_k - (-2)^p t_{k+p} = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i(t_{k+i} + 2t_{k+i+1})$$

因此 $$|t_k - (-2)^p t_{k+p}| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} 2^i |t_{k+i} + 2t_{k+i+1}| < 2^p\varepsilon$$

对 $p \geqslant 1$ 成立.用 2^p 除得

$$|t_{k+p} - (-1/2)^p t_k| < \varepsilon$$

于是 $|t_{k+p}| < \varepsilon + |t_k|/2p$，因此 $\limsup\limits_{p\to\infty} |t_{k+p}| \leqslant \varepsilon$，所以 $\limsup\limits_{n\to\infty} |t_n| < \varepsilon$. 由于 q 是任意的，故 $\lim t_n = 0$. 由前述知这就证明了序列 $\{s_n\}$ 收敛于 L.

(2) 作坐标变换 $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u+v)$，$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u-v)$，则 uv 轴是正交的并且是 xy 轴旋转 $\pi/4$ 所得. 对于新坐标，已知曲面的方程为 $z^2 + v^2 = u^2$，是以 u 轴为轴的正圆锥.

其次，求由平面从实心锥上割下锥形区域的体积. 由旋转的对称性，仅需考虑形为 $u = mv + b$ 的平面. 为了平面将割下一个有界的区域，必须 $|m| < 1$. 则割下的区域是具有椭圆为底的锥. 要求锥的高与底面积.

高是从原点对平面的距离，即 $|b|/\sqrt{1+m^2}$. 底的面积是它在 vz 平面上正投影所得面积的 $\sqrt{1+m^2}$ 倍. 在锥与平面方程之间消去 u，得投影的椭圆方程 $z^2 + m^2 = (mv+b)^2$. 合并 v 的项并构成完全平方，得

$$z^2 + (1-m^2)\left(v - \frac{mb}{1-m^2}\right) = b^2\left(\frac{1}{1-m^2}\right)$$

（注意，因 $|m| < 1$，故确为椭圆）这个椭圆的面积为

$$A = \pi b^2/(1-m^2)^{3/2}$$

锥的区域的体积是

$$\frac{1}{3} \times 底 \times 高 =$$

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+m^2}\pi b^2 \frac{1}{(1-m^2)^{3/2}}\right)\left(\frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\pi |b|^3 \frac{1}{(1-m^2)^{3/2}}$$

问题是考虑割出体积为 $(1/3)\pi a^3$ 的这些平面，即 $|b| = a\sqrt{1-m^2}$ 的平面. 这里 m 是平面与 zv 平面之间的角的正切.

现在求所有这些平面的包络 E，显然构成 E 的平面的分布一定是呈旋转对称的，所以求 E 的 uv 平面的交 I 即可.

考虑平面 P 在 I 的一点与 E 相切. 因为它保存 E 并在 I 的每一个点不变，故反射在 uv 平面内保存 P，所以 P 是垂直 uv 平面的. 这样它有一个形为 $u = mv + b$ 的方程，这里 $|b| = a\sqrt{1-m^2}$. P 与 uv 平面的交线 l 显然切于 I. 因此 I 是所有线 l 的包络，有方程为

$$u = mv \pm a\sqrt{1-m^2} \qquad ①$$

于是包络问题成为 2 维的.

为了求包络，首先在 ① 内取正号，将

$$u = mv + a\sqrt{1-m^2} \qquad ②$$

对于 m 微分所得的方程与 ② 一起消去 m，有

$$0 = v - am/\sqrt{1-m^2} \qquad ③$$

由 ③ 得
$$m^2 = v^2/(v^2+a^2)$$
即
$$1-m^2 = a^2/(v^2+a^2)$$
方程 ② 成为

$$u = \sqrt{1-m^2}\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}v + a\right) = \sqrt{1-m^2}\left(\frac{v^2+a^2}{a}\right)$$

最后得 $u^2 = v^2 + a^2$ 为包络 I 的方程. 如果开始取负号也得相同的方程.

三维的包络 E，由绕着 u 轴旋转 I 得到，因此它的方程为 $u^2 = v^2 + z^2 + a^2$. 变回到原坐标轴的方程为 $2xy = z^2 + a^2$.

一般的情形，任何一个非退化的二次锥仿射等价于正圆锥. 又因为体积的比在仿射变换下不变. 用前面的计算导出：如果一族平面，从一个实心的二次锥割去相同的定体积，那么这些平面一定切于一双曲面，它渐近于锥.

B－6　考虑闭的平面曲线 C_i 与 C_0，它们的长各为 $|C_i|$ 与 $|C_0|$；闭曲面 s_i 与 s_0，它们的面积各为 $|s_i|$ 与 $|s_0|$. 假设 C_i 在 C_0 内而 s_i 在 s_0 内（下标 i 表示在内，0 表示在外）. 证明下面四项之中的正确结论及其他不正确的结论.

（1）当 C_i 是凸的，则 $|C_i| \leqslant |C_0|$.

（2）当 s_i 是凸的，则 $|s_i| \leqslant |s_0|$.

（3）当 C_0 是包含 C_i 的最小凸曲线，则 $|C_0| \leqslant |C_i|$.

（4）当 s_0 是包含 s_i 的最小凸曲面，则 $|s_0| \leqslant |s_i|$. 可假设 C_i 与 C_0 是多边形而 s_i 与 s_0 是多面体.

解　结论(1)(2)(3) 真而(4) 不真.

(1) 假设 c_i 是在闭多边形 c_0 内的闭凸多边形，要证 $|c_i| \leqslant |c_0|$. 这里要作点说明，“在内”、“在外” 的意思是从 c_i 的一点画出的每一条无限射线均与 c_0 相交.

设 c_i 的顶点依序为 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n = A_0$. 在线段 $A_{q-1}A_q$ 上构造一个半无限的矩形带 s_q 于 c_i 的外部，它包含开线段 $A_{q-1}A_q$ 但不包含那些无限线段. 因为 c_i 是凸的，故这些带不相交.

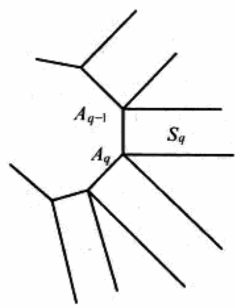


图 1

考虑 $c_0 \cap s_q$ 在 $A_{q-1}A_q$ 上的正投影. 因为若 $X \in A_{q-1}A_q$ 不在这个范围内，则 s_q 内的射线从 X 垂直于 $A_{q-1}A_q$（图 1），不会与 c_0 相交. 故此投射为满射. 正投影不增加多边形的长度，所以

$$|c_0 \cap s_q| \geqslant |A_{q-1}A_q|$$

因此 $\quad |c_0| \geqslant \sum_q |c_0 \cap s_q| \geqslant \sum_q |A_{q-1}A_q| = |c_i|$

(2) 类似(1) 的三维情形也成立(实际上更高维也成立),证明也类似.在凸多面体 s_i 的第 q 个面 F_q 上,竖立一个半无限矩形棱柱 P_q 于 s_i 外,它包含开的第 q 个面但不含那些无限面的点,则这些棱柱是不相交的. $s_0 \cap P_q$ 在 F_q 上的正投影不增加它的面积,并且投影一定覆盖 P_q 的内部,所以如同(1) 有

$$|s_0| \geqslant \sum_q |s_0 \cap P_q| \geqslant \sum_q |F_q| = s_i$$

这里绝对值表示面积.

(3) 令 c_0 是一个闭凸多边形,顶点依序为 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n = A_0$.令 c 是任一闭多边形(可能自行相交).它的顶点包含所有 A_k,有

$$|c| \geqslant |c_0| \qquad ①$$

当且仅当 $c = c_0$ 取等号.

假设此时上式不等号成立,设 c_i 是一个平面上的闭多边形曲线,而 c_0 是 c_i 是凸包的界,则 c_0 是多边形,它的顶点包括 c_i 的顶点,由前述有 $|c_i| \geqslant |c_0|$.

现在证明不等式 ①.因为这些 A 是凸多边形的顶点,设有三个顶点是共线的.若 c 除 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 外还有顶点,我们可以用一个较短的多边形代替以去掉那个多出来的顶点.因此可设 c 能表示为 $B_0, B_1, \cdots, B_n$,其中 $B_n = B_0$.这些 B 是那些 A 的一个排列.

如果这些 A 与那些 A 有相同或相反的循环次序,则 $c = c_0$.否则,我们将表明如何将这些 B 再排列得到一个较短闭多边形 c'.因为仅有有限多个可能的以这些 A 为顶点的多边形,一定有一个最短的.因此 c_0 就是所求的最短多边形.

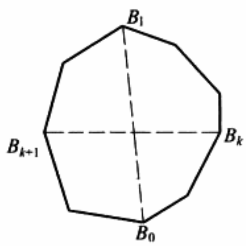


图 2

设这些 B 相继的两个顶点(不妨取 B_0 与 B_1) 不是 c_0 的相继顶点,则线 $\overline{B_0B_1}$ 不是 c_0 的支撑线,一定有顶点在 $\overline{B_0B_1}$ 的两侧.因此一定有一个整数 $k, 2 \leqslant k \leqslant n-1$,使得 B_k 是在 $\overline{B_0B_1}$ 的一侧,而 B_{k+1} 在另一侧(图 2).现在四个点 B_0, B_1, B_k, B_{k+1} 是凸的四边形 Q 的顶点,并且 $\overline{B_0B_1}$ 分开 B_k 与 B_{k+1}. Q 的对角线是 B_0B_1, B_kB_{k+1},因此(证明见后)

$$|B_0B_1| + |B_kB_{k+1}| > |B_0B_k| + |B_1B_{k+1}| \qquad ②$$

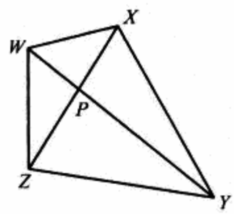


图 3

现在考虑用顶点 $B_0, B_k, B_{k-1}, \cdots, B_2, B_1, B_{k+1}, B_{k+2}, \cdots, B_n$ 表示的多边形闭曲线 c',有

$$|c'| = |c| - |B_0B_1| - |B_k||B_{k+1}| + |B_0B_k| + |B_1B_{k+1}| < |c|$$

因此 c' 是具有相同的顶点比 c 严格短的多边形.① 得证.

下面证明 ②,如图 3 所示,令 $WXYZ$ 是一个凸四边形,对角线

交于 P,故有

$$|WY|+|XZ|=|WP|+|PZ|+|YP|+|PX|>$$
$$|WZ|+|XY|$$

(4) 这个结论是错的.设 $ABCD$ 是空间的一个中心为 0 的正四面体,令 s 是四条边 OA,OB,OC 与 OD 的并,包含 s 的最小凸集显然是四面体 $ABCD$.但 s 的曲面面积为零,s 完全不是一个曲面,它可略为扩大而得到一个面积微小的曲面 sf,它与 s 具有同一凸包.则

$$|s_0|=|ABCD|>|sf|$$

选择 $A'B'C'D'$ 使得 0 在 AA',BB',CC',DD' 的每一条边上,而有 $|OA'|=|OB'|=|OC'|=|OD'|=\varepsilon$.这里 ε 是一个小的正数.令 s_i 是多面体

$$A'B'C'D'\cup AB'C'D'\cup A'BC'D\cup A'B'C'D$$

的曲面.选择 ε 充分小则可使 $|s_i|$ 任意小.

第 11 届美国大学生数学竞赛

A-1 证明:如果 a,b,c,d,e,f 为实数,则行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

是非负的.

解 假设 $f\neq 0$.用 $\triangle$ 表示已给行列式,并记 $\bar{b}=b/f$ 和 $\bar{d}=d/f$.用 f 除行列式的第三行和第三列,则得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix} 0 & a & \bar{b} & c \\ -a & 0 & \bar{d} & e \\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1 \\ -c & -e & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

再从第一行减去第三行的 c 倍,从第二行减去第三行的 e 倍,得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix} \bar{b}c & a+\bar{d}c & \bar{b} & 0 \\ -a+\bar{b}e & \bar{d}e & \bar{d} & 0 \\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1 \\ -c & -e & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

对于列也进行类似的交换,又得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix} 0 & a+\bar{d}c-\bar{b}e & \bar{b} & 0 \\ -a+\bar{b}e-\bar{d}c & 0 & \bar{d} & 0 \\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a+c\bar{d}-\bar{b}e \\ -a+\bar{b}e-c\bar{d} & 0 \end{vmatrix}=(a+c\bar{d}-\bar{b}e)^2$$

从而 $\triangle=(af+cd-be)^2$,所以对任意选取的实数 a,b,c,d,e 和 f,$\triangle$ 是非负的.

请注意,如果 $f=0$,矩阵便有更多的零元素,应用行列式的拉普拉斯展开定理就得 $\triangle=(cd-be)^2$.(另一方面,在上述公式

$\triangle = (af + cd - be)^2$ 中令 $f \to 0$ 也得到这个结果) 更一般地说，由于 $\triangle$ 显然是关于矩阵表值的一个多项式，所以在计算 $\triangle$ 时假定 $f \neq 0$ 实际上不失掉一般性.用代数语言来说，计算实际上是在域 $Q(a,b,c,d,e,f)$ 内作出的，这里 a,b,c,d,e 和 f 都是未定元.在这个域内 $f \neq 0$.

A－2 在平面上，一动点到几个定点的距离的平方和为一常数，问此点的轨迹是什么？又对于此常数必须附加何种限制(用几何语言叙述) 方能使所求轨迹为非空集合？

解 设已给定点为 $\{(x_i, y_i)\}$，$i = 1,2,\cdots,n$.令 (x,y) 是轨迹上的一点，则所要求的条件是

$$\sum[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] = C$$

其中 C 是一个常数.这个条件可改定为

$$nx^2 - 2(\sum x_i)x + \sum x_i^2 + ny^2 - 2(\sum y_i)y + \sum y_i^2 = C$$

配平方后便有如下形式，即

$$\left(x - \frac{\sum x_i}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{\sum y_i}{n}\right)^2 =$$

$$\frac{C}{n} + \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2 - \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{\sum y_i^2}{n}$$

因此，若上式右边为负，则轨迹是一个空集；若右边为零，则轨迹是一个点(即给定点组之形心 $((1/n)\sum x_i, (1/n)\sum y_i)$)；若右边为正，则轨迹是以形心为圆心的一个圆.如果把给定点组之形心取作坐标原点，则有一实的非空轨迹的条件为

$$C \geqslant \sum(x_i^2 + y_i^2) = \sum r_i^2$$

这里 r_i 是第 i 个定点到新原点的距离.这就是说，C 必须至少是与各定点到其形心的距离的平方和一样大.最后这个公式是下述一般事实的一个特例：一平面质量对于经过质心而且垂直于该平面的一条轴的惯性矩为最小.

A－3 求无穷级数的和：

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} + \cdots$$

解 首先证明

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} + \cdots = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

事实上，对任何 $t \neq -1$ 有

$$\frac{1}{1+t^3}=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}t^{3n-3}+\frac{(-1)^k t^{3k}}{1+t^3}$$

从0到1积分得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}-\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{3n-3}\mathrm{d}t=(-1)^k\int_0^1\frac{t^{3k}\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

因此

$$\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\right|=\left|\int_0^1\frac{t^{3k}\mathrm{d}t}{1+t^3}\right|\leqslant\int_0^1 t^{3k}\mathrm{d}t=\frac{1}{3k+1}$$

令 $k\to\infty$ 便得

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

这个积分可用部分分式积分法计算为

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}+\frac{2-t}{1-t+t^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{3}\left[\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1-t+t^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{3}\left[\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

A－4 画出下列方程表示的曲线：

$$y^4-x^4-96y^2+100x^2=0$$

解 原方程配方后化为

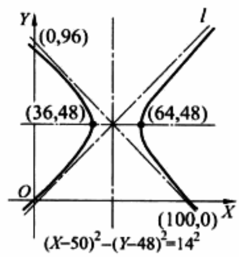
$$(x^2-50)^2-(y^2-48)^2=14^2$$

令 $X=x^2,Y=y^2$，则得

$$(X-50)^2-(Y-48)^2=14^2$$

在 XY 平面上这个方程表示的图形显然为一直角双曲线，如图1所示，其中心在(50,48)处，渐近线是

$$\begin{cases}X+Y=98\\X-Y=2\end{cases}$$



（轴助图形）

图1

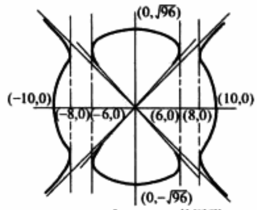
今考察 XY 平面的第一象限. 对第一象限内的每个点 (X,Y)，所求轨迹 L 上对应有四个点，即 $(\pm\sqrt{X},\pm\sqrt{Y})$. 因为把 xy 平面的每个象限都映成 XY 平面的第一象限的变换 $(x,y\mapsto)(X,Y)$ 是双方可微的，故辅助图形的光滑弧必对应于 L 的光滑弧. 在辅助图形上又在第一象限边界上的三个点(0,0)，(0,96)和(100,0)对应于 L 的五个点(0,0)，$(0,\pm\sqrt{96})$，$(\pm 10,0)$，对这些点要给予特殊考虑.

函数 $f(x,y)=y^4-x^4-96y^2+100x^2$ 有梯度

$$\nabla f=(-4x^3+200x,4y^3-192y)$$

因为 ∇f 在点 $(0, \pm\sqrt{96})$，$(\pm 10,0)$ 处不等于零，所以曲线 L 在这些点是光滑的. 因为 ∇f 的第一个分量在 $(0, \pm\sqrt{96})$ 处等于零，所以 L 在这两点必有水平切线. 因为 ∇f 的第二个分量在 $(\pm 10,0)$ 处等于零，所以 L 在这两点必有竖直切线. 因为 ∇f 的两个分量在原点处均等于零，所以在原点处必须考虑 f 的二次项 $100x^2-96y^2$. 因为这些二次项构成一个非退化二次型，它沿直线 $y=\pm(100/96)x$ 等于零，故曲线 L 在原点处自行相交，它的两支都与此两直线相切.

分析表明，∇f 的第一个分量在 L 的任何其他点处都不等于零，所以 L 没有更多的水平切线，但 ∇f 的第二个分量等于零的点另外还有八个，即 $(\pm 6, \pm\sqrt{48})$，$(\pm 8, \pm\sqrt{48})$，对应于辅助图形上的竖直切线，L 在这些点处也有竖直切线.



$y^4<x^4+96y^2+100x^2=0$ 的图形

图 2

因为直线 $X-Y=2$ 是助辅双曲线的一条渐近线，故沿着这条双曲线在第一象限内的无界弧有 $X-Y\to 2$. 对应地，沿着 L 在第一象限内的无界弧有

$$x-y=\sqrt{X}-\sqrt{Y}=\frac{X-Y}{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}\to 0$$

所以在第一象限内 L 渐近于直线 $y=x$，根据对称性，在第三象限内 L 也渐近于 $y=x$，而在第二和第四象限内 L 渐近于 $y=-x$.

因为在带形 $36<X<64$ 内没有辅助轨迹上的点，故在带形 $6<x<8$ 和 $-8<x<-6$ 内没有 L 的点. 所以得到 $f(x,y)=0$ 的图形如图 2 所示.

A－5 在平面上考虑由整数点（即坐标为整数的点）构成的点网络. 试对具有有理斜率的直线证明下述结论：

(1) 这样的直线或者不通过网络点或者通过无穷多个网络点.

(2) 对于每一条这样的直线，都存在一个正数 d，使得除去直线上可能有的网络点以外，再没有网络点与直线的距离小于 d.

解 (1) 若 L 是一条具有有理斜率的直线，则其方程可以写为 $ax+by+c=0$，其中 a 和 b 都是不为零的整数. 设 (x_1,y_1) 是此直线上的一点，且 x_1 和 y_1 均为整数. 由于

$$a(x_1+kb)+b(y_1-ka)+c=ax_1+by_1+c=0$$

故知形式为 (x_1+kb, y_1-ka)，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 的点也全在此直线上. 所以，如果在具有有理斜率的一直线上有一个整数点，则其上就有无穷多个整数点.

(2) 从点 (p,q) 至直线 $L: ax+by+c=0$ 的距离为

$$d = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

因为 L 有有理斜率,故 a 和 b 均可选为整数,于是 $ap + bq$ 只取整数值. 所以,如果 c 是一个整数,则 d 或等于零,或至少等于 $1/\sqrt{a^2 + b^2}$.如果 c 不是一个整数,则 d 至少等于 $e/\sqrt{a^2 + b^2}$,其中 e 是从 c 到最接近的整数的距离.

A - 6　试确定抛物线的一条法线弦的位置,使得这条弦截该抛物线所成的弓形有最小面积.

解　选取坐标系,使得抛物线的方程为 $4ay = x^2, a > 0$. 把点 $P(2as, as^2)$ 联结到点 $Q(2at, at^2)$ 的弦有方程

$$y = \frac{1}{2}(t + s)x - ast \quad ①$$

在 $(2at, at^2)$ 处的切线有斜率 t.因此,直线 ① 为抛物线在 Q 处的法线必须而且只须

$$\frac{1}{2}t(t + s) = -1$$

即

$$s = -\frac{2}{t} - t$$

所以 s 和 t 有相反的符号.取 $s < 0$ 和 $t > 0$,则由弦截出的面积是

$$\int_{2as}^{2at}\left[\frac{1}{2}(t + s)x - ast - \frac{1}{4a}x^2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^2(t - s)^3$$

当 $t - s$ 为最小时此面积将为最小,但

$$t - s = 2t + \frac{2}{t} = 2\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 + 4 \geqslant 4$$

等号仅当 $\sqrt{t} = 1$ 时成立,从而 $t = 1$.

因此,在抛物线轴右方的一切法线中,经过点 $(2a, a)$ 的法线截出最小面积,其值为 $64a^2/3$.根据对称性,在轴左方的一切法线中,经过点 $(-2a, a)$ 的法线截出最小面积.故临界法线具有与轴相交成 45° 角的特征.

A - 7　证明:如果级数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 收敛,则级数 $a_1 + a_2/2 + a_3/3 + \cdots + a_n/n + \cdots$ 也收敛.

解　本题是阿贝尔求和定理的一个特殊情形:如果级数 $\sum a_n$ 的部分和有界,且序列 $\{b_n\}$ 单调下降趋于零,则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

这一定理可证明如下：设 $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$，设 M 为 $\{|s_k|\}$ 的一个上界，则

$$
\begin{aligned}
& a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \\
& s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n = \\
& s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + \\
& s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n
\end{aligned}
$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(b_i - b_{i+1}) + s_n b_n$$

因为

$$|s_i(b_i - b_{i+1})| \leqslant M(b_i - b_{i+1})$$

$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - b_{i+1})$ 收敛于 b_1，故级数 $\sum_{i=1}^{\infty} s_i(b_i - b_{i+1})$ 绝对收敛．又因为 $\{s_n\}$ 有界，故 $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(b_i - b_{i+1})$$

因而明所欲证．

作为特殊情形，只须取 $b_n = 1/n$，便直接得到本题要证的结果．

> B－1　设微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 有一形如 $f(xy)$ 的积分因子，试找出函数 M 和 N 必须满足的条件．推导时可以假设 M 和 N 具有一切阶的连续偏导数．

解　如果已给方程有一形如 $f(xy)$ 的积分因子，则

$$f(xy)M(x,y)\mathrm{d}x + f(xy)N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \qquad ①$$

必是一闭微分形式（即局部正合微分形式）．为此必须成立

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(xy)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[f(xy)N(x,y)] \qquad ②$$

即成立

$$xf'M + f\frac{\partial M}{\partial y} = yf'N + f\frac{\partial N}{\partial x} \qquad ③$$

由此得

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad ④$$

这里假定 $f(xy) \neq 0$ 和 $xM - yN \neq 0$．

今④之左边是 (xy) 的一个函数，故右边也必是 (xy) 的一个函数．于是，当 $xM - yN \neq 0$ 时，方程有所述积分因子的必要条件是存在一单变量函数 R，使得

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = R(xy)$$

反之,如果这样一个函数 R 存在,则由下式

$$f(xy) = \exp\int^{xy} R(t)\mathrm{d}t$$

给出的函数无疑将满足 ②,所以它是一个积分因子.

B-2　考虑 x 的两个可微的且不恒为零的函数.试找出这样两个函数的例子,使得它们之商的导数等于它们的导数之商.

解　必须找出函数 f 和 g,使得成立

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g'} \qquad ①$$

① 实质上等价于

$$g(g' - g)f' - g'^2 f = 0 \qquad ②$$

今若选择任一区间 Ⅰ 和任一函数 g,使得 $g, g' - g$ 和 g' 在 Ⅰ 上都不等于零,则 ② 是在 Ⅰ 上对于 f 的一个非奇的一阶线性微分方程,其通解为

$$f(x) = C\exp\int^{x} \frac{g'^2}{g(g' - g)}\mathrm{d}t \qquad ③$$

任意常数 $C \neq 0$,函数 f 和 g 都将满足 ① 且不恒等于零.

为明确起见,试令 $I = \mathbf{R}$ 和 $g(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.于是 ② 变成

$$(\lambda - 1)f' - \lambda^2 f = 0$$

因而若 $\lambda \neq 1$,便可取

$$f(x) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{\lambda - 1}\right)x$$

例如选择 $\lambda = 2$ 时便有 $f(x) = \mathrm{e}^{4x}, g(x) = \mathrm{e}^{2x}, f(x)/g(x) = \mathrm{e}^{2x}$,且 $(f/g)' = 2\mathrm{e}^{2x} = f'/g'$.

B-3　证明:如果 x 为正数,则

$$\ln(1 + 1/x) > 1/(1 + x)$$

解　$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \int_x^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} > \int_x^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}$

B-4　试研究一个同时与四个不同的同心圆相切的平面椭圆图形的存在性,讨论可以采用任何行之有效的方法.

解法 1　我们证明:从靠近一(非圆的)椭圆中心的任何一点 P 可以作出该椭圆的四条不同的法线.然后证明:如果 P 又不在

椭圆的两条轴上,则这些法线的长度全不相同.因此,以任一个这样的点 P 为圆心,便可作出与给定椭圆相切的四个不同的同心圆.于是所言之图形一定存在.

设椭圆的中心为 O,长轴 AC 的长为 $2a$,短轴 BD 的长为 $2b$,这里 $a > b$.

设 P 是任意一点,使得 $|OP| < \frac{1}{2}(a-b)$,则由三角形定律有

$$|PA| \geqslant |OA| - |OP| > \frac{1}{2}(a+b)$$

$$|PB| \leqslant |OB| + |OP| < \frac{1}{2}(a+b)$$

$$|PC| > \frac{1}{2}(a+b) \tag{①}$$

$$|PO| < \frac{1}{2}(a+b)$$

所以,当 X 沿着椭圆变动时,$|PX|$ 沿弧 DAB 必在某点 A' 有一极大值,沿弧 ABC 必在某点 B' 有一极小值,沿弧 BCD 必在某点 C' 有一极大值,沿弧 CDA 必在某点 D' 有一极小值.由于不等式①,这些极值之中无论哪个都不会在所提到的弧的端点取得,从而线段 PA', PB', PC', PD' 都是椭圆的法线,如图1所示.

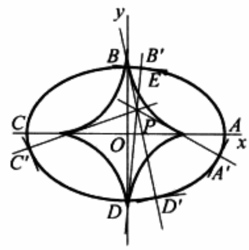


图 1

今再设 P 不在长轴上,为确定起见,设 P 在 $\overrightarrow{AC}$ 上方.令 E 是 D' 对于 $\overrightarrow{AC}$ 的反射点,则 E 在椭圆上;且由于 AC 是 $D'E$ 的中垂线,P 和 E 都在 $\overrightarrow{AC}$ 的同一侧,故有 $|PE| < |PD'|$.因为当 X 沿着包含 E 的椭圆弧 ABC 变动时,$|PX|$ 的最小值是 $|PB'|$,故又有 $|PE| \geqslant |PB'|$,所以有 $|PB'| < |PD'|$.

如果 P 不在短轴上,类似地可证得 $|PA'| \neq |PC'|$.

由不等式①及 A', B', C', D' 的取法即知 $|PA'| > \frac{1}{2}(a+b)$, $|PB'| < \frac{1}{2}(a+b)$, $|PC'| > \frac{1}{2}(a+b)$ 和 $|PD'| < \frac{1}{2}(a+b)$,因此 $|PA'|$, $|PB'|$, $|PC'|$, $|PD'|$ 全不相同.这就完成了图形存在性的证明.

函数 $|PX|$ 的四个临界点很容易用分析方法确定出来.若椭圆有方程 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,P 有坐标 (h,k),则

$$|PX|^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

取 λ 为拉格朗日乘子,考虑

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

令其偏导数等于零,得到

$$(x-h)=\lambda\frac{x}{a^2},(y-k)=\lambda\frac{y}{b^2}$$

消去 λ，则看出四个临界点是椭圆与（可能退化的）双曲线

$$(a^2-b^2)xy=a^2hy-b^2kx$$

的交点. 因为 $h=k=0$ 时有四个交点，故当 h 和 k 靠近零时也必有四个交点.

利用椭圆的渐屈线可具体看出：从渐屈线内部一点 P 能够做出渐屈线的四条切线，这四条切线都是椭圆的法线.

解法 2 我们证明：给定任意四个不同的同心圆，必有一个椭圆与四个同心圆都相切.

如图 2，令 C_1,C_2,C_3,C_4 是圆心为 O，半径分别为 $r_1<r_2<r_3<r_4$ 的四个同心圆. 在 C_1 上固定一点 A（利用旋转对称性，可认为椭圆与 C_1 相切于 A）. 设 l 是过 A 所引的 C_1 之切线，设 Q_1 和 Q_2 均是由 l 及半直线 AO 所界的四分之一个平面. 既是 Q_1 的边界又在 l 上的半直线记为 l_1. 从点 $B=l_1\cap C_3$ 在 Q_1 内引 C_2 之切线 BD，又从 l_1 上的且在 C_3 外面的任一点 X 在 Q_1 内引 C_2 之切线 XY.

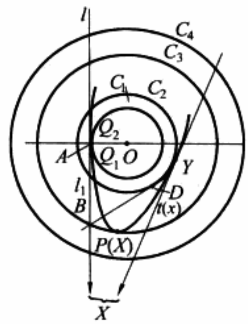


图 2

有一个单参数二次曲线族与 l 相切于 A；与 $\overrightarrow{XY}$ 相切于 Y. 因而所有曲线既与 C_1 相切又与 C_2 相切. 这个族的退化元包括联结 A 到 Y 的二重线及直线 $\overrightarrow{XY}$ 与 l 的并集. 考虑到连续性，便知必有该族的一元 $K(X)$ 与 C_3 相切于 $Q_1\cap C_3$ 的一点 $P(X)$.

当 $X\to B$ 时，$K(X)$ 退化成 $l\cup\overrightarrow{BD}$；所以对靠近 B 之 X，$K(X)$ 是一双曲线（它有一支在图形的左下方）. 当 $X\to\infty$ 时，$K(X)$ 趋向对称于 $\overrightarrow{OA}$ 的一椭圆，因此在 Q_2 内必再一次与 C_3 相切；但这一椭圆根本不与 C_4 相交. 假设 $K(X)$ 连续依赖于 X，则必有一个 X 值，使得 $K(X)$ 与 C_4 在 Q_2 内相交于一个二重点；即 $K(X)$ 与 C_4 必相切. 显然此二次曲线没有点在 C_4 外面，所以它是一个椭圆. 于是找到了与所有四个给定圆都相切的一个椭圆.

> B－5 已知通过环面中心的一个平面是环面的切平面. 证明：该平面与环面的交集由两个圆组成.

解 取环面的中心为原点，旋转对称轴为 z 轴. 建立坐标系，则环面方程为

$$(\sqrt{(x^2+y^2)}-a)^2+z^2=b^2$$

其中 $a>b>0$，设 Π 是环面在点 Q 处的切平面. 绕 z 轴旋转坐标系使 Q 位于 xz 平面内. 于是 Π 与 xz 平面的交线为一直线 $z=$

λx. 不失一般性,可设 $\lambda > 0$.

过 Q 垂直于 xz 平面之直线是环面的切线,故位于 Π 内. 所以 Π 的方程为 $z = \lambda x$.

根据对称性,显然 Π 也是环面在另一点 Q' 处的切平面. 用 c 表示从 O 到 Q 的距离(图 1),则有 $c^2 + b^2 = a^2$ 和 $\lambda = b/c$.

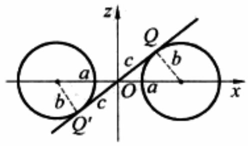
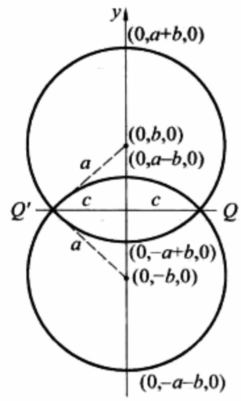


图 1

Π 与环面之交集 I 必定包含以下六点:在 y 轴上形如 $(0, \pm a \pm b, 0)$ 的四点以及 Q 和 Q' 两点. 注意到集合 I 对于 y 轴也是对称的. 因此,若 I 由两个圆组成,则必是平面 Π 内以 $(0, \pm b, 0)$ 为圆心,以 a 为半径的两个圆(参看图 2).



平面 η 的正视图

图 2

第一个圆的参数方程为

$$\begin{aligned} y &= b + a\sin\theta \\ x &= c\cos\theta \\ z &= b\cos\theta \end{aligned} \quad ①$$

事实上,因为这些值既满足 $x^2 + (y - b)^2 + z^2 = a^2$,又满足 $z = \lambda x$;所以①表示的一条闭曲线既在球心为 $(0, b, 0)$,半径为 a 的球面上,又在平面 $z = \lambda x$ 上.(将 b 反号,就恰得第二个圆的方程)

其次证明这两个圆都在环面上. 对于①上的任一点,有

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2\cos^2\theta + b^2 + 2ab\sin\theta + a^2\sin^2\theta = \\ &(a^2 - b^2)\cos^2\theta + b^2 + 2ab\sin\theta + a^2\sin^2\theta = \\ &a^2 + 2ab\sin\theta + b^2\sin^2\theta = (a + b\sin\theta)^2 \end{aligned}$$

因为 $a > b$, $a + b\sin\theta > 0$,所以

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a + b\sin\theta$$

故 $$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta = b^2$$

这正是定义环面的方程. 于是,第一个圆的环面上. 同理可证明第二个圆也在环面上.

> B - 6 设三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的所有根均为实根. 试证:最大根与最小根之差不小于 $(a^2 - 3b)^{1/2}$ 或不大于 $2(a^2 - 3b)^{1/2}/3^{1/2}$.

解 设三个根为 r_1, r_2, r_3,且 $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$;又设 $r_2 = r_1 + u$, $r_3 = r_2 + v$,其中 u 和 v 为非负数,则有

$$a = -(r_1 + r_2 + r_3), b = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$$

于是 $$a^2 - 3b = \frac{1}{2}((r_1 - r_2)^2 + (r_2 - r_3)^2 + (r_3 - r_1)^2) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + (u + v)^2) = (u + v)^2 - uv$$

因为 u 和 v 为非负数,故有

$$a^2 - 3b \leqslant (u + v)^2$$

因为 $u+v$ 即是最大根与最小根之差,所以这个差至少为 $(a^2-3b)^{1/2}$.

另一方面,又有

$$u^2+v^2=\frac{1}{2}((u+v)^2+(u-v)^2)\geqslant\frac{1}{2}(u+v)^2$$

故
$$a^2-3b\geqslant\frac{3}{4}(u+v)^2$$

所以这个差 $u+v$ 又至多为 $(2/\sqrt{3})(a^2-3b)^{1/2}$.

B－7　试求四维超球面 $x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$ 的体积及其内部 $x^2+y^2+z^2+t^2<r^2$ 的超体积.

解　令 $V_4(r)$ 是超球面内部的超体积,即半径为 r 的四维球的超体积.如果超体积可垂直于 x 轴"切割",则有

$$V_4(r)=\int_{-r}^{r}V_3(\sqrt{r^2-x^2})\mathrm{d}x$$

其中,$V_3(\rho)=(4/3)\pi\rho^3$ 是半径为 ρ 的三维球的通常体积,所以

$$V_4(r)=(4/3)\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x$$

作代换 $x=r\sin\theta$,则

$$V_4(r)=\frac{4\pi r^4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi r^4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

为简化积分,这里两次用到了倍角公式 $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$.所以四维球的超体积为

$$V_4(r)=\frac{\pi r^4}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi^2r^4}{2}$$

令 $A_4(r)$ 是半径为 r 的超球面的三维体积.如果我们通过考虑同心球壳来计算 $V_4(r)$,则 A_4 与 V_4 可如下联系起来,即

$$V_4(r)=\int_0^r A_4(\rho)\mathrm{d}\rho$$

因此,由微积分基本定理有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V_4(r)=A_4(r)$,故

$$A_4(r)=2\pi^2r^3$$

第 12 届美国大学生数学竞赛

A－1 设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$为整系数$n$次多项式.若$a_0,a_n$及$f(1)$均为奇数,证明:$f(x)=0$没有有理根.

解 设$f(p/q)=0$,式中p与q是互素的整数,则

$$q^nf(p/q)=a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n=0 \quad ①$$

由此推知q整除a_0而p整除a_n,所以p与q都是奇数,因此

$$a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n\equiv$$
$$a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n=f(1)\equiv 1(\bmod 2)$$

这与 ① 矛盾.

A－2 试证:方程

$$(9-x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=(9-y^2)$$

的积分曲线是一族与一个固定的正方形相切的二次曲线.

解 方程 ① 在开正方形

$$S:-3<x<3,-3<y<3$$

内和在四个角域

$$Q_1:3<x,3<y$$
$$Q_2:x<-3,3<y$$
$$Q_3:x<-3,y<-3$$
$$Q_4:3<x,y<-3$$

内确定一个双值方向场.令U是这五个开区域的并.这方向场可以伸展到U的边界,但不包括边界线的交点$(\pm3,\pm3)$,剩下四个开的宽度为6的半无限条形根本没有方向场.我们首先在开区域U内讨论微分方程的解.

双值方向场U可以分解为由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=+\sqrt{\frac{9-y^2}{9-x^2}} \quad ②$$

与

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{\frac{9-y^2}{9-x^2}} \quad ③$$

给出的两个通常方向场.这两个方程右边在 U 上连续可微,所以穿过 U 的每一点每个方程有唯一的最大解.由于方程可分离变量,这些解显然能求出来.在 S 内,方程 ② 化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$$

解得

$$\arcsin\frac{y}{3}=\arcsin\frac{x}{3}+C \quad ④$$

因为 arcsin 取 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 之间的值,C 必定在 $-\pi$ 与 π 之间.同理,在 S 内由方程 ③ 解出

$$\arcsin\frac{y}{3}=-\arcsin\frac{x}{3}+D \quad ⑤$$

其中 $-\pi<D<\pi$.

在各角域上 ② 成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-9}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}}$$

解这得

$$\operatorname{arch}\frac{1}{3}|y|=\operatorname{arch}\frac{1}{3}|x|+E \quad ⑥$$

式中 E 可有任意的值.解方程 ③ 得

$$\operatorname{arch}\frac{1}{3}|y|=-\operatorname{arch}\frac{1}{3}|x|+F \quad ⑦$$

对 ④ 的两边取正弦且用加法公式,就得

$$\frac{y}{3}=\frac{x}{3}\cos C+\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\sin C$$

去根号,化简得

$$x^2+y^2-2xy\cos C=9\sin^2 C \quad ⑧$$

对 ⑤,⑥,⑦ 作类似的变换得

$$x^2+y^2+2xy\cos D=9\sin^2 D \quad ⑨$$

$$x^2+y^2-2|xy|\operatorname{ch}E=-9\operatorname{sh}^2 E \quad ⑩$$

$$x^2+y^2+2|xy|\operatorname{ch}F=-9\operatorname{sh}^2 F \quad ⑪$$

因 $|xy|=+xy$ 或 $-xy$ 穿过任意单个的角域 Q_i,这些方程表明在开区域 U 上作为 ② 与 ③ 的所有的解的那些积分曲线是单参数曲线族

$$x^2+y^2-2\lambda xy=9(1-\lambda^2) \quad ⑫$$

的一部分.

从我们的论证推知至少有族 ⑫ 的两条曲线穿过 U 的每一点.事实上恰好有两条,因为给定 (x,y),当且仅当 ⑫ 作为 λ 的多

项式其判别式取正值时,恰好有 λ 的两个值满足 ⑫.这条件可化简为 $(x^2-9)(y^2-9)>0$,当且仅当 $(x,y)\in U$ 时此式成立.

除 $\lambda=\pm1$ 以外,曲线族 ⑫ 是与直线 $x=\pm3$ 及 $y=\pm3$ 相切的圆锥曲线.后一事实是显而易见的,作为例子,若我们在 ⑫ 内令 $x=3$ 并解出 y,我们得到二重根 $y=3\lambda$.当 $\lambda=\pm1$ 时,这些圆锥曲线退化为直线 $(x-y)^2=0$ 与 $(x+y)^2=0$.若我们互换 x 与 y 或者 $-x$ 与 y,方程 ⑫ 保持原状.所以这些圆锥曲线关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 都是对称的.当 $|\lambda|<1$ 时,⑫ 的判别式为负值,所以这些曲线是位于 $\overline{S}$ 内的椭圆(当 $\lambda=0$ 时是圆).当 $|\lambda|>1$ 时,判别式为正值,故曲线为双曲线,其每个分支位于闭角域 $\overline{Q_i}$ 之一上(图 1).

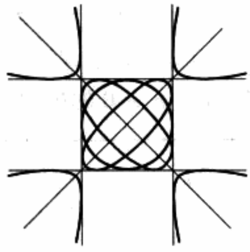


图 1

族 ⑫ 自然是适合本题的圆锥曲线族.值得注意的是我们可以直接从 ⑫ 导出微分方程 ①.对 ⑫ 按隐函数求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x-\lambda y}{y-\lambda x}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{(x^2+y^2-2\lambda xy)+(\lambda^2-1)y^2}{(x^2+y^2-2\lambda xy)+(\lambda^2-1)x^2}=\frac{9(1-\lambda^2)+(\lambda^2-1)y^2}{9(1-\lambda^2)+(\lambda^2-1)x^2}=\frac{9-y^2}{9-x^2}$$

它实质上等价于 ①.

现在我们转而注意在闭域 $\overline{U}$ 上 ① 的解.因为 ② 与 ③ 的右边不代表在 $\overline{U}$ 上处处可微的函数,解的唯一性可能在 U 的边界点上被破坏.例如 $y=3$ 与 $y=\sqrt{9-x^2}$ 都是 ① 的通过 $(0,3)$ 的解.我们可以将在 U 内适合 ① 的原解与直线 $y=\pm3$ 的各部分拼接起来,以得到 ① 的解族,于是

$$y=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & ,-3<x<0\\ 3 & ,0\leqslant x\leqslant 4\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-9)} & ,4\frac{1}{2}<x\end{cases}$$

确定一个适合于 ① 的解,它的图形包括在 S_1 内的圆的四分之一以及在 Q_1 内(对应于 $\lambda=3/2$)的双曲线的一部分(图 2).

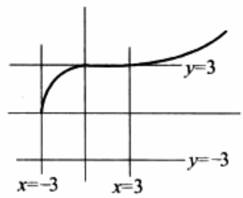


图 2

若我们将 ① 解释为对于平面曲线(包括可能不是这函数的图形的曲线)的一个微分方程,则由 ⑫ 确定的任一圆锥曲线的整体是一积分曲线.在这种解释下我们也可分出竖直线 $x=\pm3$ 的小段拼入得到的积分曲线,这种曲线是在 $\overline{S}$ 内以一种复杂的方式环绕着,如图 3 所示的那样.

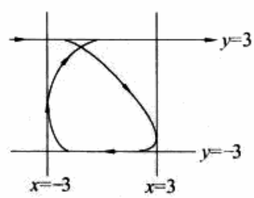


图 3

A－3　试求保证 r_1,r_2,r_3 与 r_1^2,r_2^2,r_3^2 都是方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的根的充要条件.

解　r_1,r_2,r_3 都是方程的根在代数意义上,即

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

然而题意究竟指 r_1^2,r_2^2,r_3^2 必须也是方程的全部根,或仅是根当中的一部分?就不那么清楚.例如,$x(x-1)(x+1)=0$ 有根 $r_1=0$,$r_2=1,r_3=-1$;而此时 $r_1^2=0,r_2^2=1,r_3^2=1$ 是根的一部分而不是全部根.下面我们将对每一种解释求出所有的多项式.

解法 1　r_1^2,r_2^2,r_3^2 是根的全部.

存在实质上不同的三种方式使得 r_1,r_2,r_3 与 r_1^2,r_2^2,r_3^2 一致,即可以排出下列三组对应关系

i $r_1^2=r_1,r_2^2=r_2,r_3^2=r_3$;

ii $r_1^2=r_1,r_2^2=r_3,r_3^2=r_2$;

iii $r_1^2=r_2,r_2^2=r_3,r_3^2=r_1$.

从 i 得 $r_i=0$ 或 $1(i=1,2,3)$.这对应于四个多项式 x^3,$x^2(x-1),x(x-1)^2,(x-1)^3$,可依次记为 f_1,f_2,f_3,f_4.

从 ii 得 $r_1=0$ 或 1,又 $r_2^4=r_2$.若 $r_2=0$ 或 1,则 $r_3=r_2^2=r_2$,这样得出的多项式已包含在 i 中.但还有两个新的解 $r_2=w$ 或 w^2,此处 w 是 1 的复立方根之一.这可得 $x(x^2+x+1)$ 及 $(x-1)\cdot(x^2+x+1)$,分别记为 f_5,f_6.

从 iii 得 $r_1^8=r_1$,即 $r_1(r_1-1)(r_1^6+r_1^5+r_1^4+r_1^3+r_1^2+r_1+1)=0$.其平凡根 $r_1=0$ 或 1 导出的情况已考虑过了.若令 $\alpha=\exp(2\pi i/7)$,即 1 的七次方根,则可得 $r_1=\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5,\alpha^6$.这六种情况导致两个多项式,其一有根 α,α^2,α^4 而另一有根 $\alpha^3,\alpha^5,\alpha^6$.这两个多项式必为

$$f_7(x)=x^3+\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x^2+\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x-1$$

$$f_8(x)=x^3+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)x^2+\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)x-1$$

解法 2　r_1^2,r_2^2,r_3^2 是根的一部分.

除了已在解释 1 求得的解以外,还要添加下面几种情况

iv $r_1^2=r_2^2=r_1,r_3^2=r_3$;

v $r_1^2=r_2^2=r_1,r_3^2=r_2$;

vi $r_1^2=r_2^2=r_3,r_3^2=r_1$;

vii $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = r_1$.

关系式 iv 仅当 $r_1 = 1, r_2 = -1$ 以及 $r_3 = 0$ 或 1 时产生新的多项式,为 $x(x^2-1)$ 与 $(x^2-1)(x-1)$.

关系式 v 当 $r_1 = 1, r_2 = -1$ 以及 $r_3 = \pm i$ 时产生新的多项式,为 $(x^2-1)(x-i)$ 与 $(x^2-1)(x+i)$.

关系式 vi 要求 $r_3^4 = r_3$. 其中根 $r_3 = 0,1$ 给出原先已得的多项式. 根 $r_3 = w, r_1 = w^2, r_2 = \pm w^2$ 以及 $r_3 = w^2, r_1 = w, r_2 = \pm w$(这里 w 是 1 的复立方根之一),产生四个新的多项式.

关系式 vii 产生一种新的情况 $r_1 = 1, r_2 = r_3 = -1$,对应的多项式为 $(x+1)^2(x-1)$.

因此在解释 2 的情况下所得新多项式为

$$f_9 = x(x^2-1)$$

$$f_{10} = (x^2-1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$$

$$f_{11} = (x^2-1)(x-i), f_{12} = (x^2-1)(x+i)$$

$$f_{13} = (x-w^2)(x-w^2)(x-w) = (x^2+x+1)(x-w^2)$$

$$f_{14} = (x-w^2)(x+w^2)(x-w) = (x^2+x+1)(x+w^2)$$

$$f_{15} = (x-w)(x-w)(x-w^2) = (x^2+x+1)(x-w)$$

$$f_{16} = (x-w)(x+w)(x-w^2) = (x^2+x+1)(x+w)$$

$$f_{17} = (x+1)^2(x-1)$$

A-4 联合国的会旗由地球的“极坐标”地图构成,以北极作为中心(极点),伸展到南纬 45°. 那些“平行”的纬线是同心圆,其半径分别与它们的余纬度成比例. 澳大利亚挨近地图的边缘,被南纬 30° 线所横贯. 试问在这个纬度附近,东西单位距离与南北单位距离在图上长度的比是多少?

解 令地球上具有余纬度 α 及经度 θ 的一点对应于旗帜地图上具有极坐标 $k\alpha$ 及 θ 的一点,这里 k 是比例常数.

令地球的半径为 R. 在地球表面一条经线长度为 πR 而在完整的旗帜地图上由长为 πk 的线段表出,则在南北方向上一段短距离 d 对应于旗帜地图上的距离 $d_1 = kd/R$.

在地球表面南纬 30°(= 余纬度 $2\pi/3$) 的小圆对应于旗帜地图上半径为 $2\pi k/3$ 而周长为 $4\pi^2 k/3$ 的圆. 在地球表面该圆的周长为 $2\pi R\sin(2\pi/3) = \pi R\sqrt{3}$.

因而东西方向上一段短距离 d 对应于旗帜地图上的距离是

$$d = \frac{4\pi^2 k/3}{\pi R\sqrt{3}} = \frac{4\pi kd}{3\sqrt{3}R} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}d_1$$

所以在南纬 30° 附近,东西单位距离与南北单位距离在图上

长度的比是 $4\pi : 3\sqrt{3} \approx 2.42$.

A - 5　设 $a_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是完全任意的数,没有一个等于 1,试证

$$a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - a_j) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - a_j)$$

解　题目的结论当 $n = 1$(表明空的和为0)及 $n = 2$ 时是真确的.设当 $n = k$ 时为真,即

$$a_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - a_j) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - a_i)$$

则
$$a_1 + \sum_{i=2}^{k+1} a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - a_j) =$$
$$a_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - a_j) + a_{k+1}\prod_{j=1}^{k}(1 - a_j) =$$
$$1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - a_i) + a_{k+1}\prod_{j=1}^{k}(1 - a_j) =$$
$$1 - \left|\prod_{i=1}^{k}(1 - a_i)\right|(1 - a_{k+1}) = 1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - a_i)$$

于是当 $n = k + 1$ 时结论亦真.根据数学归纳法推知对任何正整数 n 都是真确的.

A - 6　某人有一块长方形木料,尺寸为 $m \times n \times r\mathrm{cm}^3$($m,n,r$ 为整数).他将表面漆上油漆,然后切成 $1\ \mathrm{cm}^3$ 一个的小块,发现恰好有半数小块完全没有油漆.求证:具有这种特性而实质上不同的木块的数目是有限的(不必将它们都列举出来).

解　未沾油漆的立方块砌成尺寸为 $(m-2)\times(n-2)\times(r-2)$ 的长方块.因而问题的条件可表为

$$mnr = 2(m-2)(n-2)(r-2)$$

即
$$\frac{1}{2} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{r-2}{r}$$

假定 $m \leqslant n \leqslant r$,则

$$\left(\frac{m-2}{m}\right)^3 \leqslant \frac{1}{2} < \frac{m-2}{m}$$

故
$$\frac{1}{2} < \frac{m-2}{m} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

可得 $4 < m < 10$.于是最小的正整数 m 只能取几个可能的值.

固定 m,方程成为

$$\frac{m}{2(m-2)}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r-2}{r}$$

同上述理由,有

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\leqslant\frac{m}{2(m-2)}<\frac{n-2}{n}$$

由此得

$$\frac{m}{2(m-2)}<\frac{n-2}{n}<\left(\frac{m}{2(m-2)}\right)^{1/2}\leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}<1 \quad ①$$

于是对于一个固定的 m,只有有限个 n 适合.显然,对于固定的 m 与 n,至多有一个整数 r 能满足方程,所以总数有限.注意,去掉有序的假定 $m\leqslant n\leqslant r$ 之后,解的总组数至多为上面的6倍.

A－7　从某个圆的圆心引出一族方向线,其角度为 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$(从初始方向开始以弧度来量度).设这些线交圆周于 $P_0,P_1,P_{-1},P_2,P_{-2},\cdots$.试证:在圆周上不存在那样的区间,它不含有上述任何一个点 P(已知 π 是无理数).

解　各点 $P_0,P_{\pm1},P_{\pm2},\cdots$ 必互异,否则 π 将是一有理数(因为从 $P_i=P_j$ 推出 $j-i$ 是 2π 的整数倍).

令 I 为圆周上给定的一段弧,长度为 ε.选取 n 使得 $\varepsilon>2\pi/n$.点 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ 互异,将圆分为 n 段弧,每段长度至多为 $2\pi/n$.因此有指标 m 与 $m+k(k>0)$ 使得 P_m 与 P_{m+k} 界于长为 $\delta<\varepsilon$ 的一段弧内.设 q 是 $2\pi/\delta$ 内最大的整数,则 $P_m,P_{m+k},P_{m+2k},\cdots,P_{m+qk}$ 分圆周为每段长不超过 δ 的 $q+1$ 段弧.因为 I 比其中任一段弧都长,它一定包含 I 的某一点.

B－1　给定一个三角形的两边与夹角,有个笨人想到用余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 去求第三边 a.他这样用对数:求 $\ln b$ 并二倍之;加到 $\ln c$ 的二倍上;减去 $2,b,c,\cos A$ 的对数之和;将结果除以2;再取反对数.虽然他的做法易受怀疑,但他竟获得了正确得数.试问就三角形而论,这种做法能产生正确结果的充要条件是什么?

解　要使这笨人的运算程序也得到边长 a 的正确答案,当且仅当

$$\frac{b^2c^2}{2bc\cos A}=b^2+c^2-2bc\cos A$$

化为
$$(b-2c\cos A)\left(b-\frac{c}{2\cos A}\right)=0$$
故 $b=2c\cos A$ 或 $c=2b\cos A$.

条件 $b=2c\cos A$ 蕴涵 D(是自 B 所作的高的垂足)是 $\overline{AC}$ 的中点,从而 $\angle A=\angle C$.

反之,若 $\angle A=\angle C$,则 $b=2c\cos A$.

同理,条件 $c=2b\cos A$ 等价于 $\angle A=\angle B$.

所以,为了使得这笨人的运算程序导致正确的答案,其充要条件是 $\triangle ABC$ 为等腰三角形其一底角为 A(图 1).

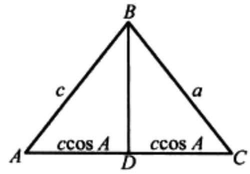


图 1

B-2　试求由 $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{xy}$ 的积分曲线族与圆 $y^2+z^2=1$, $x=0$ 相交所生成的曲面.

解　给出的微分方程组意味着在点 (x,y,z) 线素有方向数 yz,zx,xy,而我们寻求的曲线在每一点以规定的线素作为切线.然而在坐标轴上的点没有规定线素,因为 0,0,0 不是方向数组.此外,方向场不能连续开拓到坐标轴上,因为在坐标平面上规定的线素总是垂直于平面.在空间其余部分,方程组显然确定一族光滑的线素,因而通过定义域的每一点有唯一的最大积分曲线.我们来求这些曲线.

以 $2xyz$ 乘方程组得
$$2x\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y=2z\mathrm{d}z$$
积分,得
$$x^2=y^2+c_1=z^2+c_2 \qquad ①$$
一般这组方程表示两个双曲柱面的交集,它们分成四条连通的光滑曲线,其中每一条都是这微分方程组的最大积分曲线.例如,取 $c_1=-\alpha^2,c_2=-\beta^2,\alpha\beta\neq0$ 时,① 的两曲面都过点 $(0,\alpha,\beta)$ 且形如
$$y^2=x^2+\alpha^2,z^2=x^2+\beta^2 \qquad ②$$
它们的交集的四条曲线由下式给出,即
$$y=\pm\sqrt{x^2+\alpha^2},z=\pm\sqrt{x^2+\beta^2} \qquad ③$$
这些曲线中的一条过 $(0,\alpha,\beta)$. 若 $\alpha=0$ 而 $\beta\neq0$, 有两条过 $(0,0,\pm\beta)$ 的每一点.由于这些点不在原方程组的定义域内,在这种情况下除去这些点之后,③ 的四条曲线的每一条都分为两条最大积分曲线.

现在来求由与圆 $C:y^2+z^2=1,x=0$ 相交的积分曲线形成的曲面.显然这些解由 ② 和 $\alpha^2+\beta^2=1,\alpha\beta\neq0$ 给出,因而它们位于曲面

$$y^2+z^2=2x^2+1 \quad ④$$

上.这是关于 x 轴旋转对称的单叶双曲面方程.因 C 的四点必须从所考虑的条件下除去,我们期望这双曲面的一部分由过 C 的积分曲线来生成.事实上,若(x,y,z)在②上,因为 α^2 与 β^2 为正,则

$$y^2>x^2, z^2>x^2 \quad ⑤$$

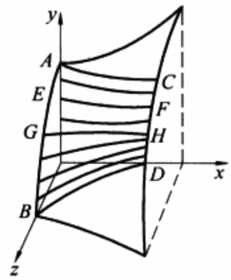
反之,若(x,y,z)满足④与⑤,则能选择正数 α 与 β 满足②和 $\alpha^2+\beta^2=1$.依赖于符号的适当选择,点(x,y,z)将位于交圆 C 于点$(0,\pm\alpha,\pm\beta)$之一的曲线③上.所以由方程④及不等式⑤给出所求的曲面.

曲线 C 在各象限的四段分别生成所求曲面的一部分,这四部分以下列奇积分曲线

$$y=\pm x, z=\pm\sqrt{x^2+1} \text{ 和 } y=\pm\sqrt{x^2+1}, z=\pm x$$

为界.

穿过图1中所示象限内的 C 的积分曲线生成单叶双曲面的一部分,这部分位于两条奇积分曲线之间.



单叶双曲面:$y^2+z^2=2x^2+1$,$A(0,1,0)$与 $B(0,0,1)$是被除去的点.曲线 AC 与 BD 为奇积分曲线.曲线 EF,GH 等为常积分曲线

图1

B-3 找出方程

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1-x & a_2-x \\ -a_1-x & 0 & a_3-x \\ -a_2-x & -a_3-x & 0 \end{vmatrix}=0 \quad ,a_i\neq 0$$

有重根的充要条件.

解 给出的行列式是

$$-2x^3+2(a_1a_2+a_2a_3-a_1a_3)x=0$$

它有重根的充要条件是

$$a_1a_2+a_2a_3-a_1a_3=0$$

若 $a_1a_2a_3\neq 0$,还可化为形如

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}$$

B-4 一个均匀的固体物件是由一个高为 h 半径为 r 的圆柱与一个半径为 r 的半球吻接而成,如图1所示.这物件以半球的顶点朝下放在水平桌面上,圆柱的轴处于竖直位置,因之容易摆动.我们显然直觉到若 r 比 h 大,这平衡是稳定的;而若 r 比 h 小,这平衡是不稳的.试问:要使此物件成随遇平衡,比值 r/h 的临界值应是多少?

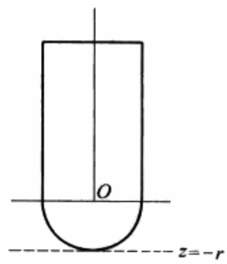


图1

解 因为物件是均匀的,故重心与形心相同.选定坐标系使

$z=0$ 是半球与圆柱相连部分的平面方程(此时物件竖直地放着);桌面的方程为 $z=-r$.

由圆柱面的对称性,只要考虑垂直于桌面且过接触点的截面就够了.若物件稍许倾斜,在相接触的点法向力 N 将通过点 O 起作用.

如果物件的形心位于 O 之上方,则由 N 和重力 W 形成的力偶将产生一个引起倾倒的转动.如果物件的形心位于 O 之下方,则这力偶将产生一个可恢复的转动.所以题目相当于确定 r 与 h 的比值使有形心位于 O.

由对称性我们只须考虑形心的 z^- 坐标.圆柱的形心的 z 坐标是 $h/2$,而质量为 $\pi r^2 h$.至于半球,其质量为 $(2/3)\pi r^3$,而其形心的 z 坐标为

$$\bar{z}=\frac{\int_{-r}^{0} z\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z}{(2/3)\pi r^3}=-(3/8)r$$

所以整个物件的形心位于原点当且仅当

$$(\pi r^2 h)\frac{h}{2}-\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)\left(\frac{3r}{8}\right)=0$$

即 $r^2=2h^2$,故 $r/h=\sqrt{2}$ 为所求的比值.这种形状的物件其重心位于支承点的正上方,无论何时这物件都静止于这半球面的任意一点处,所以是随遇平衡.

有关稳定平衡的问题还可参看第 10 届 B－4 题.

B－5　设数列 $\{a_n\}$ 是单调的,而且 $\sum_1^\infty a_n$ 收敛,试证:$\sum_1^\infty n(a_n-a_{n+1})$ 收敛。

解　因 $\sum a_n$ 收敛,故 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.又因数列单调,我们或者有

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$$

或有

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant 0$$

在第二种情形我们可以改变每项的符号.于是我们只须考虑所有的 a 非负且递降于零的情形而不失一般性.

令

$$S_K=\sum_{n=1}^{K} n(a_n-a_{n+1})$$

则 $S_K=a_1+a_2(2-1)+\cdots+a_K(K-(K-1))-Ka_{K+1}=$

$$\sum_{n=1}^{K} a_n-Ka_{K+1}$$

现在因$\sum_{1}^{\infty} a_n$收敛，由柯西准则推知

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}) = 0$$

但$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \geqslant na_{2n}$，故$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$，由此得$\lim_{n\to\infty} na_{n+1} = 0$.

在表达式$S_K = \sum_{n=1}^{K} a_n - Ka_{K+1}$中两个极限$\lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K} a_n$与$\lim_{K\to\infty}(Ka_{K+1})$都存在，所以

$$\lim_{K\to\infty} S_K = \lim_{K\to\infty}\sum_{1}^{K} a_n - \lim_{K\to\infty}(Ka_{K+1}) = \lim_{K\to\infty}\sum_{1}^{K} a_n$$

B－6　试证：内接于椭圆的三角形中，面积为最大的三角形的充要条件是它的形心与椭圆的中心重合.

解　设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

作仿射变换$u = x/a, v = y/b$，则xy平面的椭圆变成uv平面的圆$u^2 + v^2 = 1$.

在仿射变换下，内接于椭圆的三角形变为内接于圆的三角形；线段的中点变为线段的中点；三角形的形心变为三角形的形心；椭圆的中心变为圆的中心；而所有三角形的面积都被变为乘以某个常数所得的积. 所以我们只须证明：

（＊）内接于圆的三角形有最大面积的一个充要条件是它的形心与圆心重合.

现在要证的命题是圆的内接三角形，当且仅当为等边时有最大面积.

事实上，从图上显见若固定圆内接$\triangle ABC$的一边AB，则当AB上的高最大时其面积最大，而这在$AC = BC$时发生(图1)，因而如果存在一个面积最大的内接三角形，它必定是等边的.

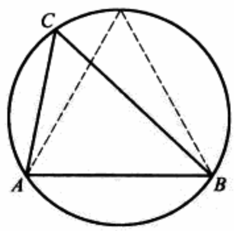


图1

至于最大面积的内接三角形之所以存在，是因为圆是紧致的，而面积是顶点的连续函数.

显然一等边三角形的形心与其外接圆的中心重合. 反之，若一三角形的形心与其外接圆圆心重合，则这三角形等边. 这可证明如下：设形心与外接圆心共点，则三角形的每一条中线与对应边上的中垂线有两个公共点，即边的中点与形心. 因为形心必为三角形的内点，故这两点不能重合，所以每条中线与中垂线重合，因而三角形是等边的.

B－7　给定任意实数 N_0，而 $N_{j+1} = \cos N_j$，证明：$\lim\limits_{j\to\infty} N_j$ 存在并且不依赖于 N_0.

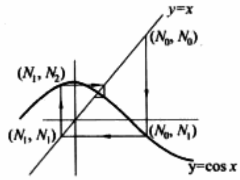


图 1

解　从关于递推的图解(图 1)法清楚可见，对于任意所选的 N_0，这数列收敛于方程 $x = \cos x$ 的唯一根.我们将这种分析形式化.

因为 $f(x) = x - \cos x$ 定义一个严格增函数(它的导数非负仅在孤立点为零)，$f(0) < 0$，而 $f(1) > 0$，故在 $(0,1)$ 内存在唯一的数 ξ 使得 $f(\xi) = 0$，即 $\cos \xi = \xi$.

由中值定理，对于任意的 x 存在一个 η 位于 x 与 ξ 之间使得

$$\cos x - \cos \xi = -(\sin \eta)(x - \xi)$$

若 $x \in [0,1]$，则 $\eta \in (0,1)$ 并且 $|\sin \eta| < \sin 1$，所以

$$|\cos x - \cos \xi| \leqslant (\sin 1)|x - \xi| \qquad ①$$

现在 $N_1 = \cos N_0 \in [-1,1]$，$N_2 = \cos N_1 \in [0,1]$，并且由归纳法当 $j \geqslant 2$ 时 $N_j \in [0,1]$.所以从 ① 得

$$|N_{j+1} - \xi| = |\cos N_j - \cos \xi| \leqslant (\sin 1)|N_j - \xi|$$

当 $j \geqslant 2$ 时成立，从而

$$|N_l - \xi| \leqslant (\sin 1)^{j-2}|N_2 - \xi|$$

当 $j \geqslant 2$ 时成立.因为 $\sin 1 < 1$，推知 $|N_j - \xi| \to 0$，所以

$$\lim_{j\to\infty} N_j = \xi$$

第 13 届美国大学生数学竞赛

A－1 试证：对于每个正整数 n，有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

解 对于正整数 K 及 $K-1\leqslant x<K$，我们有 $\sqrt{K}>\sqrt{x}$，所以 $\sqrt{K}>\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\mathrm{d}x$，相加则得

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} > \int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n^{3/2}$$

因为 $\sqrt{x}$ 的图形向下凹，由图 1 可清楚地看出

$$\frac{1}{2}(\sqrt{K-1}+\sqrt{K}) < \int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\mathrm{d}x \qquad ①$$

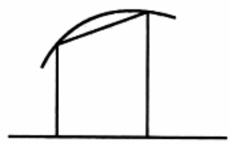


图 1

（即梯形面积接近积分值而小于该值）. 所以

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} = \frac{1}{2}(\sqrt{0}+\sqrt{1})+\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}\sqrt{n} < \int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

当然，不等式 ① 是可用解析方法证明的. 我们要用到关于梯形法作为一个积分的近似值的误差估值定理：

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续而 f'' 在开区间 (a,b) 内存在，则在 (a,b) 内存在一点 η 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3$$

就本题而言，可取 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=K-1$，$b=K$. 由于 f'' 在 $(0,+\infty)$ 上为负，就推得不等式 ①.

A－2　空间中六点没有三点共线，也没有四点共面．联结每两点所得的十五条线段中有一部分是红线，其余是蓝线．求证：存在一个三角形，以六点中的某三点为顶点，而它的边是同一种颜色．

解　设 P 为六点中任一点．以 P 为端点的五条线段中，至少有三条（比方说 PQ,PR,PS）必定有同样的颜色（如蓝色）．那么，如果线段 QR,RS,SQ 的任一条是蓝色，我们便得到一个蓝色的三角形，否则 QRS 就是红色三角形．于是在任何情况下至少存在一个各边同色的三角形．

A－3　设实数 x_1,x_2,x_3 其任意两数之和大于 3，求证

$$\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{j=1}^{3}x_j^2 > \sum_{i=1}^{3}x_i^3 + x_1x_2x_3$$

解　要证的不等式等价于

$$2\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right) > 3\sum x_i^3 + 3x_1x_2x_3 \qquad ①$$

置 $2a = x_2 + x_3 - x_1, 2b = x_3 + x_1 - x_2, 2c = x_1 + x_2 - x_3$

则 $$x_1 = b + c, x_2 = c + a, x_3 = a + b$$

于是 $$\sum x_i = 2\sum a$$

$$\sum x_i^2 = 2\sum a^2 + 2\sum ab$$

$$\sum x_i^3 = 2\sum a^3 + 3\sum a^2b$$

$$x_1x_2x_3 = \sum a^2b + 2abc$$

这里 $\sum a^2b$ 表示

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

对于别的和式也有类似的说明．① 的左边是

$$8\left(\sum a\right)\left(\sum a^2 + \sum ab\right) = 8\left(\sum a^3 + 2\sum a^2b + 3abc\right) \qquad ②$$

而 ① 的右边是

$$6\sum a^3 + 12\sum a^2b + 6abc \qquad ③$$

因为 a,b,c 都是正数，显然 ② 大于 ③．

A－4 试从恒等式

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln 2\mathrm{d}x$$

推算 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 的值.

解 令

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$$

(自然,这是一个广义积分,我们现在假定它是存在的)作替换 $x=\pi/2-u$ 及 $x=\pi-v$,得

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos u\mathrm{d}u=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin v\mathrm{d}v$$

所以 $\int_0^{\pi}\ln\sin v\mathrm{d}v=\int_0^{\pi/2}\ln\sin v\mathrm{d}v+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin v\mathrm{d}v=2I$

作替换 $v=2w$ 我们又有

$$\int_0^{\pi}\ln\sin v\mathrm{d}v=2\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2w\mathrm{d}w$$

则 $$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2w\mathrm{d}w=\int_0^{\pi/2}\ln 2\mathrm{d}w+\int_0^{\pi/2}\ln\sin w\mathrm{d}w+\int_0^{\pi/2}\ln\cos w\mathrm{d}w=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$$

故 $$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

为了证明上述推导的正确性,注意当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x\leqslant 1$$

从而 $$\ln x-\ln\frac{\pi}{2}<\ln\sin x\leqslant 0$$

现在 $$\int_{\varepsilon}^{1}\ln x\mathrm{d}x=-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon$$

所以 $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\ln x\mathrm{d}x=-1$$

故推知广义积分

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$$

存在.因而上面使用的几个替换现在都能按常规证明其正确性.

A－5 设从一点 P 能向抛物线作出三条法线.试证:这三条法线的倾角之和与联结 P 及焦点的直线之倾角相差 π 的倍数.

解 令抛物线的参数方程为 $x = at^2, y = 2at$，则在点 $(at^2, 2at)$ 的法线方程为 $tx + y - at^3 - 2at = 0$，斜率为 $-t$.

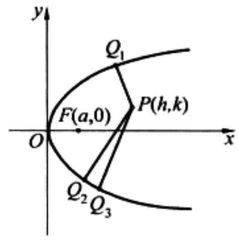


图 1

现在若在点 $Q_i(at_i^2, 2at_i)(i = 1,2,3)$ 的法线过 $P(h,k)$（图 1），则 t_i 必须是三次方程 $at^3 + (2a - h)t - k = 0$ 的根，因而 $t_1 + t_2 + t_3 = 0, t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 = (2a - h)/a, t_1t_2t_3 = k/a$.

令 Q_iP 的倾角为 α_i 而 PF 的倾角为 β，则对于某个整数 n，$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta + n\pi$ 当且仅当 $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \tan\beta$，但是

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3 - \tan\alpha_1\tan\alpha_2\tan\alpha_3}{1 - \tan\alpha_1\tan\alpha_2 - \tan\alpha_2\tan\alpha_3 - \tan\alpha_1\tan\alpha_3} =$$

$$\frac{-(t_1 + t_2 + t_3) + t_1t_2t_3}{1 - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3)} =$$

$$\frac{\frac{k}{a}}{1 - \frac{2a - h}{a}} = \frac{k}{h - a} = \tan\beta$$

A－6 证明：数列

$$\sqrt{7}, \sqrt{7 - \sqrt{7}}, \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \cdots$$

收敛，并计算其极限值.

解 令 $x_0 = \sqrt{7}, x_1 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, x_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, \cdots$. 该数列的通项由递推公式

$$x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}，当 n \geqslant 0$$

给出. 故有两个形如 $a_{n+1} = f(a_n)$ 的连锁递推公式，此处

$$f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$$

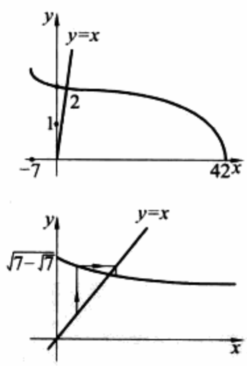


图 1

方程的图解（图 1）法表明对于以 f 的定义域内任意点为起点，这递推公式收敛于 2，它是 f 的唯一不动点. 下面我们给予解析的证明.

由中值定值有

$$|f(x) - 2| = |f(x) - f(2)| = |f'(\xi)||x - 2|$$

对于 2 与 x 之间的某个 ξ 成立. 若 $0 \leqslant x \leqslant 7$，则必定 $0 \leqslant \xi \leqslant 7$ 而且

$$|f'(\xi)| = \left| -\frac{-1}{4\sqrt{7 - \sqrt{7 + \xi}}\sqrt{7 + \xi}} \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{4\sqrt{7 - \sqrt{14}}\sqrt{7}} = \alpha < 1 \quad ①$$

所以当 $0 \leqslant x_n \leqslant 7$ 时

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant \alpha|x_n-2|$$

由于 x_0 与 x_1 都在这区间内，故 $0\leqslant x_n\leqslant 7$ 对所有 n 成立，从而

$$|x_{2k}-2|\leqslant \alpha^{2k}|x_0-2|$$

与

$$|x_{2k+1}-2|\leqslant \alpha^{2k}|x_1-2|$$

对所有正整数 k 成立. 因为 $\alpha<1$，就从这些不等式推知当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 2$.

> A－7 假定 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的根都是正实数. 试求 p，q，r 之间的一个关系式，使得该式的这些根是一个三角形的三内角的余弦值的充要条件.

解 对任意 $\triangle ABC$，有

$$a=b\cos C+c\cos B, b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

这是 a,b,c 的三元齐次线性方程组，因有非零解，故

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1 \quad ①$$

若方程

$$x^3+px^2+qx+r=0 \quad ②$$

的根是 $\cos A,\cos B,\cos C$，则

$$-p=\cos A+\cos B+\cos C$$

$$q=\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$

$$-r=\cos A\cos B\cos C$$

故 ① 成为

$$p^2-2q-2r=1 \quad ③$$

因而这是一个必要条件.

现在设 ③ 成立并且 ② 的根(记为 x_1,x_2,x_3) 都是正实数，则

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2x_3=1 \quad ④$$

从这里看出每个根位于 0 与 1 之间，故有唯一的一组锐角 A,B,C 使得 $x_1=\cos A,x_2=\cos B,x_3=\cos C$.

为了证明这些角是一三角形的内角，只要证明 $A+B+C=\pi$. 代入 ④ 得

$$\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1-\cos^2A-\cos^2B$$

将左边配成完全平方，得

$$(\cos C+\cos A\cos B)^2=\sin^2A\sin^2B$$

因这些角都是锐角,取正的平方根给出

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B$$

从而

$$\cos C = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B) = -\cos(A+B) = \cos(\pi - A - B)$$

由于 C 与 $\pi - A - B$ 都在 $(0,\pi)$ 内,所以 $C = \pi - A - B$,得所欲证.

这就是说,若 ② 的根都是正实数,则 ③ 是这些根为某个三角形各内角的余弦的充要条件.

B-1 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

收敛吗?试证明你的断语.

解 对于每个正整数 n,$n < 2^n$,所以 $n^{1/n} < 2$,故

$$\frac{1}{n^{(n+1)/n}} > \frac{1}{2n}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散,因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$ 发散.

B-2 若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实数而 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.假设对每个整数 i,$f(i)$ 为整数.求证:$n!a_k$ 对于每个 k 都是整数.

解 对于定义在 R 上的任意函数 g,令 Δg 是由

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$$

定义的一阶差分.又令 $\Delta^2 g = \Delta(\Delta g)$,$\Delta^3 g = \Delta(\Delta^2 g)$ 等,则如果 f 是次数小于等于 n 的一个多项式,便有

$$f(x) = f(0) + (\Delta f(0))x + \frac{1}{2!}(\Delta^2 f(0))x(x-1) + \frac{1}{3!}(\Delta^3 f(0))x(x-1)(x-2) + \cdots + \frac{1}{n!}(\Delta^n f(0))x(x-1)\cdots(x-n+1) \quad ①$$

(这是有限差分的泰勒级数.为证明 ① 的真确性,令 $g(x)$ 表示 ① 的右边,则显然 g 是次数至多为 n 的多项式,并且 $\Delta^i g(0) = \Delta^i f(0)$,$i = 0,1,\cdots,n$.又由数学归纳法推知 $g(i) = f(i)$,$i = 0,1,\cdots,n$.但是两个次数至多为 n 的多项式在 $n+1$ 个点相等必然恒等,故 $f = g$.)

由于给定的多项式 f 对于自变量的整值取整值，显然 $\Delta^i f(0)$ 是整数($i=0,1,2,\cdots$)，则从①易知 $n!f(x)$ 是关于 x 的整系数多项式.但是一个函数的多项式表达式的系数是唯一的(如果那样的表达式存在)，故 $n!a_k$ 是一个整数($k=0,1,\cdots,n$).

B－3　求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z(y+z)^n,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y(y+z)^n$$

其初始条件为:当 $x=0$ 时，$y=1,z=0$.

解　令 $u=y+z$，将两个给定的方程相加，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^{n+1} \qquad ①$$

这里当 $x=0$ 时 $u=1$.

我们暂时假定 $n\neq 0$，用分离变量法及初始条件得

$$u^n=\frac{1}{1-nx} \qquad ②$$

对于 $-\infty<x<1/n$(当 $n>0$) 以及对于 $1/n<x<+\infty$(当 $n<0$) 成立.

现在令 $v=y-z$ 并将原来的方程相减得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-vu^n=\frac{-v}{1-nx} \qquad ③$$

这里当 $x=0$ 时 $v=1$.再用分离变量法及初始条件，得

$$v^n=1-nx$$

所以

$$y=\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}((1-nx)^{-1/n}+(1-nx)^{1/n}) \qquad ④$$

$$z=\frac{1}{2}(u-v)=\frac{1}{2}((1-nx)^{-1/n}-(1-nx)^{1/n})$$

对于 $-\infty<x<1/n$(当 $n>0$) 以及对于 $1/n<x<+\infty$(当 $n<0$) 成立.

$n=0$ 的情况可用同法解之.在这种情况下 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=u$，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x=-v$，所以 $u=\mathrm{e}^x,v=\mathrm{e}^{-x}$，从而

$$y=\operatorname{ch}x \qquad ⑤$$
$$z=\operatorname{sh}x$$

对于所有的 x 成立.

若 n 是一个非负整数，原来的方程组在整个 $\mathbf{R}^3$ 是实解析的.然而对于 n 的别的值，沿着平面 $y+z=0$ 方程组显示某种病态(patholny)，所以解的唯一性的某些讨论是必要的.记区域 $y+z>0$ 为 S，微分方程组在 S 上是实解析的因而在 S 内的一积分曲

线不能"分裂".解④处于 S 内而且当 $x\to 1/n$ 时无界,推知它是这给定的微分方程满足初始条件的唯一的最大解.注意若 $-1<n<0$,则②不给出①的最大解,因为这解能被用当 $x\leqslant 1/n$ 时置 $u=0$ 的办法延拓到左边.

B－4 试确定三维笛卡儿空间内一个具有如下性质的曲面方程:

(1) 它通过点(1,1,1);

(2) 若在曲面上任一点 P 作切平面,分别与各坐标轴交于点 A,B,C,则 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

解 考虑穿过坐标轴上三个不同点 A,B,C 的任意平面 Π,且令 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.将这些点作为从原点发出的向量处理,用"(,)"表示两向量的内积,因坐标轴互相垂直,故 $(A,B)=(B,C)=(C,A)=0$,则垂心的性质成为

$$(P-A,B-C)=(P-B,C-A)=(P-C,A-B)=0$$

利用内积的线性性质,得

$$(P,B-C)=(P,C-A)=(P,A-B)=0$$

于是向量 P 正交于平面 Π.这意味着点 P 是从原点 O 向 Π 所引垂线的垂足.

在曲面上,这条件就是所有的法线通过原点,显然球面

$$x^2+y^2+z^2=3 \qquad ①$$

具有这样的性质并且通过所需要的点(1,1,1).

然而这种满足原来条件的曲面不能包含任一个坐标平面的点,因为由上面的分析,使得那样的点是一个顶点在各坐标轴上的三角形的垂心是不可能的.我们将证明满足这些条件的最大连通曲面是球面①的满足 $x>0,y>0,z>0$ 的部分.(我们只考虑连通曲面,因为没有这种限制的话,我们能随意将别的一些球的部分加起来)在这曲面上这个条件是形如

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)$$

的微分在曲面上为零.于是我们得出结论:$x^2+y^2+z^2$ 是常数.

因这曲面要包含点(1,1,1),故它必定是球面①的一部分.又因(如我们已经看到的)它不能包含坐标平面的点,故它必定完全位于第一象限.

B－5 试证:若将方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad ①$$

的根适当编号,则它们满足关系式

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4}$$

这里假定 $a^2d=c^2\neq 0$

解 兹证对于任意的具有根 r_1,r_2,r_3,r_4 的四次方程 ①,有

$$(r_1r_2-r_3r_4)(r_1r_3-r_4r_2)(r_1r_4-r_2r_3)=a^2d-c^2 \quad ②$$

将左边乘出来,得

$$\sum r_1^3r_2r_3r_4-\sum r_1^2r_2^2r_3^2$$

其中每个和号表示遍及由置换下标得到的全部不同项来求和.另一方面,因为

$$a=-\sum r_1, c=-\sum r_1r_2r_3, d=r_1r_2r_3r_4$$

故有

$$\begin{aligned}a^2d-c^2=&(\sum r_1^2+2\sum r_1r_2)r_1r_2r_3r_4-\\&(\sum r_1^2r_2^2r_3^2+2\sum r_1^2r_2^2r_3r_4)=\\&\sum r_1^3r_2r_3r_4-\sum r_1^2r_2^2r_3^2\end{aligned}$$

于是 ② 得证.

给定 $a^2d=c^2$,我们知道

$$(r_1r_2-r_3r_4)(r_1r_3-r_4r_2)(r_1r_4-r_2r_3)=0$$

所以必有一因子为零.只要重新整理根的编号,就能得到

$$r_1r_4-r_2r_3=0$$

因 $d\neq 0$,故没有一个根为零,从而可用 r_2r_4 除各项得

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4}$$

B－6 P 与 Q 是圆(C)(其圆心为 C)内满足 $CP=CQ$ 的任意两点.试确定(C)上一点 Z 的位置,使 $PZ+QZ$ 为最小.

解法1 设 PQ 的中垂线交(C)于 A 及 B.因 $|CP|=|CQ|$,故 C 位于 AB 上,并按 $|AP|\leqslant|BP|$ 来标记 A,B 两点.

考虑当 X 沿着(C)变化时的函数

$$X\rightarrow|PX|+|XQ|$$

由于对称性,它以 A 与 B 为临界点.设 Z 是任意别的临界点.以 P 与 Q 为焦点而过 Z 的椭圆(E)必与(C)相切于 Z.故(E)在 Z 的

法线为$\overrightarrow{CZ}$.若P,Q与Z共线,则$\overrightarrow{PQ}$是(E)在Z的法线,所以C在$\overrightarrow{PQ}$上.假定P,Q与Z不共线,令(D)为过P,Q及Z的圆.由椭圆的反射性知$\overrightarrow{CZ}$平分$\angle PZQ$.它交(D)于$\widehat{PQ}$的中点,这点在$\overrightarrow{AB}$上.因Z不在$\overrightarrow{AB}$上,故$\overrightarrow{CZ}$与$\overrightarrow{AB}$相异,因而必仅交于一点,此点必为C,于是P,Q,Z,C共圆.

于是,我们可用下面的作图法来找到任何不同于A,B的临界点.如图1所示,作过P,Q,C的圆(或直线).若这圆不与(C)相交或只交于点A,就没有别的临界点.然而如果这圆(或直线)交(C)于两点Z与Z',则这些点都是临界点,因为上段的论证不难倒过去证明焦点在P与Q而过Z的椭圆切(C)于Z和Z'.

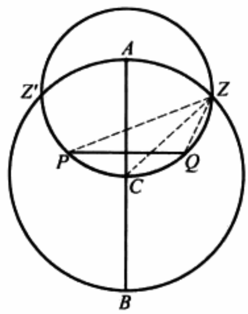


图 1

剩下的任务是确定这些新的临界点的性质.我们首先指出:若一椭圆与一圆切于两个不同点,则除了切点以外这两条曲线之一完全位于另一条的内部(这可以解析地证明:令圆方程为$x^2+y^2-a^2=0$,联结两切点的直线为$L=bx+cy-d=0$,则任意在这两点与圆相切的二次曲线为$x^2+y^2-a^2+\lambda L^2=0$.如果这二次曲线有一点在圆内,则在该点$x^2+y^2-a^2<0,L^2>0$,故$\lambda$必为正数.同理,如果这二次曲线有一点在圆外,则$\lambda<0$.所以,除了切点以外,整个二次曲线或者位于圆内或者位于圆外).在非共线的情形,椭圆(E)一定至少有一点在(C)内,即Z对$\overrightarrow{PQ}$的反射点,故圆在椭圆的外面,从而有

$$|PB|+|BQ|>|PA|+|AQ|>|PZ|+|ZQ|$$

在共线的情形

$$|PB|+|BQ|>|PA|+|AQ|>|PZ|+|ZQ|$$

由于我们的函数在两个临界点之间必为单调,所以在上述两种情形Z都是一个极小值点.由对称性,Z'也如此.

(用托勒密(Ptolemy)定理的现代说法,也可证实上述结论.因为$|CP|=|CQ|<|CZ|=|CZ'|$,点P和Q使C分别与Z和Z'隔开.考虑在(C)上任一点X,根据托勒密定理

$$|PX|\cdot|CQ|+|QX|\cdot|CP|\geqslant|CX|\cdot|PQ|$$

式中等号当且仅当P,Q,C,Z四点共圆或共线并且P和Q分隔C与X时成立,即当且仅当$X=Z$或Z'时成立.我们注意到$|CP|=|CQ|$及$|CX|=r$,r为(C)的半径,故有

$$|PX|+|QX|\geqslant r|PQ|/|CP|$$

式中等号当且仅当$X=Z$或Z'时成立.)

总之,若过P,Q,C的圆(或可能是直线)交(C)于两点,则这两点为极小值点.若不交于两点,则极小值点必是PQ的中垂线与(C)的交点中较近的一点.

解法 2 反演法使得前面的解法变得非常简洁.

设圆(C)有半径 r,又设 $\lambda = |PC|/r = |QC|/r$.在$\overrightarrow{CP}$上选 P' 且在$\overrightarrow{CQ}$上选 Q'(图 2)使得

$|CP'|\cdot|CP| = |CQ'|\cdot|CQ| = r^2$(即将 P,Q 各就此圆反演)

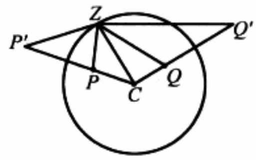


图 2

令 Z 是(C)的任一点.因为 $\triangle CZP' \backsim \triangle CPZ$ 以及 $\triangle CZQ' \backsim \triangle CQZ$,我们有

$$\lambda = \frac{|PC|}{|ZC|} = \frac{|PZ|}{|ZP'|} = \frac{|QZ|}{|ZQ'|} = \frac{|PZ|+|QZ|}{|ZP'|+|ZQ'|}$$

所以很清楚地看出在(C)上选择 Z 使得 $|PZ|+|QZ|$ 极小与 $|ZP'|+|ZQ'|$ 极小是一样的.但是下面问题的解是显然的:若$\overrightarrow{P'Q'}$的(C)相交,则极小值在两个(可能只一个)交点中之任何一点达到.若$\overrightarrow{P'Q'}$不与(C)相交,这极小值在(C)最接近于直线$\overrightarrow{P'Q'}$的点 A 处达到.(当如果 l 是切(C)于 A 的切线时,则 $|AP'|+|AQ'|<|ZP'|+|ZQ'|$ 对于 l 的所有的别的点 Z 成立,当然对于(C)的所有别的点 Z 也成立)

直线 $P'Q'$ 是解法 1 中所作圆(C)的反演.

B-7 设 W 为无理数,$0 < W < 1$.试证:W 有唯一的收敛的展开式

$$W = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0p_1} + \frac{1}{p_0p_1p_2} - \frac{1}{p_0p_1p_2p_3} + \cdots$$

式中,$p_0,p_1,p_2,\cdots$ 为整数且 $1 \leqslant p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$.如果 $W = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,试求 p_0,p_1,p_2.

解 在开始构造之前我们先考察一下.

若某无理数 α 适合 $0 < \alpha < 1$,则存在唯一的整数 P 使得

$$\frac{1}{P+1} < \alpha < \frac{1}{P} \quad ①$$

并且 P 是正数,$1 - P\alpha$ 是无理数,$0 < 1 - P\alpha < 1/(P+1)$.

现在归纳地定义一个 0 与 1 之间的无理数的数列 $w_0,w_1,w_2,\cdots$ 以及一个正整数列.

令 $w_0 = W$ 且设 P_0 为整数使得

$$\frac{1}{P_0+1} < w_0 < \frac{1}{P_0}$$

令 $w_1 = 1 - P_0w_0$(这是一个无理数,根据①,它位于 0 与 1 之间),又设 P_1 为整数使得

$$\frac{1}{P_1+1} < w_1 < \frac{1}{P_1}$$

在 w_{k-1} 与 P_{k-1} 已经如下定义

$$\frac{1}{P_{k-1}+1}<w_{k-1}<\frac{1}{P_{k-1}} \qquad ②$$

之后,令 $w_k=1-P_{k-1}w_{k-1}$,这是0与1之间的无理数,且令 P_k 是整数使得

$$\frac{1}{P_k+1}<w_k<\frac{1}{P_k}$$

从①与②知 $$w_k<\frac{1}{P_{k-1}+1}$$

故 $P_k\geqslant P_{k-1}+1$,所以这些 P 严格递增,现在

$$w_k=\frac{1}{P_k}-\frac{w_{k+1}}{P_k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

故对于所有的 k

$$w=w_0=\frac{1}{P_0}-\frac{w_1}{P_0}=\frac{1}{P_0}-\frac{1}{P_0P_1}+\frac{w_2}{P_0P_1}=$$

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{P_0P_1\cdots P_n}+(-1)^{k+1}\frac{w_{k+1}}{P_0P_1\cdots P_k} \qquad ③$$

这些 P 严格递增,故 $P_0P_1\cdots P_k\geqslant(k+1)!$ 而且这些 w 有界,故③的最后一项当 $k\to\infty$ 时趋于0,所以

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{P_0P_1\cdots P_n} \qquad ④$$

下面证明唯一性,设

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{q_0q_1\cdots q_n}$$

式④中 $P_0,P_1,P_2,\cdots$ 是正整数的一个严格递增数列.我们来证明,若利用上述构造法,则 $p_n=q_n$ 对所有的 n 成立.

因为④为各项绝对值严格递减的交错级数,我们有

$$\frac{1}{q_0}>w_0>\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}\geqslant\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0(q_0+1)}=\frac{1}{q_0+1}$$

故 $p_0=q_0$,而

$$w_1=1-p_0w_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{q_1q_2\cdots q_n}$$

归纳地反复进行这种论证求得 $p_{k-1}=q_{k-1}$,而

$$w_k=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^{n-k}}{q_kq_{k+1}\cdots q_n}$$

对于 $k=1,2,3,\cdots$ 成立,这就证明了展开式的唯一性.

如果 $w_0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,则 $p_0=1$.

$$w_1=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

故 $$p_1=[2+\sqrt{2}]=3$$

$$m_2 = 1 - 3\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4 + 3\sqrt{2}}$$

故

$$p_2 = [4 + 3\sqrt{2}] = 8$$

第14届美国大学生数学竞赛

A－1 设 n 为大于1的奇数，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 对称矩阵，其每行每列均由整数 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列构成. 求证：整数 $1,2,\cdots,n$ 必定都在 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上出现.

解 给出的集合中的每个整数在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中都出现 n 次. 由矩阵的对称性，与主对角线平行的“斜线”都成双出现. 因为 n 是奇数，所以每个整数必定在主对角线上至少出现一次；但主对角线上只有 n 个数，所以每个整数在主对角线上恰好出现一次.

A－2 在边长为1的正方形内任取五点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5，用 d_{ij} 表示点 P_i 与 P_j 之间的距离. 试证：至少有一个距离 $d_{ij}<\sqrt{2}/2$，又题目中之 $\sqrt{2}/2$ 能否用一个更小的数来取代？

解 设这正方形被分成每边长为 $\frac{1}{2}$ 的四个小正方形. 将每个小正方形作为闭集考虑，五点中必有两点落在同一个小正方形内，于是该两点的距离小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 原因是在以平行于正方形的边所作的坐标系上，这两点的纵、横坐标差都小于 1/2.

给定 $\varepsilon>0$，选取大正方形的中心作为一点，而其它四点取在对角线上且分别落入四个角落的 ε 范围（直角扇形）内. 这五点间的最小距离大于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\varepsilon$，所以没有比 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 更小的数能够适合本题.

A－3 试证：如果微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),p(x)\cdot q(x)\neq 0$$

的积分曲线族被直线 $x=k$ 所截，则在各交截点处的所有切线交于同一点.

解 光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 (k,m) 的切线方程是

$$y-m=f'(k)(x-k)$$

若 f 是给定的微分方程的一个解,则上述方程成为

$$y-m=[q(k)-mp(k)](x-k)$$

对于 m 的任意值,该切线都通过点

$$\left(k+\frac{1}{p(k)},\frac{q(k)}{p(k)}\right)$$

A-4 一根均匀连杆 AB 长为 $2K$ 重量为 W,其上端 A 撑在一堵光滑竖直的墙上,而下端 B 以长为 $2b$ 的绳子 BC 系着,点 C 固定在墙上点 A 的正上方.如果这系统处于平衡状态,试确定 $\angle ABC$ 的大小.

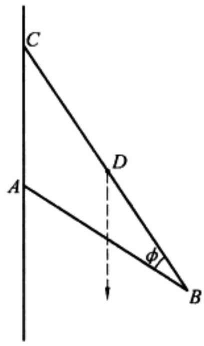


图 1

解 若连杆及绳子都竖直,即点 B 也在墙上,从而 $\angle ABC=0$,则此系统显然处于平衡状态.

假定连杆在其个非竖直位置也处于平衡状态,如图 1 所示.令 D 为 BC 的中点,绳子的张力与连杆的重力都作用于点 D(后者竖直地通过连杆的中点).故由平衡性知墙的反作用力也必定通过 D.因为墙是光滑的,故这力垂直于墙壁,所以得 AD 垂直于 AC,从而

$$|AC|^2+|AD|^2=|CD|^2=b^2$$

由余弦定理得

$$|AC|^2=4k^2+4b^2-8bk\cos\phi$$
$$|AD|^2=4k^2+b^2-4bk\cos\phi$$

所以 $$\cos\phi=\frac{2k^2+b^2}{3bk}=\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{k}$$

于是

$$\angle ABC=\arccos\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{k}\right) \quad ①$$

因为 $\angle ADB$ 与 $\angle CAB$ 为钝角,必有 $b<2k<2b$.又因为当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时有 $2x/3+1/3x<1$,故当 $1/2<k/b<1$ 时方程①确定唯一的锐角.这样,除了 B 在墙上以及这个锐角这两种情况以外,再没有别的平衡位置.

A－5　设实函数 $f(x)$ 定义于 $0 < x < 1$，以 $f(x) = o(x)$ 表示当 $x \to 0$ 时 $\frac{f(x)}{x} \to 0$.

试证下面的论断：若

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

以及

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$$

则

$$f(x) = o(x)$$

解　给定 $\varepsilon > 0$，选取 δ 使得对于所有满足 $0 < x < \delta$ 的 x 有

$$\left|\frac{1}{x}[f(x) - f(x/2)]\right| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad ①$$

现在固定 y，$0 < y < \delta$，则

$$f(y) = \left[f(y) - f\left(\frac{y}{2}\right)\right] + \left[f\left(\frac{y}{2}\right) - f\left(\frac{y}{4}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{y}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right] + f\left(\frac{y}{2^n}\right)$$

所以

$$|f(y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{y}{2^{i-1}}\right) - f\left(\frac{y}{2^i}\right)\right| + \left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{y}{2^i}\varepsilon + \left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right| = y\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right|$$

此处用到①．令 $n \to \infty$ 有

$$|f(y)| \leqslant \varepsilon y$$

因为当 $x \to 0$ 时 $f(x) \to 0$.

于是我们证明了：对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $0 < y < \delta$ 时有 $|f(y)/y| \leqslant \varepsilon$．由定义，这就是

$$f(x) = o(x)$$

A－6　设实数列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ 满足

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2, n = 0,1,2,\cdots \quad ①$$

试证：若 $\sum u_n$ 收敛，则对于所有的 k 有 $u_k = 0$.

解　从①显见项 u_n 非增且非负．于是，若某项为零，则它的后继项都如此，用①由归纳法，则它前面的项也都如此．

假设 $\sum u_n$ 收敛．选 P 使得 $\sum\limits_{n>P} u_n < 1$，则从①得

$$u_p = \sum_{n>p} u_n^2 \leqslant \sum_{n>p} u_p u_n \leqslant u_p \sum_{n>p} u_n \leqslant u_p$$

最后一步的等号仅当 $u_p = 0$ 时成立．但是，注意最左边和最右边，

则必须全部取等号.于是 $u_p = 0$,从而所有的 u 都为零.

A－7 证明:方程

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122 \quad ①$$

没有整数解.

解 将①乘以4并配成完全平方,得

$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 488 \quad ②$$

若①有一整数解,则②也有整数解,故得

$$u^2 \equiv 488 \pmod{17} \quad ③$$

但是③没有解,因为488不是17的一个二次剩余.证实这点的最直接的方法是检验 $u = 0,1,\cdots,8$ 时的可能性(我们不需考虑 $u = 9,\cdots,16$,因为 $u^2 \equiv (17 - u)^2$).我们可交替地用互反律及勒让德符号来计算,得

$$(488/17) = (12/17) = (2/17)^2(3/17) = (3/17) = (17/3) = (2/3) = -1$$

所以488不是17的二次剩余.

(关于二次互反律及勒让德符号,可参看例如华罗庚《数论导引》第三章——译者)

B－1 证明:对于任何正整数 a,方程 $x^2 - y^2 = a^3$ 总有整数解.

解 令 $x + y = a^2, x - y = a$,则 $x^2 - y^2 = a^3$,而 $x = \frac{1}{2}(a^2 + a), y = \frac{1}{2}(a^2 - a)$.由于 a^2 与 a 同为偶数或奇数,故 x 与 y 同为整数,从而对于每个整数 a 存在一解.

B－2 如所周知,交错调和级数

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \cdots \quad ①$$

收敛,用 s 表示它的和.将①重排如下

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots \quad ②$$

如所知②也收敛,用 S 表示它的和.分别记①与②的前 k 项部分和为 s_k 与 S_k.试证下列表达式

(1) $S_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$;(2) $S \neq s$.

解 (1) 我们有

$$s_{4n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1}{2}s_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{4n}$$

相加,得

$$s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = s_{3n}$$

(2) 因为 ① 是一个交错级数,其项递减于零,故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 存在,并且 $s > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,故 $s \neq 0$,所以

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{3}{2}s \neq s$$

注 如所周知,$s = \ln 2$.

> B－3 设 a 与 b 为适合 $a < b$ 的实数,记号 $[a,b]$ 表示包括端点 a,b 的闭区间.令 $[a_1,b_1],\cdots,[a_n,b_n]$ 为一给定的闭区间集,其中任意两个区间都至少有一公共点.求证:必存在一点,它是所有这些区间的公共点.

解 当且仅当 $c \leqslant f$ 及 $e \leqslant d$ 时,两个区间 $[c,d]$ 与 $[e,f]$ 交叠.

因为这些给定的区间中的任何两个都会交叠,我们有

$$a_n \leqslant b_p \qquad ①$$

对于所有的 n 和所有的 p 成立.所以 $\{a_n\}$ 囿于上(且非空),故可令 ξ 是 $\{a_n\}$ 的上确界.由于 ① 表明每个 b_p 是 $\{a_n\}$ 的一个上界,故对所有的 p 有 $\xi \leqslant b_p$,然而 $q_p \leqslant \xi$ 因为 ξ 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.于是对于每个 p 有 $\xi \in [a_p, b_p]$.

> B－4 给定一抛物线 P 的焦点 f 与准线 D 以及一条直线 L,试用欧氏作图(即尺规作图)找出 L 与 P 的交点,并加以证明.讨论 L 与 P 在何种情形下没有交点.

解 回忆一下 P 是到 f 及 D 等距的点的轨迹.

首先假定 L 既不平行又不垂直于 D,则交 D 于一点 O.为方便起见,选择坐标系使得 O 是原点,D 是 x 轴,f 在上半平面,L 是第一象限的一条射线其方向角为 α,$0 < \alpha < \pi/2$.令 β 是 $\overrightarrow{of}$ 的方向角,则 $0 < \beta < \pi$.

设 L 与 P 交于点 q. 以 q 为中心而经过 f 的圆周 C 就会与 D 相切于正半轴的某一点. 因为 $\overrightarrow{of}$ 与 C 相交, 故 $\beta \leqslant 2\alpha$(参看图 1). 于是若 $\beta > 2\alpha$, 则没有交点.

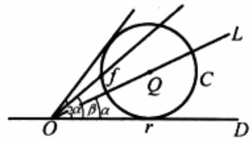


图 1

现在设 $\beta \leqslant 2\alpha$. 在这种情形我们将作出 $P \cap L$ 的一点, 事实上若 $\beta < 2\alpha$ 则有两点. 在 L 上选取任一点 q' 位于第一象限并引以 q' 为中心的圆 C' 与 D 相切. 因为 $\beta \leqslant 2\alpha$, 这射线 $\overrightarrow{of}$ 交 C' 于一点 f'(若 $\beta < 2\alpha$, 则两个交点都可选为 f'). 如果平面从点 O 按比值 $|of| : |of'|$ 伸展(或收缩), 则 f' 被映射到 f, q' 在 L 上被映射到 q, 而 C' 被映射为中心是 q 过 f 点且与 D 相切的圆 C. 但这蕴涵 q 到 f 与 D 等距, 故 $q \in L \cap P$. q 的欧氏作图得以实现.

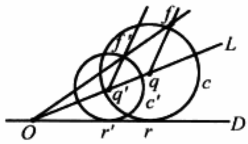


图 2

如果 $f \notin L$, 则 q 是 L 与平行于 $\overrightarrow{q'f'}$ 且过 f 的直线的交点(参看图 2). 如果 $f \in L$, 需要稍许改变作法. 例如, 设 r' 是 C' 与 D 的切点, 则引 $\overrightarrow{fr}$ 平行于 $\overrightarrow{f'r'}$ 交 D 于 r, 那么 q 为 L 与一条在 r 点垂直于 D 的直线的交点.

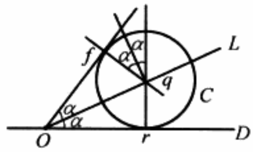


图 3

在 $\beta < 2\alpha$ 的情形, 对 f' 有两种选法从而导致 $L \cap P$ 的两个不同点. 若 $\beta = 2\alpha$, 则仅可求得 $L \cap P$ 的一点. 在上文第三段对题目的分析指出 $L \cap P$ 的每点必可由我们的作法而获得, 故在这种情形 $L \cap P$ 只一点从而 L 与 P 相切. (此外, 图 3 表明在点 q 所作 L 的法线平分 $\overrightarrow{qf}$ 与在 q 的竖直射线的夹角. 这是抛物线著名的反射性质)

现在考虑上面未谈到的情况. 如果 L 在点 O 垂直于 D, 则 L 必与 P 恰有一个交点(这是先前情形的极限情况, $\alpha = \pi/2$, 故当然 $\beta < 2\alpha$). 作法与前面所述一样, 但是虽然 $\overrightarrow{of}$ 交 C' 两次, 但交点之一为 O 从而没有 $L \cap P$ 的第二点. 如果 $f \in L$, 这时也按上面作法就会制作. 在这种情况下所求的交点是 of 的中点.

末了, 设 L 平行(或重合)于 D. 记其方程为 $y = a$, 且令 b 是 f 的 y 坐标(我们仍然假定 D 是 x 轴且 $b > 0$). 则可想出一个类似于先前的作法(即任作一个圆心在 L 上且与 D 相切的圆, 然后沿着 L 将它作相似变换, 如果可能使新的圆通过 f, 其圆心就是 $L \cap P$ 的点). 但是作一个中心在 f 半径等于从 L 到 D 的距离的圆更容易些. 这时显然 $E \cap L = L \cap P$. 不难看出 $L \cap P$ 含有 0, 1 或 2 个点, 分别按 $b > 2a$, $b = 2a$ 或 $b < 2a$ 而定. 应当注意, 这些情形分别是条件 $\beta > 2\alpha$, $\beta = 2\alpha$, $\beta < 2\alpha$ 当 L 是直线 $\overrightarrow{OS}$(其中 S 是上半平面的固定点)沿着 D 的左射线让 $0 \to +\infty$ 时的极限形式.

B－5　令 $f(x)$ 为定义于 $-1 < x < 1$ 的实值函数，且 $f'(0)$ 存在，又 a_n, b_n 是两个数列，满足

$$-1 < a_n < 0 < b_n < 1, \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$$

解　给定 $\varepsilon > 0$，则能选取 $\delta, 0 < \delta < 1$，使得对于所有适合 $0 < |x| < \delta$ 的 x，有

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

选取 k，使对于所有 $n \geqslant k$ 有

$$|a_n| < \delta \text{ 和 } |b_n| < \delta$$

则对于 $m \geqslant k$ 有

$$\left|\frac{f(a_m) - f(0)}{a_m} - f'(0)\right| < \varepsilon, \left|\frac{f(b_m) - f(0)}{b_m} - f'(0)\right| < \varepsilon \quad ①$$

但 $|f(b_m) - f(a_m) - (b_m - a_m)f'(0)| =$

$|(f(b_m) - f(0) - b_m f'(0)) - (f(a_m) - f(0) - a_m f'(0))| \leqslant$

$|f(b_m) - f(0) - b_m f'(0)| + |f(a_m) - f(0) - a_m f'(0)| \leqslant$

$\varepsilon |b_m| + \varepsilon |a_m| = \varepsilon(b_m - a_m)$

式中倒数第二步是从 ① 推出而最后一步从 $a_m < 0 < b_m$ 推知．所以

$$\left|\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

对于所有的 $m > k$ 成立．既然这对于任意的 $\varepsilon > 0$ 是真确的，我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$$

B－6　试证：每一个正有理数均可由级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 中有限多个相异项的和来表示．

解　首先考虑有理数 $r, 0 \leqslant r < 1$．我们来证明 r 能表为此调和级数的有限个相异项的和（若 $r = 0$ 则为“零个相异项的和”）．

当 $r = 0$ 时结论显然为真．若 $r = p/q$（此处 p 与 q 是正整数），则 $p = 1$ 时这结论也真．我们作归纳假设当 $p < P$ 时对于所有有理数 $p/q(<1)$ 可表为所要求的表达式．现在考虑一个有理数 $r = P/q < 1$．令 m 是适合 $1/m \leqslant P/q$ 的最小正整数．则由于 $P/q <$

$1, m \geqslant 2$,因而

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{P}{q} < \frac{1}{m-1}$$

故
$$mP - P < q \leqslant mP, 0 \leqslant mP - q < P$$

令 $R = (P/q) - (1/m)$,则 $R = (mP - q)/qm$,从而根据我们的归纳假设 R 是可由调和级数的有限个相异项来表达的.由于

$$R < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m(m-1)} \leqslant \frac{1}{m}$$

可见用在 R 在展开式中的项都不能是 $1/m$,所以 $r = P/q = R + 1/m$ 能表为调和级数的有限个相异项的和.于是具有分子 P 而小于 1 的有理数也可表为所要求的表达式.那么由归纳法推知所有小于 1 的有理数都可表为所要求的表达式.现在假定有理数 $r \geqslant 1$.令 S_n 为调和级数的前 n 项和,显然 S_n 是有理数.由于 $n \to \infty$ 时 $S_n \to \infty$,存在一个整数 $n \geqslant 1$ 使得 $S_n \leqslant r < S_{n+1}$,则 $r - S_n$ 是一个有理数,并且

$$r - S_n < S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} < 1 \qquad ①$$

故 $r' = r - S_n$ 能表为调和级数的有限个相异项的和.由 ①,这些项没有一项能在集合 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$ 之内.所以 r 是调和级数的前 n 项再配上那些用来表示 $r' = r - S_n$ 的有限个相异项的总和.并且所有这些项都是相异的.

B - 7 求证

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{a+s}{n}\right)^n \quad , a > 0$$

介于 e^n 与 e^{n+1} 之间.

解 可用

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x \qquad ①$$

来计算所求的极限值.上式当 $n > 0$ 且 $1 + x/n > 0$ 时成立.同时

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad ②$$

对于所有实数 x 成立.

令

$$S_n = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n-1}\left(1 + \frac{a-r}{n}\right)^n$$

由 $a > 0$ 及 ①,得

$$S_n \leqslant \sum_{r=0}^{n-1} \exp(a-r) < \sum_{r=0}^{\infty} \exp(a-r) = \frac{e^{a+1}}{e-1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sup S_n \leqslant \frac{e^{a+1}}{e-1} \quad ③$$

又,对于固定的 k 以及 $n > k$

$$S_n \geqslant \sum_{r=0}^{k} \left(1+\frac{a-r}{n}\right)^k$$

由 ②,当 $n \to \infty$ 时右边的极限存在,故

$$\lim_{n\to\infty} \inf S_n \geqslant \sum_{r=0}^{k} \exp(a-r)$$

由于 k 是任意的,我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \inf S_n \geqslant \sum_{r=0}^{\infty} \exp(a-r) = \frac{e^{a+1}}{e-1} \quad ④$$

比较 ③ 与 ④,得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{a+1}}{e-1}$$

显然 $1 < \frac{e}{e-1} < e$,故 $e^a < \lim_{n\to\infty} S_n < e^{a+1}$.

第15届美国大学生数学竞赛

A－1 试证：除了0,0,0以外，没有其他整数 m,n,p 使得 $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$.

解 **引理** 若 a 为正整数而$\sqrt{a}$ 不为整数，则$\sqrt{a}$ 为无理数．这可用反证法证明，从略．

$$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0 \qquad ①$$

而 m,n,p 均为整数，若 n 与 p 都为零，则 m 也为零．若 n 与 p 恰有一个为零，则不是$\sqrt{2}=-m/n$ 就是$\sqrt{3}=-m/p$，两者均与引理矛盾．若 n 与 p 都不为零，则

$$m^2=(n\sqrt{2}+p\sqrt{3})^2=2n^2+3p^2+2np\sqrt{6}$$

于是

$$\sqrt{6}=(m^2-2n^2-3p^2)/2np$$

又与引理矛盾．故只有 $m=0,n=0,p=0$ 能使 ① 成立．

A－2 $A_1A_2\cdots A_n$ 是半径为 r 中心为 O 之圆的一内接正多边形，P 是 OA_1 延长线上的一点．试证

$$\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=\overline{OP}^n-r^n$$

解 不妨假定这多边形的复平面上，圆心在原点而 A_1 在正实轴上，则其他顶点是 $r\omega,r\omega^2,\cdots,r\omega^{n-1}$，这里 ω 是1的 n 次原根．

设 P 在点 x，则$\overline{PA_i}=|x-r\omega^{i-1}|$，故

$$\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=\left|\prod_{i=1}^{n}(x-r\omega^{i-1})\right|=r^n\left|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{r}-\omega^{i-1}\right)\right|=$$
$$r^n\left|\left(\frac{x}{r}\right)^n-1\right|=|x^n-r^n|=x^n-r^n=$$
$$\overline{OP}^n-r^n$$

上面第三步用到因式分解

$$x^n-1=\prod_{i=1}^{n}(x-\omega^{i-1})$$

A－3　设 P 表示正项递减收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$（这里 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$）的一切（有限或无穷）子级数的和数的集合．求证：当且仅当对于每个整数 n 都有

$$x_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i \tag{①}$$

则 P 是一个区间．

解　用 N 表示正整数集合，J 是 N 的子集合．记 $S(J)$ 为 $\sum_{i \in J} x_i$．题目要求证明当且仅当①成立时 S 的值域是一个区间．

设①对于一个给定的数列不真．令 p 是使得

$$x_p > \sum_{i>p} x_i$$

的某个下标．选取 α 使得 $\sum_{i>p} x_i < \alpha < x_p$，则不存在 J 满足 $S(J) = \alpha$．这是因为若 $J \cap \{1,2,\cdots,p\} \neq \varnothing$，则由那些 x 的单调性有 $S(J) \geqslant x_p$，然而若 $J \cap \{1,2,\cdots,P\} = \varnothing$，则 $S(J) \leqslant \sum_{i>p} x_i$．既然 $\sum_{i>p} x_i$ 与 x_p 都在值域(S)内，我们看到(S)不是一个区间．必要性证毕．

现在设①成立且 $0 < y < S(N)$．我们将构造一个集合 L 使得 $S(L) = y$．我们归纳地定义一个数列 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 如下：令 n_1 是满足 $x_{n_1} < y$ 的最小下标（由于 $x_k \to 0$，这样的下标是存在的），假定已选得 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 适合

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k} < y$$

令 n_{k+1} 是大于 n_k 的最小下标使得

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k} + x_{n_{k+1}} < y$$

（我们再次声明，这样的下标是存在的）．

令 $L = \{n_1, n_2, \cdots\}$，显然

$$S(L) \leqslant y \tag{②}$$

如果 $p \in N - L$，则存在一个最小足标（用“足标”是提醒读者注意与前面“下标”所指对象有别）k 使得 $n_k > p$．在选定 n_k 时我们排除了 p，故

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_{k-1}} + x_p \geqslant y \tag{③}$$

从而

$$S(L) + x_p \geqslant y \tag{④}$$

我们把尚待证的部分分为两种情况．

i　集合 $N-L$ 为有限.注意 $N-L\neq\varnothing$,因为否则 $S(L)=S(N)>y$,这与②矛盾.所以 $N-L$ 有一个最大的元素,能作为④内的 p,则

$$L=\{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}\}\cup\{p+1,p+2,\cdots\}$$

综合①与③有

$$S(L)=x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_{k-1}}+\sum_{i>p}x_i\geqslant y$$

连同②就证得 $S(L)=y$.

ii　集合 $N-L$ 为无限.则对于任意的 $\varepsilon>0$,我们可取 $p\in N-L$ 使得 $x_p<\varepsilon$.则由④引出 $y\leqslant S(L)+\varepsilon$.由于 ε 是任意的,得 $y\leqslant S(L)$.这样仍有 $S(L)=y$.

因为 $S(\varnothing)=0$,推知值域$(S)=[0,S(N)]$.所以①是保证值域(S)是一个区间的充要条件.

A-4　在一圆周上选取 n 点,用弦将它们两两联结起来.假定这些弦除了在端点外,任何三条弦均不共点,试问它们有多少个交点?

解　圆周上任意四点恰好确定在圆内相交于一点的一对弦.又由题设推知这些交点各不相同,所以圆内共有 $\binom{n}{4}$ 个交点.

A-5　试用尺规作图法求出平面上一已知抛物线的焦点.

解　**分析**　考虑位于平行直线族 $\mathscr{F}$ 上的(抛物线的)一族弦,如所周知这些弦的中点落在平行于抛物线轴的一条直线上,这种直线称为抛物线的直径.一条直径与抛物线只交于一点,记为 P,则族 $\mathscr{F}$ 中过点 P 的那条直线与抛物线相切.由抛物线的焦点性质,过 P 的直径经在 P 的切线的镜面反射线必过焦点.故得

作法　引抛物线的任一弦又作另一弦平行于它,求这两弦的中点 A,B,作 $\overrightarrow{AB}$ 交抛物线于 P.引 $\overrightarrow{PQ}$ 平行于原来的弦且求 C 使得 $\angle APQ=\angle QPC$,这里 C 与 A 位于 $\overrightarrow{PQ}$ 两旁,焦点必在 $\overrightarrow{PC}$ 上.从不同于上述方向的另一弦开始,重复这种作法,又得另一条过焦点的直线.若与前一直线不同,则它们的交点就是焦点.为了避免这两条过焦点的直线重合,务必使两条初始弦既不平行又不垂直.因为若两条初始弦成角度 α,则作成的两直线就有 2α 的交角,所以,只要 $\alpha\neq0,\pi/2$,这两条直线就不重合.

A－6　试找出使得方程

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0 \qquad ①$$

有一个有理根的充要条件(此条件指正整数 n 的值).

解　当 n 为偶数时没有实根,因为左边各项非负且不能同时为零.

当 $n=1$,有唯一的实根 $x=-4$.

设 n 为不小于3的奇数,展开括号合并同类项,得非负整系数的多项式.首项系数为1,常数项为 2^{n+1}.则只可能有 -2^i 形式的根.若 $x=-1$,则左边三项全为奇数,不适合;若 $x=-2$,有 $(-2)^n+0+4^n\neq 0$,也不适合;若置 $x=-2^{p+1}$,$p\geqslant 1$,则①的左边为

$$2^n(-2^{pn}+(1-2^p)^n+(1+2^p)^n)=$$
$$2^n\left(-2^{pn}+2\left(1+\binom{n}{2}2^{2p}+\binom{n}{4}2^{4p}+\cdots\right)\right)$$

方括号内的表达式 $\equiv 2(\bmod 4)$(我们已假定 $n\geqslant 3$),故 -2^{p+1} 不是方程的根(当 $p\geqslant 1$).

总之,当且仅当 $n=1$ 时①有一个有理根.

A－7　研究由微分方程

$$f''(x)=(x^3+ax)f(x)$$

及初始条件 $f(0)=1$,$f'(0)=0$ 定义的函数 f.求证:f 的根有上界而无下界.

解　先证 f 的根有上界.令 α 是使当 $x\geqslant\alpha$ 时有 $x^3+ax>0$ 的一个数.我们来证明,除了零解以外,微分方程

$$y''-(x^3+ax)y=0 \qquad ①$$

的解在 $[\alpha,+\infty)$ 内的根不多于一个.用反证法.设 g 是①的非零解且对于 $\alpha\leqslant x_1<x_2$ 有 $g(x_1)=g(x_2)=0$,则 g 在 $[x_1,x_2]$ 上不是处处为零,必要时改变 g 的符号,不妨假定 g 在 $[x_1,x_2]$ 的某处为正.设 g 在 $[x_1,x_2]$ 内的 x_3 上取得极大值,则由极值判别法有 $g(x_3)>0$,$g'(x_3)=0$,$g''(x_3)\leqslant 0$.但是

$$g''(x_3)=(x_3^3+ax_3)g(x_3)>0$$

因为 $x_3\geqslant\alpha$.这矛盾说明①的一个非零解(特殊地是 f)在 $[\alpha,+\infty)$ 内至多有一根.所以 f 的根有上界.

次证 f 的根无下界.令 β 是使当 $x\leqslant\beta$ 时有 $x^3+ax<-1$ 的

一个数.我们来证明,对于任意选取的 $x_0 \leqslant \beta$,① 的每个根都有一根在 $(-\infty, x_0]$ 内.用反证法.设结论非真,则有一解 h 在 $(-\infty, x_0]$ 上不变号,必要时可改变 h 的符号,不妨假定 h 在此区间为正.对于任取的 $x_1 \leqslant x_0$ 由推广的中值定理有

$$h(x) = h(x_1) + (x - x_1)h'(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 h''(\xi) \quad ②$$

式中,ξ 在 x 与 x_1 之间.则若 $x \leqslant x_0$,有 $\xi < x_0$ 及 $h''(\xi) = (\xi^3 + a\xi)h(\xi) < 0$,从而

$$h(x) < h(x_1) + (x - x_1)h'(x_1)$$

如果我们能选取 x_1 使得 $h'(x_1) > 0$,上式表明对于绝对值大的负数 x 有 $h(x) < 0$,与我们的假定矛盾.故对于所有的 $x \leqslant x_0$ 有 $h'(x) \leqslant 0$.但是由这推出当 $x \leqslant x_0$ 时有 $h(x) \geqslant h(x_0)$.又因 $h''(\xi) = (\xi^2 + a\xi)h(\xi) < -h(x_0)$,则由 ② 得

$$h(x) < h(x_1) + (x - x_1)h'(x_1) - \frac{1}{2}(x - x_1)^2 h(x_0)$$

然而这表明对于绝对值充分大的负数 x,$h(x)$ 为负.这个矛盾说明 ① 的每个解(特殊地是 f)有绝对值任意大的负根.

B－1 一球沿着两条相交直线滚动,求其中心的轨迹.

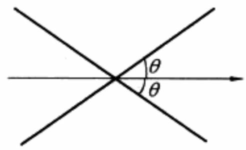


图 1

解 取坐标系使得给出的两条直线位于 xy 平面而 x 轴平分它们的一夹角,如图 1 所示.则两直线的法线式方程分别是

$$x\sin\theta - y\cos\theta = 0$$

与

$$x\sin\theta + y\cos\theta = 0$$

式中,$0 < \theta < \pi/2$.

从点 (x, y, z) 到两直线的距离的平方分别是 $z^2 + (x\sin\theta - y\cos\theta)^2$ 和 $z^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2$.球心必定在到两直线距离都为 r 的地方,故所求轨迹由两个方程

$$z^2 + (x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = r^2$$
$$z^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = r^2$$

联立给出.将它们相减,得 $4xy\sin\theta\cos\theta = 0$.可知轨迹位于平面 $x = 0$ 与 $y = 0$ 的并集上,即 yz 平面与 xz 平面上.在 yz 平面上的那一部分的方程为 $z^2 + y^2\cos^2\theta = r^2$,是一椭圆;在 xz 平面上的那一部分的方程为 $z^2 + x^2\sin^2\theta = r^2$,也是一椭圆,所以球心的轨迹就是这两椭圆的并集.

B－2 设函数 f 具有二阶连续导数且 $f(0)=0$. 试证：由 $g(0)=f'(0)$，$g(x)=f(x)/x(x\neq 0)$ 所定义的函数 g 有一阶连续导数.

解法1 显然，在 $R-\{0\}$ 上，g 有一阶连续导数（甚至二阶连续导数）

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

现在 f 在0可微，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=f'(0)$$

因而 g 在0连续.

为了求 $g'(0)$，我们必须考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

由推广的中值定理，对于每个 x 存在一个 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\theta x)$$

那么 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\theta x)=\frac{1}{2}f''(0)$$

因为 f'' 连续. 于是 g 在0可微且 $g'(0)=f''(0)/2$.

由中值定理，对于每个 x 存在一个 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$f'(x)-f'(0)=xf''(\eta x)$$

故有 $$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f''(\eta x)-\frac{1}{2}f''(\theta x)\right)=\frac{1}{2}f''(0)$$

从而 g' 在0连续.

解法2 注意

$$g(x)=\int_0^1 f'(xt)\mathrm{d}t$$

由于 f' 有一阶连续导数，我们可在积分号下求导且知 g' 存在，表达式为

$$g'(x)=\int_0^1 tf''(xt)\mathrm{d}t$$

因为 f'' 连续，故 g' 连续.

B－3 证明：不存在把一球冠映为平面之保距(distancepreserving)映射(在球冠上的距离是沿球面的大圆来度量的).

解 我们用 $\rho(A,B)$ 表示两点 A 与 B 之间的球面距离，而通常的欧氏距离用 $|AB|$ 表示.

设 $X\to X'$ 是将球冠映为平面的保距映射.令 A,B,C,D 是球冠上的四点使得 $ABCD$ 是三维空间内的一个欧氏正方形(注意，一个球冠必定含有这样的点集)，则 $\rho(A,B)=\rho(B,C)=\rho(C,D)=\rho(D,A)$ 且 $\rho(A,C)=\rho(B,D)$.由这些关系式推知

$$|A'B'|=|B'C'|=|C'D'|=|D'A'|,\ |A'C'|=|B'D'|$$

所以 $A'B'C'D'$ 是一正方形，故 $|A'C'|=\sqrt{2}|A'B'|$.因为映射是保距的，就有 $\rho(A,C)=\sqrt{2}\rho(A,B)$.由于 $ABCD$ 是正方形，又有 $|AC|=\sqrt{2}|AB|$，故

$$\frac{\rho(A,C)}{|AC|}=\frac{\rho(A,B)}{|AB|} \qquad ①$$

然而，$\rho(X,Y)/|XY|=\theta/\sin\theta$，式中 θ 是弧 XY 所对中心角的一半.$\theta/\sin\theta$ 是 θ 的一个严格增函数，从而也是 $|XY|$ 的严格增函数.又因为 $|AC|>|AB|$，所以 ① 不能成立.这矛盾证明了不存在将球冠映为平面的保距映射.

B－4 是否存在1 000 000个连续整数，其每一个都含有一个二重的素因子？

解 令 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 s 个相异素数，根据中国剩余定理(即孙子定理)，下列同余式组

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{p_1^2}\\ x &\equiv -2 \pmod{p_2^2}\\ &\vdots\\ x &\equiv -s \pmod{p_s^2}\end{aligned}$$

有一解，记为 n，则 s 个连续整数 $n+1,n+2,\cdots,n+s$ 每个有一个二重素因子，原因是 p_i^2 整除 $n+i$.既然我们可以取 $s=1\ 000\ 000$，故确实存在1 000 000个连续整数的数列，其每一项含有一个二重素因子.

B－5　给定一个由 0 与 1 组成的无穷序列和一个固定整数 K，设序列中含有 K 个相邻项的那种 K－数组中，彼此形式相异的不多于 K 组. 求证：这序列最终必为周期序列.（例如，序列 11011010101… 中省略未写的项全由 0 与 1 交替出现，则该序列就是从第五项开始的周期序列）

解　以下的证明是关于 K 运用归纳法. 显然，若至多存在一种 1－数组，则这数列是常数列，即周期为 1 的周期序列.

设每个至多具有 K 种不同的 K－数组的无穷序列最终是周期的，则给定一个至多具有 $K+1$ 种不同的 $(K+1)$－数组的无穷序列，确定当每一个这样的组在右边删去一数时会发生什么. 若我们用这方法得到小于 $K+1$ 种不同的 K－数组，则这给定的序列至多有 K 种不同的 K－数组，从而由归纳假设知所给的序列最终是周期的.

另一方面，若我们得到 $K+1$ 种不同的 K－数组，则每个 K－数组有某个唯一的扩张为 $(K+1)$－数组的添加数. 那么在原给定的序列内，对于某个 i，若第 i 个与第 $(i+p)$ 个 K－数组是相同的（这里 $p>0$），就推知第 $(i+K)$ 与第 $(i+p+K)$ 项是相同的. 所以第 $(i+1)$ 个与第 $(i+p+1)$ 个 K－数组是相同的，从而由归纳法推知序列是周期的，从第 i 项开始，周期为 p. 因为在这序列内至多存在 $K+1$ 个不同的 K－数组，故在前 $K+2$ 个组中必定出现一个重复组，所以周期性必定在不后于第 $(K+1)$ 项开始.

B－6　证明：若对于所有 x 有 $f(x)>0$ 且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$，则方程

$$f(m)+f(n)+f(p)=1 \qquad ①$$

至多存在数目有限的正整数解 m,n,p.

解　首先考虑 ① 也满足

$$f(m)\geqslant f(n)\geqslant f(p) \qquad ②$$

的解. 因 f 仅取正值，对于任意那样的解有

$$\frac{1}{3}\leqslant f(m)<1 \qquad ③$$

$$\frac{1}{2}(1-f(m))\leqslant f(n)<1-f(m) \qquad ④$$

$$f(p)=1-f(m)-f(n) \qquad ⑤$$

由于当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$，所以仅仅存在有限多的整数 m 满足

③;对于每个那样的 m 仅仅存在有限多的整数 n 满足 ④;而对于每个那样的数耦 m,n 仅仅存在有限多的整数 p 满足 ⑤.

于是 ① 的解中只有有限多个也满足 ②,但是 ① 的所有别的整数解是将这有限多个解的 m,n,p 置换而得,所以 ① 总共只有有限多个正整数解.

B - 7 一个物体在四个力作用下处于平衡状态.试证:若四个力的作用线互相偏斜,则它们必是一个双曲面的母线.

解 令四个力 F_1,F_2,F_3,F_4 分别沿直线 l_1,l_2,l_3,l_4 作用,并假定它们均不为0.

由于平衡,这些力关于任意直线 m 的总力矩必定为零.考虑一条与 l_1,l_2,l_3 中每一条都共面的直线 m,力 F_1,F_2,F_3 关于 m 分别有零力矩,故 F_4 也必定关于 m 有零力矩,则 m 也与 l_4 共面.

因而相互偏斜的直线 l_1,l_2,l_3,l_4 具有下述性质:任意与前三线的每一线共面的直线也与第四线共面.从这里推知它们是某个非退化二次曲面的母线.兹将证明略述如下.

非退化直纹二次曲面,通常分为单叶双曲面与双曲抛物面两类.前者有心,后者无心.用仿射的术语,我们可以说后者是那样的非退化直纹二次曲面,其母线的每一族平行于一固定平面.

可举出处于平衡状态的四个力沿着一个双曲抛物面的母线作用的例子.如 $F_1=\boldsymbol{j}$ 作用于(0,0,0),$F_2=-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 作用于(1,0,0),$F_3=3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 作用于(2,0,0),$F_4=-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 作用于(3,0,0).它们的作用线是双曲抛物面 $z=xy$ 的母线.

现在开始论证.为简洁起见用射影法处理.文中所称两条共面线总是指相交的.记 $p\vee l$ 表示包含点 p 与直线 l 的平面,p 是不在 l 上的一点.

令 l_1,l_2,l_3 为三条相互偏斜的直线,$\mathscr{M}$ 是与它们都相交的直线的集合.设 $p\in l_1$,则 $p\vee l_2$ 与 $p\vee l_3$ 是不同的平面(因为 l_2 与 l_3 相偏斜),从而任意过点 p 且与 l_2 及 l_3 都相交的直线位于这两平面上.所以 $(p\vee l_2)\cap(p\vee l_3)$ 是过 p 且与 l_2,l_3 都相交的唯一直线.这样,我们看到过 l_1 的每一点都有 $\mathscr{M}$ 的唯一直线.在 $\mathscr{M}$ 内这些直线的并集成为一个非退化二次曲面 Q,并且 l_1,l_2,l_3 整个地位于 Q 上.

令 l_4 是任意不同于 l_1,l_2,l_3 的直线,与 $\mathscr{M}$ 的每一直线相交.容易看出 l_1,l_2,l_3,l_4 是相互偏斜的.我们将证明 l_4 整个地位于 Q 上.若 $q\in l_4$,则 $n=(q\vee l_1)\cap(q\vee l_2)$ 是一条过 q 交 l_1 与 l_2

的直线.设它交 l_1 于 r.存在一条直线 $m \in \mathscr{M}$ 过 r 且(由我们关于 l_4 的假定)它与 l_4 相交,记交点为 s.现在若 $q \neq s$,则有两条直线 m 与 n 都过 r 且与 l_2, l_4 都相交.但这样的直线只有一条,就是 $(r \vee l_2) \cap (r \vee l_4)$,所以 $q = s \in m \subseteq Q$.因而 l_4 整个地位于 Q 上.即这四条直线都是非退化二次曲面 Q 的母线.证毕.

第16届美国大学生数学竞赛

A－1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$$

式中 $a>0,a\neq 1$.

解 令

$$f(x)=\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right]^{1/x}$$

则对于 $x>0$ 及 $a>1$,有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(a^x-1)}{x}$$

当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{\ln x}{x}\to 0,\frac{\ln(a-1)}{x}\to 0$,而

$$\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a\to\ln a$$

故
$$\ln f(x)\to\ln a$$

另一方面,若 $0<a<1$ 及 $x>0$,则

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x}$$

显然当 $x\to+\infty$ 时右边三项都趋于零.

由于 exp 是连续函数,故

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\exp\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\begin{cases}\exp\ln a=a & ,a>1\\ \exp 0=1 & ,0<a<1\end{cases}$$

或简记为
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\max(a,1)$$

A－2 试证:每一个正整数都有一个包含全部十个阿拉伯数字的倍数.

解 若 n 是一正整数而 p 是任一别的正整数,则下列整数 $p+1,p+2,\cdots,p+n$ 之一是 n 的倍数. 给定 n, 选取 $p=12\ 345\ 67\ 890\times 10^K$,式中 K 是使得 $10^K>n$ 的整数,则 $p+1,p+2,\cdots,p+n$ 都有以 1234567890… 开始的十进制表示,其中必有一

个是 n 的倍数.

A－3　一个质点在竖直平面内受重力以及垂直于它的速度向量且与速度成比例的力的作用,从静止开始下落.试求质点运动的轨道方程,并说明它是何种曲线.

解　设质点在时刻 t 的位置是 $\langle x(t), y(t)\rangle$,则速度向量由 $\langle x'(t), y'(t)\rangle$ 给出,而加速度向量由 $\langle x''(t), y''(t)\rangle$ 给出.我们选取坐标系使得质点初始位置在原点,x 轴为水平轴,y 轴为竖直轴.

因为向量 $\langle y'(t), -x'(t)\rangle$ 与速度向量垂直而长度相等,故运动的微分方程为

$$\langle x''(t), y''(t)\rangle = c\langle y'(t), -x'(t)\rangle + \langle 0, -g\rangle \qquad ①$$

式中 c 是将质点的质量综合在内的一个常数.初始条件为 $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.将①分为两个方程

$$x''(t) = cy'(t), y''(t) = -cx'(t) - g$$

对第一个方程求导,得

$$x'''(t) = cy''(t) = -c^2x'(t) - cg$$

标准形为

$$x'''(t) + c^2x'(t) = -cg \qquad ②$$

②所对应的齐次方程有三个线性无关解 $1, \sin ct, \cos ct$.非齐方程的试探解形如 kt,容易定出系数 k,得②的通解

$$x(t) = -gt/c + \alpha + \beta\cos ct + \gamma\sin ct$$

利用初始条件 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$(后者从 $y'(0) = 0$ 得知),故

$$x(t) = -\frac{gt}{c} + \frac{g}{c^2}\sin ct \qquad ③$$

所以

$$y' = x''/c = -g/c \cdot \sin ct$$

从而

$$y(t) = \frac{g}{c^2}(-1 + \cos ct) \qquad ④$$

这里用到初始条件 $y(0) = 0$.

于是③与④就是所求的运动曲线,为一旋轮线,是由半径为 g/c^2 的圆沿着 x 轴下缘以速度 $-g/c$ 滚动时圆周上一点的轨迹.

A－4 设 n 阶可微的实函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内至少有 $n+1$ 个不同的零点，而多项式 $P(Z)\equiv Z^n+C_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+C_0$ 只有实零点．求证：$(D^n+C_{n-1}D^{n-1}+\cdots+C_0)f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个零点，式中 D^n 是微分算子 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$．

解 首先证明：

引理 设 f 在 $[a,b]$ 内可微，且在此区间内有 $m+1$ 个不同的零点，则对于任意实数 λ，$(D-\lambda)f$ 在 $[a,b]$ 内至少有 m 个不同零点．

引理的证明 运用罗尔定理于恒等式

$$(D-\lambda)f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}D(\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x))$$

的右边，我们看到在 f 的任意两个相邻零点之间存在 $(D-\lambda)f$ 的一个零点．所以在 $[a,b]$ 内至少存在 m 个不同的零点．

现在可用归纳法证明题目的结论了．若 $n=1$，这正是引理当 $m=1$ 的情形．

假定当 $n=k$ 时结论为真．设 P 为 $k+1$ 次多项式而 f 为 $k+1$ 阶可微且在 $[a,b]$ 内有 $k+2$ 个不同零点．由于 P 的根都是实的，可记

$$P(Z)=Q(Z)(Z-\lambda)$$

式中，λ 是实数而 Q 是一个 k 次多项式，其全部根都是实数，则 $g=(D-\lambda)f$ 在 $[a,b]$ 内 k 阶可微且在 $[a,b]$ 内至少有 $k+1$ 个不同的零点（这是根据引理的 $m=k+1$ 的情形而得）．因此由归纳假设，$Q(D)g$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个零点．但是

$$Q(D)g=Q(D)(D-\lambda)f=P(D)f$$

于是当 $n=k+1$ 时结论也真．证毕．

A－5 把 n 个物体排为一行．如果这些物体的一个子集合中任何两元素均不相邻，则称这个子集合为不亲切的．证明：含有 k 个元素的不亲切子集合的个数是 $\binom{n-k+1}{k}$．

解 对于 n 个物体的有序集合的每个子集合 S，我们把它的元素按在 S 中的顺序排成一行，每个元素都记为 A，再在空位上补上若干个 B，两者总数为 n，便成为 A 与 B 的一个 n 级排列．其中如

果任何两个 A 都不相邻，则称这样的排列为不亲切排列．于是一个不亲切子集合对应于一个不亲切排列，从而我们必须证明由 k 个 A 与 $n-k$ 个 B 组成的不亲切排列的总数是 $\binom{n-k+1}{k}$．

我们将建立 k 个 A 及 $n-k$ 个 B 组成的所有不亲切排列与 k 个 A 及 $n-2k+1$ 个 B 组成的所有排列之间的一个双射对应．

给定 k 个 A 与 $n-k$ 个 B 的一个不亲切排列，把位于前 $k-1$ 个 A（即除了最末一个 A 以外所有的 A）的每一个的右边贴邻的 B 取掉．我们用这种方法得到 k 个 A 与 $n-2k+1$ 个 B 的一个排列．

反之，给定 k 个 A 与 $n-2k+1$ 个 B 的一个排列，在每个 A（除了最后一个 A 以外）的后面插入一个 B．我们用这种方法得到 k 个 A 与 $n-k$ 个 B 的一个不亲切排列．

显然，这两个变换是互逆的．因而两种排列的数目相同，都是 $\binom{n-k+1}{k}$．

A－6　(1) 设有一个变换把平面映为自身，且保持所有的有理距离不变．求证：它一定是保距变换．

(2) 试证：上述理论对于直线不真．

解　(1) 设 T 是将平面映为自身且保持有理距离的变换，用 $d(P,Q)$ 表示任意两点 P,Q 之间的距离．

令 A 与 B 是平面上任意两个不同点．给定任意正数 $\varepsilon<d(A,B)$，选取一个有理数 r 使得

$$d(A,B)-\varepsilon<r<d(A,B)$$

又选第二个有理数 s 使得 $s<\varepsilon$ 且 $r+s>d(A,B)$．则以 A 为圆心 r 为半径的圆与以 B 为圆心 s 为半径的圆相交．令 C 是一个交点，则 $d(A,C)=r, d(B,C)=s$．所以 $d(TA,TC)=r$，$d(TB,TC)=s$，故

$$r-s=d(TA,TC)-d(TB,TC)\leqslant d(TA,TB)\leqslant d(TA,TC)+d(TC,TB)=r+s$$

所以　$$d(A,B)-2\varepsilon<d(TA,TB)<d(A,B)+\varepsilon$$

由于 ε 可以取得任意小，这表明

$$d(TA,TB)=d(A,B)$$

又因为 A 与 B 是任意选取的，这就证明了 T 是保距的．

(2) 用 R 表示直线．考虑变换 $S(x)=x$（当 x 是有理数），$S(x)=x+1$（当 x 是无理数）．则 S 对所有有理距离保距，但不对所有的距离保距．例如 $d(0,\sqrt{2})=\sqrt{2}$，但 $d(S(0),S(\sqrt{2}))=d(0,\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1$．

A－7 证明:在任何有限的二项展开式中,系数为奇数的项,其个数一定是 2 的幂.

解 因为$(1+x)^2\equiv 1+x^2 \pmod 2$,从而由归纳法,当 β 是 2 的任意次幂时,$(1+x)^\beta\equiv 1+x^\beta \pmod 2$.

令二项式的指数是正整数 n,并将 n 表为

$$n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_s}$$

式中那些 α 是整数且 $0\leqslant \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s$(注意实际上这是 n 的二进制展开式).为方便起见,令 $\beta\sigma_i=2^{\alpha_i}$.于是我们记有限的二项展开式为

$$(1+x)^n=(1+x)^{\beta_1}(1+x)^{\beta_2}\cdots(1+x)^{\beta_s}\equiv$$
$$(1+x^{\beta_1})(1+x^{\beta_2})\cdots(1+x^{\beta_s}) \pmod 2$$

当最后的表达式乘出来的时候,显然有 2^s 项,每项有 x 的不同幂,因为每个非负整数作为 2 的不同幂的和(可能是空的)的表示法是唯一的,于是,$(1+x)^n$ 中恰有 2^s 项以奇数作为系数,这就是说恰有 2^s 个二项式系数$\binom{n}{i}$$(i=0,1,\cdots,n)$是奇数(上述论证表明 s 是在 n 的二进制表示法中数字 1 出现的个数).当 $n=0$ 时结论也有效.

B－1 设微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为齐次且恰当的,则它的解 $y=f(x)$ 满足 $xM+yN=C$(常数).

解 设 M 与 N 都是 K 次齐次函数,则由欧拉定理,有

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=KM$$

及

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=KN$$

若原给定的微分方程是恰当的,则

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

所以,如果两个条件都满足,就有

$$\mathrm{d}(xM+yN)=M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y+x\left(\frac{\partial M}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+$$
$$y\left(\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial N}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=$$

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + \left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + \left(x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}y = (K+1)(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$$

在 M 与 N 的整个定义域上关系式总成立.

现在设 $y = f(x)$（这里 f 定义在一个区间上）是给定的微分方程的解（即用 $f(x)$ 替换 y 就使得 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ 为零），则这替换将 $xM + yN$ 变为一个定义在上述区间上的函数 g 且 $\mathrm{d}g = 0$，所以 g 是一个常数，记为 $g(x) = C$. 这就是说 $y = f(x)$ 满足 $xM + yN = C$.

B-2　设平面上每个点集 X 都有一个叫做它的覆盖的伴随点集 $\overline{X}$. 又设

（*）$\overline{X \cup Y} \supset \overline{\overline{X}} \cup \overline{Y} \cup Y$，式中 $\cup$ 表示点集之和（并）而 $\supset$ 表示集合之包含.

试证：(1) $\overline{X} \supset X$；(2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$；(3) $X \supset Y$ 蕴涵 $\overline{X} \supset \overline{Y}$. 并证明其逆：(1)，(2)，(3) 蕴涵（*）.

解　在（*）内令 $Y = X$，则 $\overline{X} \supset \overline{\overline{X}} \cup \overline{X} \cup X$，由这里显见 $\overline{X} \supset X$，这就是(1).

从上面注意到 $\overline{X} \supset \overline{\overline{X}}$，又在(1)内用 $\overline{X}$ 替换 X 得 $\overline{\overline{X}} \supset \overline{X}$，所以 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$，这就是(2).

设 $Y \subset X$，则 $X \cup Y = X$，因而①化简为

$$\overline{X} \supset \overline{\overline{X}} \cup \overline{Y} \cup Y$$

因此 $\overline{X} \supset \overline{Y}$，这就是(3).

反过来，设(1)，(2)，(3)成立，对任意集合 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 我们有

$$X \subset X \cup Y$$

由(3)有

$$\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$$

故由(2)有

$$\overline{\overline{X}} \subset \overline{X \cup Y} \quad ①$$

又

$$Y \subset X \cup Y$$

且由(3)有

$$\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y} \quad ②$$

由(1)得

$$X \cup Y \subset \overline{X \cup Y}$$

故

$$Y \subset \overline{X \cup Y} \quad ③$$

现在从①，②，③一起得出

$$\overline{X \cup Y} \supset \overline{\overline{X}} \cup \overline{Y} \cup Y$$

这就是要求证的(*).

B-3 一个球内切于四面体,将每个切点与该点所在面的三顶点联结起来,这样形成的每面的三个角(以切点为顶点)组成一个集合.试证:这四个集合是相等的.

解 设四面体的顶点为 $P_i(i=1,2,3,4)$,又设 Q_i 是正对着 P_i 的面与球相切的切点.下文中我们用 i,j,k,l 表示$\{1,2,3,4\}$的不同元素.

由于 P_iQ_j 与 P_iQ_k 是从同一顶点向球所作切线,故 $|P_iQ_j|=|P_iQ_k|$,同理 $|P_lQ_j|=|P_lQ_k|$,所以 $\triangle P_iQ_jP_l \cong \triangle P_iQ_kP_l$(SSS),则 $\angle P_iQ_jP_l=\angle P_iQ_kP_l$.我们以 $|il|$ 表示这种角.显然

$$|il|=|li| \qquad ①$$

由于以 Q_i 为顶点的三个角相加是 2π,故有

$$|23|+|34|+|42|=2\pi,\ |34|+|41|+|13|=2\pi$$

$$|41|+|12|+|24|=2\pi,\ |12|+|23|+|31|=2\pi$$

将这些方程的前两个相加减去后两个,且利用①,得 $2\cdot|34|-2\cdot|12|=0$,故 $|12|=|34|$,又由对称性得

$$|ij|=|kl| \qquad ②$$

以 Q_1 为顶点的角是 $|23|,|34|,|42|$,由②,它们分别等于以 Q_2 为顶点的三个角,即 $|41|,|34|,|13|$.由对称性,在所有四个面上的中心角都有同样的情形.

B-4 试证:若 A,B,C 是三角形的三内角,均以弧度度量,则 $A\cos B+\sin A\cos C>0$.

解 分两种情形研究.

i $0<B<\pi/2$.则 $\cos B>0$,因 $A>0$,故 $A>\sin A$.所以 $A\cos B>\sin A\cos B$.又 $C=\pi-A-B<\pi-B$,及 $0<C<\pi$,故 $\cos C>\cos(\pi-B)=-\cos B$.因而 $\cos B+\cos C>0$.所以

$$A\cos B+\sin A\cos C>\sin A(\cos B+\cos C)>0$$

ii $\pi/2\leqslant B<\pi$.则 $\cos B\leqslant 0,0<A<\pi/2$,故 $A<\tan A$,且 $\tan A>0$.因而 $A\cos B\geqslant \tan A\cos B$.又 $B=\pi-A-C$,故

$$\cos B+\cos A\cos C=-\cos(A+C)+\cos A\cos C=\sin A\sin B>0$$

所以

$$A\cos B+\sin A\cos C\geqslant \tan A\cos B+\sin A\cos C=\tan A(\cos B+\cos A\cos C)>0$$

B－5 考虑空间 $2n(n>1)$ 个点的集合. 设它们之间至少用 n^2+1 条线段相连,则至少形成一个三角形,并证明:对于每个 n,若 $2n$ 个点由 n^2 条线段连成,则可能有不形成任何三角形的情况.

解 用记号 T_n 表示命题:若 $2n$ 个点由至少 n^2+1 条线段联结,则形成一个三角形. 我们用归纳法来证明 T_n.

设 A,B,C,D 四点由至少五条线段联结,则至多还缺少一条连线,记为 AB,于是 BCD 形成一个三角形. 因而 T_2 为真.

现在假定 T_k 为真. 给定 $2(k+1)$ 个点,它们由至少 $(k+1)^2+1$ 条线段联结起来. 令 A 与 B 是连有线段的两点,又令 δ 是其余 $2k$ 个点的集合. 设 δ 的 p 个点与 A 联结而 δ 的 q 个点与 B 联结. 若 $p+q>2k$,则 δ 的某个点 C 与 A 及 B 两者都联结,ABC 就是一个三角形. 若 $p+q\leqslant 2k$,则至多 $2k+1$ 条线段以 A 或 B 为端点,并且至少与 δ 的

$$(k+1)^2+1-(2k+1)=k^2+1$$

个点联结. 由 T_k 知 δ 的某三点形成一个三角形,于是 T_{k+1} 也真. 所以,对于所有 $n>1$(若 $n=1$,则将连线算做空集),T_n 都是真确的. 为了证明 $2n$ 个点能用 n^2 条线段联结而不形成任何三角形,将点分为两个集合 S,T,每个各含 n 个元素. 若 S 的每一点与 T 的每一点联结,则用去了 n^2 条线段而没有形成一个三角形.

B－6 给定 $T_1=2, T_{n+1}=T_n^2-T_n+1, n>0$,证明:

(1) 若 $m\neq n$,则 T_m 与 T_n 没有大于 1 的公因子.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{T_i}=1$.

解 这序列的前几项是 $T_1=2, T_2=3, T_3=7$,我们用归纳法证明

$$T_{n+1}=1+\prod_{i=1}^{n}T_i, n\geqslant 1 \qquad ①$$

当 $n=1$ 它是真确的. 设它当 $n=k$ 时真确,则

$$T_{k+2}=1+T_{k+1}(T_{k+1}-1)=1+T_{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k}T_i\right)=1+\prod_{i=1}^{k+1}T_i$$

(上面第一步由给定的递推公式,第二步由归纳假设)

现在设 $m\neq n$,不妨设 $m<n$,则 ① 表明 T_m 整除 T_n-1,故 T_m 与 T_n 互素. 这就是(1).

下面我们用归纳法证明对于所有的 n 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}=1-\frac{1}{T_{n+1}-1} \qquad ②$$

当 $n=1$ 时上式为真,而且若当 $n=k$ 时为真,则

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{T_i}=1-\frac{1}{T_{k+1}-1}+\frac{1}{T_{k+1}}=1-\frac{1}{T_{k+1}(T_{k+1}-1)}=$$
$$1-\frac{1}{T_{k+2}-1}$$

于是 ② 成立.

因为当 $n\to\infty$ 时 $T_n\to\infty$,故从 ② 推知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{T_i}=1$$

B-7 设复系数多项式 $P(Z)$ 与 $Q(Z)$ 有相同的零点集合但零点的重数可能不同,且

$$P(Z)+1 \quad 与 \quad Q(Z)+1$$

亦具有上述性质,试证:$P(Z)\equiv Q(Z)$.

解 命题对于零次多项式不成立,故应假定这两多项式至少有一个不是常数.设 P 的次数为 m,Q 的次数为 n.由对称性可假定 $m\geqslant n$.令 P 的不同的零点是$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$,又令 $P+1$ 的不同的零点是$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\}$.这两个集合显然不相交.求 P 及 $P+1$ 的导数,都是 P',将重数计人,它必定至少有$(m-r)$个零点在$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$,内而$(m-s)$个零点在$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\}$内,所以$(m+r)+(m-s)\leqslant m-1$,不等号右边是 P' 的次数(这里假定 $m>0$),于是 $r+s>m$.但是 $r+s$ 个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 中的每一数都是$P-Q$ 的一个零点.而多项式 $P-Q$ 的次数至多为 m,这就推知 $P(Z)\equiv Q(Z)$.

第17届美国大学生数学竞赛

A－1 若曲面的法线都与一条固定直线相交，求证：这曲面必为一个回转曲面的一部分.

解 这题目叙述不当.观察图1所绘的一个缺损圆柱面与一个球冠的一部分连成的曲面，发现这个连通的 C' － 曲面满足题目的假设但不符合结论.因而需要对术语"曲面"作适当的诠释才能适应题目的结论.可举出更加复杂的这种例子，事实上，存在一个满足假设的 C^{∞} － 曲面 S 使得最小的包含 S 的旋转不变集合可包括任何指定的可数个回转 C^{∞} － 曲面的并.

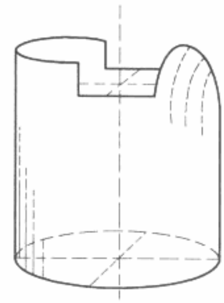


图1

本题原来的解答载于《美国数学月刊》1961年，当时未发现题目的错误.特译出附此，供参考：

设 L 为定直线，考虑过 L 上点 O 又垂直于 L 的平面与曲面相截所成之平面曲线.若 P 为此曲线上的任一点且不在 L 上，则 OP 是曲面法线之投影.从而 OP 为所截得的曲线的法线.不难证明，如果一平面曲线的所有法线都通过一固定点，则该曲线必是以固定点为中心的一个圆.于是引出结论.

改变原题的假设及结论，我们得到与原题不同的两个好的结果.由上面看出这问题需要相当的技巧，我们从曲面的定义开始.设 E 是三维欧氏空间.

定义 所谓 E 的一个子集 S 是一个 C^1 － 曲面，是指当且仅当对于每个点 $p \in S$，在 E 内存在 p 的一个开邻域 N 以及一个梯度非零的 C^1 － 函数 $f: N \to R$，使得 $S \cap N$ 是 f 的零(点的)集合.

我们需要下列事实.若 S 为一 C^1 － 曲面且 $p \in S$，则存在唯一平面切 S 于 p，并且若 π 是任意别的过 p 的平面，则在 E 内存在 p 的一个邻域 U 使得 $\pi \cap S \cap U$ 是一条过 p(即 p 不是一个端点)的曲线，它是有非奇异的 C^1 － 参数式.这可从隐函数定理推知.

我们考虑 E 内一个 C^1 － 曲面，它处处具有这样的性质：它的所有的法线都与一条固定直线 l 相交.设 $p \in E - l$，而 $C(p)$ 是过

p 的圆,这圆所在的平面垂直于 l,而圆心在 l 上.我们注意到以 l 为轴的一个回转曲面具有下述性质:当任意点 p 不在 l 上的时候,该曲面就含有整个圆周 $C(p)$.

引理1 设一条连绵的 C^1 - 曲线 A 位于一平面 π 内,而 A 在 π 内的所有法线交于一固定点 $b \notin A$,则 A 位于一个以 b 为中心的圆周上.

引理1的证明 在 π 内取直角坐标系,以 b 为原点.由于在 A 上任一点 p,直线 pb 必垂直于 A 的切线.这意味着 A 的切线都位于微分方程

$$xdx + ydy = 0 \quad ①$$

的方向场上,即 A 是 ① 的一条积分曲线.因为在 $\pi - \{b\}$ 上 ① 是非奇异的,则 $\pi - \{b\}$ 内 ① 的任意连绵积分曲线位于唯一的一条最大积分曲线上.① 的这条最大积分曲线显然是以 b 为中心的圆.证毕.

引理2 令 π 是一个垂直于 l 的平面.则在 $\pi \cap S - l$ 上的任意连绵 C^1 - 曲线位于关于某点 p 的一圆周 $C(p)$ 上.

引理2的证明 令 A 是在 $\pi \cap S - l$ 上的一条连绵的 C^1 - 曲线.我们证明 A 的所有法线过 $\pi \cap l$.

设 q 是 A 的任一点,τ 是切 S 于 q 的平面.则 $\tau \neq \pi$,因为 π 在 q 的法线不与 l 相交.A 在 q 的切线位于 π 与 τ 两者之内,即 $\pi \cap \tau$.又因为 π 与 τ 分别垂直于由 q 与 l(即 l 与 S 在 q 点的法线)形成的平面 σ 内的两条交线,则 $\pi \cap \tau$ 垂直于 σ.所以 $\pi \cap \sigma$ 是 A 在平面 π 内 q 点处的法线,它通过 $\pi \cap l$,这就证明了 A 的所有法线过点 $\pi \cap l$.则由引理1知 A 位于一圆 $C(p)$ 上.

引理3 令 $p \in S - l$,则 $C(p) \cap S$ 关于 $C(p)$ 开.

引理3的证明 令 π 是 $C(p)$ 所在的平面而 q 是 $C(p) \cap S$ 的任意点.现在 π 在 q 不切于 S,因为在 q 的 π 的法线不与 l 相交.所以 $\pi \cap S$ 包含一条过 q 的连绵 C^1 - 曲线 A.由引理2,A 位于 $C(q) = C(p)$ 上.由于 q 是在 $C(p) \cap S$ 内任意选取的,就推知 $C(p) \cap S$ 关于 $C(p)$ 开.

定理1 S 是一个回转曲面的局部,也就是对于 S 的每一点 p,在 E 内存在 p 的一个邻域 N 以及一个回转曲面 S^*,使得 $S \cap N = S^* \cap N$.

定理1的证明 我们以 l 为轴引用圆柱坐标 r, θ, z.

设 $p \in S - l$,我们取 p 的一个开邻域 N 如曲面定义中所述.如果必要可将 N 截下,我们可假定对于某个正数 ε

$$N = \{\langle \gamma, \theta, z \rangle \mid |r - r(p)| < \varepsilon, |\theta - \theta(p)| < \varepsilon, z - z(p)| < \varepsilon\}$$

可将 ε 取得充分小,以致于 $N \cap l = \varnothing$.

设 $q \in S \cap N$.因为 $S \cap N$ 关于 N 闭,所以 $C(q) \cap S \cap N$ 关于 $C(q) \cap N$ 闭.又因为 $C(q) \cap S$ 关于 $C(q)$ 开,所以 $C(q) \cap S \cap N$ 关于 $C(q) \cap N$ 开.于是 $C(q) \cap S \cap N$ 非空并且关于 $C(q) \cap N$ 既开又闭.后者是连贯的,故 $C(q) \cap S \cap N = C(q) \cap N$.这推出

$$S \cap N = \bigcup \{C(q) \cap N \mid q \in S \cap N\}$$

所以 $S \cap N = S^* \cap N$,式中

$$S^* = U\{C(p) \mid q \in S \cap N\}$$

是一个回转曲面(因为 S^* 的任一点有一个由将 N 绕 l 旋转得到的领域 N_1,并且 $S^* \cap N_1$ 也由将 $S \cap N$ 绕 l 旋转得到,所以它是一个 C^1 - 曲面).

现在设 $p \in S \cap l$.我们取 p 的一个邻域 N 如定义中那样.我们可以假定对于某个正数 ε

$$N = \{\langle \gamma, \theta, z \rangle \mid \gamma < \varepsilon, \mid z - z(p) \mid < \varepsilon\}$$

令 $q \in S \cap N - l$.如前所述,$C(q) \cap S \cap N$ 关于 $C(q) \cap N$ 既开又闭.但是在这种情形,$C(q) \cap N = C(q)$,故 $S \cap N \supseteq C(q)$.所以 $S \cap N$ 是一个回转曲面.

定理 2　如果 S 是闭的,则 S 是一个回转曲面.

定理 2 的证明　在这个假设下对于任意 $q \notin l$,$C(q) \cap S$ 关于 $C(q)$ 是既开又闭的.由于 $C(q)$ 是连贯的,$C(q) \cap S$ 不是空集就是 $C(q)$,所以 S 是一个回转曲面.

A - 2　把一条均匀金属线弯成曲直两段,一段形如曲线 $y = e^x(0 \leqslant x \leqslant a, a > 1)$,另一段为直线 $y = e^a(a - 1 \leqslant x \leqslant a)$.假定 xy 平面垂直于地平面,x 轴水平指向右.将这条弯好的金属线在点 $(a - 1, e^a)$ 处挂住,又用一个水平力 F 作用于金属线的 $(0,1)$ 点,使金属线与上述曲线及线段处于重合状态(图 1).试证:所施力 F 指向右边.

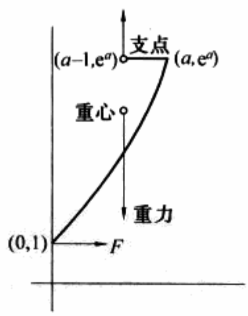


图 1

解　下面三句断语显然等价:

力 F 指向右方.

在金属线上重力关于支点的力矩是顺时针的.

金属线的重心位于支点的右方.

所以,若 $\bar{x}$ 为重心的横坐标,我们必须证明

$$\bar{x} > a - 1 \quad ①$$

不失一般性,取金属线的线密度为 1,则该线的曲线部分的质量为

$$\int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

而它的 x 矩为 $$\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

该线的直线部分的质量为 1 而 x 矩为 $a-\frac{1}{2}$. 所以 ① 等价于

$$a-\frac{1}{2}+\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx > (a-1)(1+\int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,dx)$$

即

$$\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx-(a-1)\int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,dx > -\frac{1}{2} \qquad ②$$

我们必须证明 ② 对于所有 $a>1$ 成立.

令 ② 的左边为 $f(a)$,则

$$f'(a)=\sqrt{1+e^{2a}}-\int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

由于 $$1+e^{2x}<(\frac{1}{2}e^{-x}+e^x)^2$$

$$\int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,dx<\int_0^a (\frac{1}{2}e^{-x}+e^x)\,dx=e^a-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-a}<$$

$$e^a<\sqrt{1+e^{2a}}$$

当 $a>0$ 时成立,所以 $f'(a)>0$ 当 $a>0$ 时成立,故当 $a>0$ 时 $f(a)>f(0)=0$,从而立即推知 ② 成立.

A-3 设 A,B 为实数,K 为某个正整数. 证明:不等式

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|<K^2-1$$

当其左边有定义时恒成立.

解 令 $x=(A-B)/2, y=(A+B)/2$. 不等号左边绝对值号内的分子是

$$\frac{1}{2}(\cos(KB+A)+\cos(KB-A)-$$
$$\cos(KA+B)-\cos(KA-B))=$$
$$\frac{1}{2}(\cos(KB+A)-\cos(KA+B))+$$
$$\frac{1}{2}(\cos(KB-A)-\cos(KA-B))=$$
$$\sin(K-1)x\sin(K+1)y+\sin(K+1)x\sin(K-1)y$$

分母是 $2\sin x\sin y$,可假定它不为零,所以有

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(K-1)x}{\sin x}\right|\left|\frac{\sin(K+1)y}{\sin y}\right|+$$
$$\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(K+1)x}{\sin x}\right|\left|\frac{\sin(K-1)y}{\sin y}\right|$$

现在因为 $|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|$,除了 $n=1$ 或 $\sin Z=0$ 以外,对于所有的 z 以及所有的正整数 n 具有严格不等号(这在下面证明),所以上面右边两项都小于 $(K^2-1)/2$(假定 $K>1$).所以

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|<K^2-1$$

(假定 $K>1$ 及 $\cos B\neq\cos A$).显然当 $K=1$ 时不等号应换为等号,故题目的措词是不精确的.

下面证明 $|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|$($n$ 为任何正整数).若 $Z=0$,则对每个整数 n 都保持等号,故假定在这里 $\sin Z\neq 0$,则 $|\cos Z|<1$.我们关于 n 运用归纳法.当 $n=1$ 时显然有等号.当 $n=2$,有

$$|\sin 2Z|=2|\cos Z||\sin Z|<2|\sin Z|$$

设当 $n=K$ 时有严格不等号,则

$$|\sin(K+1)Z|=|\sin KZ\cos Z+\cos KZ\sin Z|\leqslant$$
$$|\sin KZ|+|\sin Z|<(K+1)|\sin Z|$$

于是当 $n=K+1$ 时有严格不等号,这就证明

$$|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|$$

而且除了 $n=1$ 或 $\sin Z=0$ 以外,对于所有实数 Z 及所有正整数 n 具有严格不等号.

A-4 $p(z)$ 是一个复多项式,它的根(作为复平面上的点)可以被一个半径为 R 的闭圆盘所覆盖.试证:$np(z)-Kp'(z)$ 的根可以被半径为 $R+|K|$ 的闭圆盘所覆盖,这里 n 是 $p(z)$ 的次数,K 是任一复数,而 $p'(z)$ 是 $p(z)$ 的导数.

解 设 $P(Z)$ 的根都位于闭圆盘 D_1:$|Z-c|\leqslant R$ 之内.我们将证明 $nP(Z)-Kp'(z)$ 的根都位于闭圆盘 D_2:$|Z-c|\leqslant R+|K|$ 之内.

设 $P(Z)$ 的根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$P(Z)=A(Z-\lambda_1)(Z-\lambda_2)\cdots(Z-\lambda_n)$$

式中,A 为常数,取对数求导,得

$$\frac{P'(Z)}{P(Z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Z-\lambda_i}$$

设 $u\notin D_2$,则

$$|u-\lambda_i|\geqslant|u-c|-|\lambda_i-c|>R+|K|-R=|K|$$

(因为 $\lambda_i \in D_1$) 所以,对于 $i = 1,2,\cdots,n$,有

$$\frac{|K|}{|u-\lambda_i|} < 1$$

$$|np(u) - KP'(u)| = |P(u)|\left|n - K\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u-\lambda_i}\right| \geqslant$$

$$|P(u)|\left(n - \sum_{i=1}^{n}\frac{|K|}{|u-\lambda_i|}\right) > 0$$

于是 u 不是 $nP(Z) - KP'(Z)$ 的一根.

这表明 $nP(Z) - KP'(Z)$ 的全部根均位于 D_2 内.

A - 5　在平面上给定 n 个点,证明:由这些点所确定的最大距离(线段)不能多于 n 条.

解　设此平面点集为 δ,δ 的直径即 δ 的任意两点之连线(线段)中最长者.我们用归纳法来证明 δ 至多能有 n 条直径.显然当 $n = 2$ 或 3 时结论为真.假定当 $n = K$ 时结论也真.令 ε 是平面内 $K+1$ 个点的集合.

设从 ε 的某点 X 引出的直径不多于一条,则 $\varepsilon - \{X\}$ 是平面内 K 个点的集合且由归纳法假设至多有 K 条直径,因而 ε 至多有 $K+1$ 条直径.

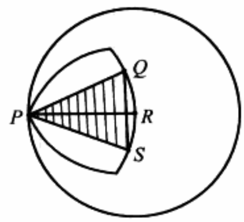


图 1

设 ε 的某点 P 至少能引出 3 条直径 PQ,PR,PS(图 1).令 $r = |PQ|$,则 Q,R,S 位于以 P 为中心 r 为半径的圆周上,并且事实上位于此圆的劣弧上.适当用字母记这三点使 R 在弧上处于 Q 与 S 之间.由于 ε 的两点至多相距 r,则 ε 位于分别以 P,Q,S 为中心,r 为半径的三个闭圆盘的交集 J 之内.除了点 P 以外,J 全在以 R 为中心 r 为半径的圆的内部,因而 R 是 ε 的恰可引一条直径 RP 的端点.上文证明了 ε 至多有 $K+1$ 条直径.

最后,设 ε 的每点恰可引出两条直径,则这些直径共有 $2(K+1)$ 个端点,故恰有 $K+1$ 条直径.

于是,在任何情况下,ε 至多有 $K+1$ 条直径.

A - 6　设 $S_1 = \ln a$ 而 $S_n = \sum_{i=1}^{n-1}\ln(a - S_i), n > 1$.试证

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a - 1$$

解　递推公式可化为

$$S_{n+1} = S_n + \ln(a - S_n)$$

其折线表示如图 1 所示,显然对任取的 $S_1 < a$,有

$$S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4 \leqslant \cdots \leqslant a-1 \qquad ①$$

因而这数列收敛于 $a-1$. 为了解析地证明这一结论,我们令

$$f(x) = x + \ln(a-x), x < a$$

则

$$f'(x) = 1 - 1/(a-x)$$

当 $x < a-1$ 时为正,当 $x > a-1$ 时为负. 由于 $f(a-1) = a-1$,推知对于所有的 $x < a$ 有 $f(x) \leqslant a-1$. 又若 $x \leqslant a-1$,则 $\ln(a-x) \geqslant 0$,故 $f(x) \geqslant x$. 即可推出①,故数列 $\{S_n\}$ 有极限,记为 T. 显然 $T \leqslant a-1$,是 f 的一个连续点,所以

$$f(T) = f(\lim S_n) = \lim f(S_n) = \text{lin } S_{n+1} = T$$

得 $\ln(a-1) = 0$,所以 $T = a-1$. 证毕.

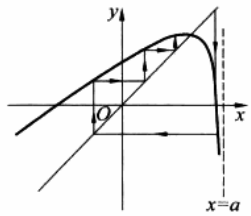


图 1

A-7 考虑 xy 平面上圆的某个集合,其中每个圆都与 x 轴相切而这些圆两两不相交. 试证:

(1) 这些切点包含 x 轴上全部有理点;但是

(2) 这些切点不能包含 x 轴上所有的无理点.

解 (1) 设正整数 p,q,r,s 适合 $p/q \neq r/s$. 取 $K > 2$,考虑与 x 轴相切的两圆,其圆心分别为 $(p/q, 1/Kq^2)$ 及 $(r/s, 1/Ks^2)$. 我们要求这两圆不相交. 若它们相交,则其圆心之间的距离就不超过其半径之和. 平方之,有

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{Kq^2} - \frac{1}{Ks^2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{Kq^2} + \frac{1}{Ks^2}\right)^2$$

可得

$$(ps - rq)^2 \leqslant 4/K^2$$

但这是不可能的,因为 $K > 2$ 而左式是正整数. 这表明我们的要求是对的.

现在设有理数 r,把它写成最简分数形式 p/q(p,q 为整数). 令 C_r 为中心在 $(p/q, 1/Kq^2)$ 半径为 $1/Kq^2$ 的圆,则 C_r 切 x 轴于 $(r,0)$ 点. 并且如上所证的,若 $r \neq s$,则 C_r 与 C_s 不相交. 所以 $\{C_r \mid r$ 为有理数$\}$ 是圆的一个集合,其每个圆与 x 轴相切,切点为 x 轴上所有的有理点,并且任何两个圆不相交.

(2) 因为任意一个圆域都含有两坐标都是有理数的一点,又因为平面上这种点是可数的,故在平面上彼此内部不相交的一族不可数个圆是不可能存在的. 任意两个有公切线的不相交圆其内部也不相交,故不可数个不相交的圆都与 x 轴相切是不可能的. 既然在 x 轴上无理点的集合是不可数的,这就证明了(2).

B-1 考虑 100 阶行列式 $|a_{ij}|$,这里 $a_{ij} = i \times j$. 求证:当这行列式展开式的 100! 项中每一项的绝对值被 101 除的时候,余数都是 1.

解 这行列式展开式每一项的绝对值,是所有可能的行指标与所有可能的列指标的积,故为$(100!)^2$.

既然 101 是一个素数,故由 Wilson 定理$100!\equiv -1(\bmod 101)$,所以$(100!)^2\equiv(-1)^2\equiv 1(\bmod 101)$,如所欲证.

B-2 如果计算工具不能作除法运算,为了确定$1/A(A>0)$的十进小数值,有时用递推公式$X_{k+1}=X_k(2-AX_k)(K=0,1,2,\cdots)$是方便的.这里$X_0$是一选定的“开始”值.试求$X_0$的界限(如果有的话),以保证用这样的开始值$X_0$,使上述递推运算能收敛于所求的值$1/A$.

解法 1 这递推法的折线表示如图 1 所示.容易看出当且仅当$0<X_0<2/A$时数列$X_0,X_1,\cdots$收敛于$1/A$.

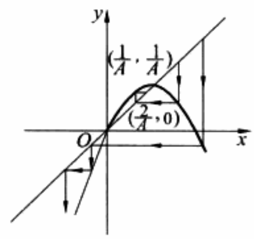


图 1

证法是:定义$f(x)=x(2-Ax)$,求得极大值$f(1/A)=1/A$;又当$0<x<1/A$时$f(x)>x$;当$x<0$时$f(x)<x$.这样可得:

若X_0位于$(0,2/A)$,则

$$0<X_1\leqslant X_2\leqslant X_3\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{A} \tag{①}$$

若$X_0=0$或$2/A$,则

$$X_1=X_2=X_3=\cdots=0 \tag{②}$$

若X_0位于$(0,2/A)$之外,则

$$0>X_1>X_2>X_3>\cdots \tag{③}$$

在情形①,数列必收敛于$f(x)=x$的唯一正根,即$x=1/A$;在情形②,数列显然收敛于0;在情形③,数列或发散于$-\infty$或收敛于$f(x)=x$的一负根,但这种负根是不存在的.

解法 2 我们可求得X_n关于X_0的一个显式,从而容易看出极限性质.从题设递推公式易得

$$1-AX_{n+1}=(1-AX_n)^2$$

则

$$1-AX_n=(1-AX_0)^{2n}$$

显然,当且仅当$|1-AX_0|<1$,即$0<X_0<2/A$时,有$1-AX_n\to 0$,即$X_n\to 1/A$.

B-3 设$f(x)$是定义在$0\leqslant x\leqslant 1$中的一个正值单调减函数,求证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

解 要证的不等式等价于

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

即

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0 \qquad ①$$

将 ① 的左边记为 I,则交换积分变量有

$$I = \int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)x(f(y)-f(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

那么 $$2I = \int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(y-x)(f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 f 是减函数,因此对于所有的 x 与 y,有

$$(y-x)(f(x)-f(y)) \geqslant 0$$

又因 f 处处为正,显然 $2I \geqslant 0$.这就证明了 ①.

B－4 设正整数 n 表为若干个 1 与 2 的和(考虑到加数顺序的区别)的各种表示法共有 $a(n)$ 种,例如,从

$$4 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+1+1+1$$

则 $a(4)=5$.又设 n 表为大于 1 的整数的和(也考虑到加数顺序的区别)的各种表示法的总数为 $b(n)$,例如从 $6=4+2=2+4=3+3=2+2+2$,有 $b(6)=5$.试证:对于每个 n 恒有 $a(n)=b(n+2)$.

解 我们来找出关系 $a(n),b(n)$ 的两个幂级数发生函数.首先,n 作为 k 个 1 与 2 的有序和的表达式的数目显然等于 $(x+x^2)^k$ 展开式中 x^n 的系数,所以

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n = \sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2)^k = \frac{1}{1-x-x^2}$$

其次,n 作为 K 个大于 1 的整数的有序和的方式的数目是

$$(x^2+x^3+\cdots)^K = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k$$

展开式中 x^n 的系数,故

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}b(n)x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k = \left(1-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1} = \frac{1-x}{1-x-x^2} = 1+\frac{x^2}{1-x-x^2}$$

于是 $$\sum_{n=2}^{\infty}b(n)x^n = x^2+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n$$

B-5 如果一个集合的每个子集合 X 均伴以一个第二子集合 $f(X)$,使得当 X 包含 Y 时 $f(X)$ 包含 $f(Y)$.试证:对某个集合 A,有 $f(A)=A$.

解 设给定的集合为 S,定义

$$C=\{X\subseteq S \mid X\subseteq f(X)\}$$

且设 A 是 C 的所有元素的并集.我们来证 $A=f(A)$.

设 $X\in C$,则 $X\subseteq f(X)$ 且 $X\subseteq A$,于是 $f(X)\subseteq f(A)$(由假设),故 $X\subseteq f(A)$.由并集的定义

$$A\subseteq f(A) \quad ①$$

又由假设,$f(A)\subseteq f(f(A))$,故 $f(A)\in C$.再由并集的定义

$$f(A)\subseteq A \quad ②$$

B-6 曲线 $y=f(x)$ 过原点且在该点斜率为1,它满足微分方程 $(x^2+q)y''+(x^2+4)y=0$.试证:它必在 x 轴上点 $x=\frac{3}{2}\pi$ 与 $x=\sqrt{\frac{63}{53}}\pi$ 之间穿过该轴.

解 我们要用到常微分方程中的斯图姆比较定理:

设 I 是 $\mathbf{R}$ 内一区间,函数 u 与 v 当 $x\in I$ 时满足

$$u''(x)+A(x)u(x)=0, v''(x)+B(x)v(x)=0$$

式中 A 与 B 为连续函数,且当 $x\in I$ 时 $A(x)\geqslant B(x)$.假定 v 在 I 上不恒为零,而 α 与 β 是 v 的零点,$\alpha<\beta$.则除了当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时 $A(x)=B(x)$ 以及 u 与 v 在这区间上成比例这两种情形以外,总有 u 的一个零点在开区间 (α,β) 内.

对于本题,我们首先比较微分方程

$$y''+\frac{x^2+4}{x^2+9}y=0 \quad ①$$

与

$$v''+\frac{4}{9}v=0 \quad ②$$

取 ② 的一解 $v(x)=\sin\frac{2}{3}x$,易见0与 $\frac{3}{2}\pi$ 是它的两个零点;由于对所有 x 有

$$\frac{x^2+4}{x^2+9}\geqslant\frac{4}{9}$$

(当 $x\neq 0$ 时为严格不等号),故 ① 的任意解必有一零点 ξ 在

$(0,\frac{3}{2}\pi)$ 内，$f(\xi)=0$. 并且，f 的图形必定在 ξ 穿过 x 轴，因为否则 $f'(\xi)=0$，从而由关于 ① 的解的唯一性定理将推出 $f(x)\equiv 0$.

对于 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$，有

$$\frac{x^2+4}{x^2+9}<\frac{53}{63} \quad ③$$

事实上，③ 等价于 $10x^2<225$，而由 $\pi^2<10$ 得 $10\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2<225$，即推出 ③.

如果我们令 $u(x)=\sin\sqrt{\frac{53}{63}}x$，则

$$u''(x)+\frac{53}{63}u(x)=0$$

在 $I=\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上又应用斯图姆比较定理，可知 u 有一零点在 $(0,\xi)$ 内. 但 u 的第一个正零点是 $\sqrt{\frac{63}{53}}\pi$，故 $\sqrt{\frac{63}{53}}\pi<\xi$，所以

$$\sqrt{\frac{63}{53}}\pi<\xi<\frac{3}{2}\pi$$

B－7 设 C 是一个以正多边形为边界的闭凸平板，试证：对于每个正整数 n 存在这平面上一个集合 $S(n)$，其任意 n 个点都能被 C 覆盖，但 $S(n)$ 本身不能被 C 覆盖住.

解 设 C 为一正 K 边形，其内切圆半径为 r. 对于一个给定的正整数 n，令 $S=S(n)$ 表示半径为 $r\sec(\pi/2K_n)$ 的一圆. 我们应证：

(1) 置 C 于任何位置均不能覆盖 S；

(2) 若 $P_1,P_2\cdots,P_n$ 是 S 的 n 个点，则置 C 于适当位置可覆盖住 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$.

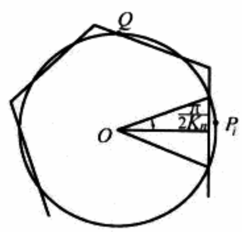


图 1

将 C 保持固定，我们证明没有一个半径超过 r 的圆盘能放到 C 的内部. 从这里就可直接推出(1). 对于一个固定的半径 r_1，在 C 内半径为 r_1 的圆盘的圆心的点集 E 是凸的，并且 E 在关于 C 的中心 O 作旋转 $2\pi/K$ 角的变换下是不变的. 所以，E 或者为空集或者含有 O. 若 $r_1>r$，以 O 为中心 r_1 为半径的一圆不全在 C 内部，这时 E 为空集. 所以，半径为 r_1 的任一圆盘不能放在 C 的内部.

现在证明(2). 令 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 S 的点，并且在 C 内固定一个参考点 Q(图 1)，Q 到 O 的距离为 $r\sec(\pi/2K_n)$. 安置 C 使得 O 与 S 的中心重合，并且绕 O 转动 C 使得 Q 画出圆 S. 考虑那些 P 中的一点 P_i. 由于 Q 画出 S，若 $Q\in A_i$，A_i 是 K 段每段长为 π/K_n 弧度

的闭弧的并集(精确地说，是当 $2\pi m/K \leqslant \angle P_iOQ \leqslant 2\pi m/K + \pi/K_n$ 对于某个整数 m 成立的时候)，则 P_i 将位于 C 上或 C 外. A_i 的总长为 π/n，从而整个 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 的长至多为 π，所以 $S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 至少有长度 π，故不为空. 只要将 C 旋转使得 $Q \in S - \cup A_i$，则点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 就全在 C 的内部. 证毕.

第 18 届美国大学生数学竞赛

A－1 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足条件

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

求证：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一实根.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$$

另一解法是设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_ix^{i+1}}{i+1}$，用罗尔定理.

A－2 将两个半径相等的均匀实心球上下堆放. 下面的球固定，上面的球开始时静止然后滚下. 试问滚到什么位置两球便脱离接触？假定其摩擦系数刚好使它们之间不致发生滑动.

解 设 S 是那个滚动的球，半径为 a，质量为 M. 一个均匀球的惯性矩是 $I=(2/5)Ma^2$. 我们不妨设想这运动实质上是二维的，则这系统的状态由两球的连心线与竖直线的夹角 θ 来确定，如图 1 所示. 用 $\dot\theta$ 表示 θ 对时间的导数，v 是 S 的中心的线速度而 ω 是 S 的旋转角速度.

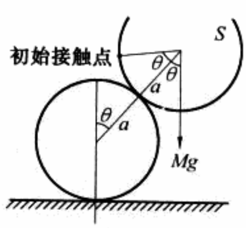


图 1

只要两球保持相切，S 的中心就沿着一个半径为 $2a$ 的圆运动，故 $v=2a\dot\theta$ 而 $\omega=2\dot\theta$，S 的动能为

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{14}{5}Ma^2\dot\theta^2$$

而相对于下面球心的水平线的势能为 $2Mag\cos\theta$，因总能量为常数，故

$$2Mag\cos\theta+\frac{14}{5}Ma^2\dot\theta^2=2Mag$$

(右边是由左边令 $\theta = 0$ 时算出来的) 故有

$$\frac{7}{5}a\dot{\theta}^2 = g(1 - \cos\theta) \qquad ①$$

为了保持 S 在以半径为 $2a$ 的圆周轨道上运动,需要一个指向圆心的大小为 $2aM\dot{\theta}^2$ 的力.这力由重力沿连心线的分力 $Mg\cos\theta$ 起作用.只要这个分力超过所需要的向心力,S 就保持这种运动,其超出的力是两球接触的抵抗力.当重力的分力变得不足以维持必要的向心力时,则两球脱离接触,S 进入一个抛物线轨道并以常速旋转.因此,脱离接触发生在

$$2aM\dot{\theta}^2 = Mg\cos\theta$$

的时候.综合此式与式 ①,得

$$\frac{7}{10}\cos\theta = 1 - \cos\theta$$

所以这发生在 $\theta = \arccos(10/17)$ 的时候.

A－3　从区间[0,1]中随机地选取实数.若取得第 n 个数之后这 n 个数的和才首次超过 1,试证:对于 n 的期望(或平均)值是 e.

解　令要求得到 c 分或更多分的试验次数的期望值是 $E(c)$.设 $0 < c \leqslant 1$,若第一次取的数是在区间 $[x, x + \Delta x]$ 内,这里 $x < c$,则取的次数的期望值将大约是 $1 + E(c - x)$.所以对于 $0 < c \leqslant 1$,有

$$E(c) = 1 + \int_0^c E(c - x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^c E(u)\mathrm{d}u \qquad ①$$

(这个积分存在是因 E 为增函数) 从 ① 知 E 为连续,故由微积分基本定理

$$E'(c) = E(c)$$

解之,$E(c) = \lambda \mathrm{e}^c$,$\lambda$ 为常数.

由 ① 求得 $\lambda = 1$,所以 $E(1) = \mathrm{e}$.

A－4　若复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n| = r \neq 0$$

从这 n 个数中每次取 S 个(不重复)作成乘积,所有乘积的和记为 ${}_nT_s$,试证:当 ${}_nT_{n-s} \neq 0$ 时恒有

$$\left| \frac{{}_nT_s}{{}_nT_{n-s}} \right| = r^{2s-n}$$

解　对任意非零复数 z,有 $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$(这里一横代表共

轭). 设选自$\{1,2,\cdots,n\}$的 S 指标的一个集合记为 J,则

$$\prod_{i\notin J} a_i = a_1a_2\cdots a_n\prod_{i\in J}a_i^{-1} = a_1a_2\cdots a_n\prod_{i\in J}\frac{\overline{a_i}}{r^2} = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\prod_{i\in J}\overline{a_i}$$

所以

$$_nT_{n-s} = \sum_J\prod_{i\notin J}a_i = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\sum_J\prod_{i\in J}\overline{a_i} = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\overline{_nT_s}$$

于是

$$|_nT_{n-s}| = \frac{r^n}{r^{2s}}|\overline{_nT_s}| = r^{n-2s}|_nT_s|$$

由此即可推出要求的公式.

A－2 证明:积分方程

$$f(x,y) = 1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

在 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 中至多有一个连续解.

解 设存在两个连续解且令 g 是它们的差,则 g 连续且

$$g(x,y) = \int_0^x\int_0^y g(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因为 g 连续则它在给定的正方形上有界. 令 M 是某个界数,则当 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 有

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\int_0^x\int_0^y M\mathrm{d}u\mathrm{d}v = Mxy$$

我们现在证明对于任何正整数 n

$$|g(x,y)|\leqslant M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!} \quad ①$$

当 $n=1$ 的情况已证. 假定当 $n=k$ 时为真,则

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\int_0^x\int_0^y M\frac{u^k}{k!}\frac{v^k}{k!}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = M\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}$$

于是由数学归纳法知 ① 成立. 但是对于任意固定的 x 与 y

$$\lim_{n\to\infty}M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!} = 0$$

所以 $|g(x,y)|\leqslant 0$,故 $g(x,y)=0$. 因而不可能存在两个不同的连续解.

A－6 设年利率为 i，依复利计算，想要在第一年末提取 1 元，第二年末提取 4 元，…，第 n 年末提取 n^2 元，要能永远如此提取，问至少需要多少本金？

解 n 年后要提取 1 元（本利和），该项本金应为 $(1+i)^{-n}$ 元，要提取 n^2 元（本利和），该项本金应为 $n^2(1+i)^{-n}$ 元，所以本金总数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n}$$

由于
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

故
$$\frac{x}{(1-x)^2}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

又
$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$$

（当 $|x|<1$）置 $x=1/(1+i)$，便得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n}=\frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$$

（举例：若年利率为 6%，则本金至少应为 10 109.26 元）.

A－7 试证：不能把十个尺寸相同的正方形放在平面上，使得其中任何两个正方形均没有公共的内点而又有一个正方形触及其它各正方形（的边）.

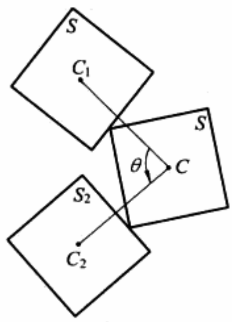


图 1

解 设那样的单位正方形的集合是存在的. 如图 1，令 S,S_1,S_2 是三个互不重叠的正方形，其中心分别为 C,C_1,C_2，并且 S 触及 S_1 与 S_2.

令 $\theta=\angle C_1CC_2$，$a=|C_1C|$，$b=|CC_2|$，$c=|C_2C_1|$，则 $1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$，$1\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$，$c\geqslant 1$. 由余弦定理

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leqslant\frac{a^2+b^2-1}{2ab}=f(a,b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{a^2-b^2+1}{2a^2b},\ \frac{\partial f}{\partial b}=\frac{b^2-a^2+1}{2ab^2}$$

这两个偏导数在整个容许的区域 (a,b) 内非负，故推知 f 在这个区域的极大值是 $f(\sqrt{2},\sqrt{2})=3/4$，于是 $\cos\theta\leqslant 3/4$，即 $\theta\geqslant\arccos 3/4$. 令 $\alpha=\arccos 3/4$，则

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-\frac{9}{16}<-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

所以 $3\alpha>2\pi/3$，故 $\angle C_1CC_2=\theta\geqslant\alpha>2\pi/9$.

现在设 $S,S_1,S_2,\cdots,S_9$ 是互不重叠的正方形,并且 S 与其它每一个都触及.令 $C,C_1,C_2,\cdots,C_9$ 分别是它们的中心,选取极点在 C 的极坐标系,而其余这些 C 的编号按极角单增(在 0 到 2π 之间)来编 $C_1,C_2,\cdots,C_9$,则

$$\angle C_1CC_2+\angle C_2CC_3+\cdots+\angle C_9CC_1=2\pi$$

故这些角中至少有一个不大于 $2\pi/9$,这与前面已证的发生矛盾,所以这种放法是不可能的.

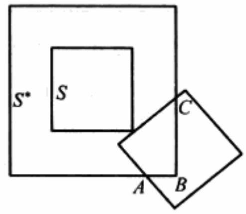


图 2

注 设正方形 S^* 边长为2,与 S 同心且位似,如图2所示.经详细分析可证任意与 S 触及但不含 S 的内点的单位正方形必定从 S^* 上截下一个长度至少为1的折线(如图2中 ABC).由于 S^* 的周长为8,故至多有8个内部不相交的正方形能触及 S.这种证法的优点在于容易推证仅仅存在8个触及 S 的单位正方形,即平常熟知的棋盘格拼排式样.

B-1 (1)给定线段 a,b,c,d,其中 a 最长,试以这些线段为边作成一个四边形并使 $a /\!/ b$.问这在什么时候可作?

(2)给定任一锐角 $\triangle ABC$ 及高 AH,在 AH 上任取一点 D,引 BD 且延长交 AC 于 E,又引 CD 且延长交 AB 于 F.试证:$\angle AHE=\angle AHF$.

解 (1)如图1,构造一个 $\triangle PQR$,使 $|PQ|=a-b$,$|PR|=c$,$|QR|=d$.当且仅当这些长度满足严格三角不等式(即两短边的和大于最长边)时这是可以做出的.延长 PQ 到 S 使得 $|QS|=b$,作平行四边形 $SQRT$ 即为所求.

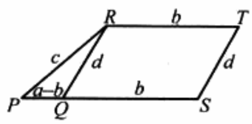


图 1

若 $a=b$(原题并未说明此种可能性被"a 为最长"所排除),则奠基三角形退化,有 $c=d$.这就存在无穷多的解:两邻边长为 a 与 c 的任意平行四边形都满足要求.

(2) **解法1** 过 A 作 l 平行于 BC.因为 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 为锐角,高的足 H 必落在 B 与 C 之间.假定如通常情况 $D\neq A,H$,图形如图2所示.

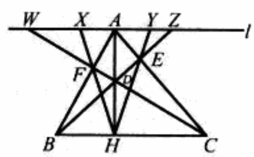


图 2

考虑一双相似三角形,我们看到

$$\frac{|AX|}{|BH|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AW|}{|BC|}$$

$$\frac{|AY|}{|CH|}=\frac{|AE|}{|CE|}=\frac{|AZ|}{|CB|}$$

$$\frac{|AW|}{|HC|}=\frac{|AD|}{|HD|}=\frac{|AZ|}{|HB|}$$

所以 $$|AX|\cdot|BC|=|AW|\cdot|BH|=$$

$$|AZ|\cdot|HC|=|AY|\cdot|BC|$$

因而 $|AX|=|AY|$. 故直角三角形 AHX 与 AHY 全等,从而 $\angle AHX=\angle AHY$,即 $\angle AHE=\angle AHF$.

解法 2 取 BC 与 AH 为直角坐标轴.令 $A=(0,a)$, $B=(b,0)$, $C=(c,0)$, $D=(0,d)$.写出 BD, AC 的方程,求得它们的交点 E,算出 HE 的斜率为

$$\frac{ad(b-c)}{bc(a-d)}$$

交换 b 与 c,可得 HF 的斜率 $=-$(HE 的斜率),所以 $\angle AHE=\angle AHF$.

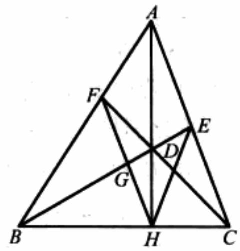


图 3

解法 3 如图 3,由 BF, FD, DH, HB 组成的四边形的一条对角线 BD 被另一条对角线 HF 以及 AC 调和分割于点 G,点 E,所以 HF, HE; HB, HD 是一调和线束.但是 HB 与 HD 垂直,所以它们平分由 HF 与 HE 形成的角.

注 比较上述不同证法中发生的特殊情况是有趣的.情况 $D=H$ 在上面综合法及射影法中被排除,而在解析法中则否;情况 $BD /\!/ AC$ 在综合法与解析法中被排除,但在射影法中则否;在综合法中,若 D 不在 AH 上,图形的外观将显著改变.

B-2 求证:四个相继正整数的积不可能是一个完全平方或完全立方数.

解 设这四个相继整数是 $x-1,x,x+1,x+2$,其乘积

$$P=(x-1)(x+2)x(x+1)=(x^2+x-2)(x^2+x)=(x^2+x-1)^2-1$$

若 P 为完全平方,则 P 与 $(x^2+x-1)^2$ 将为相邻正整数,但两个完全平方数相邻是不可能的.

现在设 P 是一个完全立方数.则 $x>2$,因为 $x-1$ 是正的,而若 $x=2$ 就是 $P=24$ 与所设不符.整数 x 与 $x+1$ 中必定有一个奇数.设 x 是奇数,它与 $x-1,x+1,x+2$ 互素,故 $(x-1)(x+1)(x+2)=x^3+2x^2-x-2$ 也是一个完全立方数.但是当 $x>2$ 时

$$x^3<x^3+2x^2-x-2<(x+1)^3$$

即两个相邻整数的立方之间有一个完全立方数,这也是不可能的.设 $x+1$ 是奇数,则它与 $(x-1)x(x+2)=x^3+x^2-2x$ 互素,这又必定是一个完全立方.但是当 $x>2$ 时

$$x^3<x^3+x^2-2x<(x+1)^3$$

于是再次引出矛盾,所以 P 不能是完全立方数.

B－3　在一个有 n 名选手参加的循环赛(每一对选手赛一场,胜者得1分,负者得0分)中,没有平局,由各选手赢得的分数分别是 $S_1,S_2,\cdots,S_n$.求证:有某三名选手 A,B,C 使得 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A 的情况存在的充要条件是

$$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2<(n-1)n(2n-1)/6$$

解　对任意一次竞赛的结局 T,令

$$U(T)=S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2$$

我们称循环赛的一个结局为传递的,当且仅当不存在三个选手使得 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A 这样的情况.这时,"胜"是在选手集合上的一个传递的线性有序关系.所以我们可以将选手编号为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,使当且仅当 $i>j$ 时 P_i 胜 P_j,则选手们结局的得分分别是 $0,1,\cdots,n-1$,因而在这种传递的情况下有

$$U(T)=0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2=(n-1)n(2n-1)/6$$

可见给定的条件是充分的.

现在考虑竞赛的一个非传递结局,即存在三个选手 A,B,C 使得 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A.我们可以假定 S_A 是 S_A,S_B,S_C 中最小的数,则 $S_A\leqslant S_B$.颠倒 A 与 B 之间比赛的胜负,我们得到一个新的结局,在那里 A 的得分是 S_A-1,B 的得分是 S_B+1,其它选手的得分不变.从

$$(S_A-1)^2-S_A^2+(S_B+1)^2-S_B^2=2(S_B-S_A)+2>0$$

看出 U 增加了.于是任意非传递竞赛的结局能改变致使 U 增加.但这不能永远改变下去,因为可能的结局数目是有限的.所以从一个非传递结局开始,经过有限次改变之后,结局成为传递的,并且 U 增加到 $(n-1)n(2n-1)/6$.于是对于一个非传递结局有

$$U(T)<(n-1)n(2n-1)/6$$

因而给定的条件是必要的.

B－4　在半径为1的球面上所有两点之间的直线距离的平均值是多少?

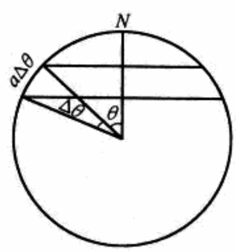


图1

解　我们取球的半径为 a 以便于处理量纲.由对称性我们只须计算从某个固定点发出的所有弦的平均长度,该点取为球坐标系的北极 N.用平行于余纬度的薄片将球面切为球带.如图1,在余纬度 θ 与余纬度 $\theta+\Delta\theta$ 之间的球带的近似面积为 $(2\pi a\sin\theta)(a\Delta\theta)$,而所有从 N 到这球带上的点的弦的近似长度为 $2a\sin(\theta/2)$.所以弦的长度的平均值是

$$L = \frac{4\pi a^3}{S}\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

式中,$S = 4\pi a^2$ 是球面积.

由于 $a = 1$,有

$$L = \int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

B－5 在平面上给定无穷个点,试证:若它们之间的距离都是整数,则这些点都在一条直线上.

解 设这给定的集合含有三个非共线点 A,B,C,使得 $|AB| = r$, $|AC| = S$,此处 r,S 为整数.若 P 是到 A,B 距离都为整数的任意点,则由三角不等式,$|PA - PB|$ 是整数 $0,1,2,\cdots,r$ 中的一个.所以 P 必定落到双曲线族

$$H_i = \{X \mid |XA - XB| = i\}, i = 1,2,\cdots,r-1$$

中的一条上面,或在$\overrightarrow{AB}$ 与 AB 的垂直平分线的并集 H_0 上.

同理,到 A,C 的距离都为整数的一点 P 必落在双曲线族

$$K_i = \{X \mid |XA - XC| = i\}, i = 1,2,\cdots,s-1$$

中的一条上,或在$\overrightarrow{AC}$ 与 AC 的垂直平分线的并集 K_0 上.我们给定的集合的任一点必定在集合 $H_i \cap K_j$ 之一上.由于$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$.故没有一个集合 H_i 与任一集合K_j 相同.若 i 与j 有一不为0,$H_i \cap K_j$ 必是两条不同时退化的二次曲线 的交点,所以 $H_i \cap K_j$ 至多含有四个点.但是 $H_0 \cap K_0$ 也至多含有四个点,因为 H_0 与 K_0 不共有一条直线.所以这给定的集合至多含有$4(r+1)(s+1)$个点,这与题设它有无穷个点相矛盾.这个矛盾表明所有给定的点是共线的.

B－6 一个抛射体在阻力介质中运动.这阻力是速度的函数,并且方向与速度向量相反,运动的水平距离与时间 t 的关系为 $x = f(t)$.

试证:其竖直距离 y 由

$$y = -gf(t)\int\frac{\mathrm{d}t}{f'(t)} + g\int\frac{f(t)}{f'(t)}\mathrm{d}t + Af(t) + B$$

给出,式中 A,B 为常数,g 是重力加速度.

解 此运动的微分方程的向量式是

$$m\langle x'', y''\rangle = -R\langle x', y'\rangle - m\langle 0, g\rangle \quad ①$$

式中撇号表示关于时间的导数,R 是阻力系数.

因为运动的 x 分量由 $x = f(t)$ 给出,由 ① 得

$$R=-m\frac{f''(t)}{f'(t)}$$

假定 $f'(t)$ 不为零,则 y 满足微分方程

$$y''=\frac{f''(t)}{f'(t)}y'-g$$

除以 $f'(t)$,便得恰当微分形式

$$\frac{y''}{f'(t)}-\frac{f''(t)}{(f'(t))^2}y'=\left(\frac{y'}{f'(t)}\right)'=-\frac{g}{f'(t)}$$

于是
$$\frac{y'}{f'(t)}=\frac{y'(0)}{f'(0)}-g\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{f'(r)}$$

故
$$y(t)=y(0)+\frac{y'(0)}{f'(0)}(f(t)-f(0))-g\int_0^1 f'(s)\int_0^s\frac{\mathrm{d}r}{f'(r)}\mathrm{d}s$$

上式最后的积分可用分部积分

$$u=\int_0^s\frac{\mathrm{d}r}{f'(r)},\mathrm{d}v=f'(s)\mathrm{d}s$$

给出
$$y(t)=\frac{y'(0)}{f'(0)}f(t)+y(0)-\frac{y'(0)f(0)}{f'(0)}-g\cdot f(t)\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{f'(r)}+g\int_0^1\frac{f(s)}{f'(s)}\mathrm{d}s$$

读者注意到前面的证明依赖于对任何 t,$f'(t)\neq 0$ 的假定.我们来考虑这个假定.

设阻力与速度的依从关系为 $R=\Phi(x',y')$,式中 $\Phi:R^2\to R$ 是一满足利普希茨条件

$$|\Phi(u_1,v_1)-\Phi(u_2,v_2)|\leqslant K\{|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\}$$

的函数,K 是某个常数,则原来的微分方程即

$$\begin{aligned}x''&=-\frac{1}{m}\Phi(x',y')x'\\ y''&=-\frac{1}{m}\Phi(x',y')y'-g\end{aligned}\qquad②$$

而这个方程组对于任意初始条件(甚至时间可以不是 0) 有唯一解.显然若 $x'(t_0)=0$,则 ② 的一解可由求解

$$y''=-\frac{1}{m}\Phi(0,y')y'-g$$

且令 x 为常数来得到.所以由唯一性推知,若对于任意的 t_0 有 $x'(t_0)=0$,则 x 为常数.就 f 而言,这意味着 f' 处处不为零除非 f 是常数.于是除了在 f 是常数的平凡情形以外,我们先前的证明是正确的.显然,在平凡情形我们得不到关于 R 的性质的任何信息,所以无法从 f 去计算 y.

B - 7 证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而且当 $n=0,1,2,\cdots$ 时

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于零.

解 对于任意多项式 p,题中的假设明显地蕴涵

$$\int_b^a f(x)p(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad ①$$

魏尔斯特拉斯逼近定理保证:给定 $\varepsilon>0$,存在一个多项式 p 使得对于所有 $x\in[a,b]$,有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

令 M 是 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的某个界,则用 ① 求得

$$\left|\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\{f(x)-p(x)\}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)-p(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\varepsilon\mathrm{d}x = M\varepsilon(b-a)$$

因为 ε 可任意小,故

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

又因为 f 是连续的,所以 $f(x)\equiv 0(a\leqslant x\leqslant b)$.

第 19 届美国大学生数学竞赛

A-1 设

(1) $f(m,1)=f(1,n)=1, m\geqslant 1, n\geqslant 1$.

(2) $f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)+f(m-1,n-1), m>1, n>1$.

(3) $S(n)=\sum\limits_{a+b=n} f(a,b), a\geqslant 1, b\geqslant 1$.

求证:对于 $n\geqslant 2$,下列等式成立:

$$S(n+2)=S(n)+2S(n+1)$$

解 本题可用纯代数方法论证如下:

$$\begin{aligned}S(n+2)={}&\sum_{j=1}^{n+1} f(n+2-j,j)=\\&f(n+1,1)+\sum_{j=2}^{n}\{f(n+1-j,j)+\\&f(n+2-j,j-1)+\\&f(n+1-j,j-1)\}+f(1,n+1)=\\&\{f(n+1)+\sum_{j=2}^{n} f(n+1-j,j)\}+\\&\{\sum_{k=1}^{n-1} f(n+1-k,k)+f(1,n)\}+\sum_{k=1}^{n-1} f(n-k,k)=\\&S(n+1)+S(n+1)+S(n)\end{aligned}$$

其中第三步后两个和式中使用了代数 $j=k+1$ 及两个明显的等式

$$f(n+1,1)=f(n,1), f(1,n+1)=f(1,n)$$

A-2 设 $R_1=1, R_{n+1}=1+\frac{n}{R_n}, n\geqslant 1$.

求证:对于 $n\geqslant 1$,下列不等式成立:

$$\sqrt{n}\leqslant R_n\leqslant\sqrt{n}+1$$

解 当 $n=1$ 时,$\sqrt{1}=R_1<\sqrt{1}+1$,结论成立.假定 $n=k$ 时,$\sqrt{k}\leqslant R_k\leqslant\sqrt{k}+1$,则

$$\sqrt{k+1}-1=\frac{k}{\sqrt{k+1}+1}<\frac{k}{\sqrt{k}+1}\leqslant\frac{k}{R_k}\leqslant\frac{k}{\sqrt{k}}=$$
$$\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$$

因此 $\sqrt{k+1}<1+\frac{k}{R_k}=R_{k+1}<\sqrt{k+1}+1$

由完全归纳法知对任何自然数 n,本题结论正确.

A - 3 假定下列微分积分方程初值问题有唯一解,试确定 $u(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s,u(0)=1$$

解 令 $b=\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s$,则 b 为一待定常数.本题随即化为普通的线性方程

$$u'(t)=u(t)+b$$

其通解为 $u(t)=-b+C\mathrm{e}^t$,C 为任意常数.

由初值条件及 b 的代换条件可得

$$u(0)=-b+C=1$$
$$b=\int_0^1(-b+C\mathrm{e}^s)\mathrm{d}s=-b+C(\mathrm{e}-1)$$

据此解得 $b=\frac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}},C=\frac{2}{3-\mathrm{e}}$

于是 $u(t)=\frac{2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}+1}{3-\mathrm{e}}$

即为本题所求的唯一解.

A - 4 某大学分配学生住房,每二人一间,并按下列顺序安排:$AA,AB,AC,BB,BC,AD,CC,BD,CD,DD$. 其中,$A,B,C,D$ 分别表示四、三、二、一年级的学生.现对 A,B,C,D 分别赋予数值,使得与上述安排对应的数列 $A+A,A+B,A+C,B+B,\cdots,D+D$ 恰好成严格递降顺序.求此问题的一般解及最小正整数解.

解 依题意需解下列不等式组

$$2A>A+B>A+C>2B>B+C>A+D>2C>B+D>C+D>2D \quad ①$$

显然可见 $A>B>C>D$.令

$$A=B+\alpha,B=C+\beta,C=D+\gamma$$

则 α,β,γ 皆为正数.

在 ① 中第一、二、四、八、九个不等式，都是 $A > B > C > D$ 的推论，而第三、五、六、七个不等式可以化为

$$\alpha > \beta, \gamma > \alpha, \alpha + \beta > \gamma, \gamma > \beta$$

其中第四个不等式可由第一、二个推出. 再令

$$\alpha = \beta + \delta, \gamma = \alpha + \varepsilon$$

则 δ, ε 皆为正数，并且 $\alpha + \beta > \gamma$ 可化为 $\beta > \varepsilon$. 又令 $\beta = \varepsilon + \zeta$，则 ζ 为正数. 于是

$$\alpha = \delta + \varepsilon + \zeta, \beta = \varepsilon + \zeta, \gamma = \delta + 2\varepsilon + \zeta$$

进而推得

$$\begin{aligned} A &= 2\delta + 4\varepsilon + 3\zeta + D \\ B &= \delta + 3\varepsilon + 2\zeta + D \\ C &= \delta + 2\varepsilon + \zeta + D \end{aligned} \quad ②$$

在 ② 中，D 可取任意实数，$\delta, \varepsilon, \zeta$ 可取任意正数. 由上面的推导过程可知，等式组 ② 即为不等式组 ① 的通解.

注意当 A, B, C, D 皆为整数时，$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 亦必皆为整数. 为了确定 ① 的最小正整数解，只须令 $D = \delta = \varepsilon = \zeta = 1$，即可求得

$$A = 10, B = 7, C = 5, D = 1$$

A－5　设 n 阶行列式主对角线上的元素全为零，其余元素全不为零. 求证：它的展开式中不为零的项数等于下式的值

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

解　由定义知 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 的行列式的展开式为

$$\sum_{\prod} \varepsilon\left(\prod\right) m_{1j_1} m_{2j_2} \cdots m_{nj_n}$$

其中

$$\prod = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有排列，$\varepsilon(\prod)$ 等于 $+1$ 或 -1，由 $\prod$ 为偶排列或奇排列而定. 依题意知，当且仅当 $\prod$ 的排列中有“不动点”(即至少存在一个 $j_i = i$) 时，行列式的展开式中对应项为零. 于是本题化为求 $\prod$ 的排列中没有不动点的排列个数问题. 设 A_n 为所求的结果，我们先证下列关系式成立

$$A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2}) \quad ①$$

令 B_n 为 $\prod\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 中没有不动点的排列个数，则易知 $A_n = (n-1)B_n$ (因为排列中 1 下面的 2 可分别用 $3,\cdots,n$ 代

替).

为了求得计算 B_n 的表达式,可分两种情形考虑:

i $\prod\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 1 & j_3 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$;

ii $\prod\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n\\ 2 & j_2 & j_3 & \cdots & 1 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$, $j_2 \neq 1$.

在情形 i 中,易见没有不动点的排列个数为 A_{n-2}.

在情形 ii 中,若删去 $\prod$ 中的第 1 列,同时将第 k 列下面的 1 改为 2,则易见辅助排列

$$\prod{}^*\begin{pmatrix}2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n\\ j_2 & j_3 & \cdots & 2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$

中不动点的排列个数为 A_{n-1},并且 $\prod{}^*$ 与 ii 中的 $\prod$ 成一一对应关系.

综合 i,ii 两种情形即证得关系式 ① 成立

$$A_n = (n-1)B_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$$

对 ① 施行变换 $A_n = n!\,C_n$ 可得

$$n!\,C_n = (n-1)(n-1)!\,C_{n-1} + (n-1)!\,C_{n-2}$$

化简得
$$C_n - C_{n-1} = -\frac{1}{n}(C_{n-1} - C_{n-2})$$

由迭代法推得

$$C_n - C_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)(C_2 - C_1) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad ②$$

其中应用了明显的关系式 $A_1 = 0, C_1 = 0; A_2 = 1, C_2 = \frac{1}{2}$.

对 ② 施行求和运算即得

$$C_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!} \Rightarrow A_n = n!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}$$

A - 6 设 $a(x)$ 与 $b(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的连续函数,且有 $0 \leqslant a(x) \leqslant \alpha < 1$.若方程

$$u = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}(b(x) + a(x)u)$$

的解可由
$$u = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{b(x)}{1 - a(x)}$$
确定.问需要附加什么条件?

解 因为在闭区间上连续的函数必定达到它的极大(极小)值,并注意到非负函数 $a(x)$ 的上界小于 1.据此即可判别下列五个命题都是等价的:

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}(b(x)+a(x)u) \quad ①$$

$$\forall x, u\geqslant b(x)+a(x)u \quad ②$$

$$\forall x,(1-a(x))u\geqslant b(x) \quad ③$$

$$\forall x, u\geqslant \frac{b(x)}{1-a(x)} \quad ④$$

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{b(x)}{1-a(x)} \quad ⑤$$

在 ②,③,④ 中都至少有一个 x 能使等号成立.

据上所述,不需附加任何条件,方程 ① 恒以 ⑤ 为其唯一解.

A－7　设 a,b 为互质的正整数,b 为偶数,且对任一正整数 q,存在非负整数 $p=p(q)$,能使

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|$$

取极小值.求证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{q=1}^{n}\frac{q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|}{n}=\frac{1}{4}$$

解　我们有

$$q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{b}\mid pb-qa\mid$$

依题意,$\forall q$,欲选择 $p=p(q)$ 使 $\mid pb-qa\mid$ 达到极小值,那么这个极小值将依赖于 qa 除以 b 的余数而定.当 q 变动时,由于 a,b 互质,故可令 qa 关于模 b 的完全剩余系为 $-C+1,-C+2,\cdots,-1,0,1,\cdots,C-1,C$,其中 $C=b/2$(b 为偶数).我们算出下式的和以备应用:

$$\frac{1}{b}(0+1+2+\cdots+C-1+C+C-1+\cdots+1)=\frac{C^2}{2C}=\frac{b}{4}$$

令 $n=br+s,0\leqslant s<b$,则

$$\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=r\frac{b}{4}+\sum_{q=br+1}^{br+s}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|$$

注意当 q 从 1 变动到 br 时,计有 r 次通过上述之完全剩余系 $(\bmod b)$,若 $s=0$,则上列等式右边的和号消失.

再注意 $p(q)$ 是最邻近于$\frac{qa}{b}$ 的非负整数,故有

$$q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=\left|p-\frac{qa}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

于是

$$\left|\frac{1}{4}n-\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\right|=$$

$$\left|\frac{s}{4}-\sum_{q=br+1}^{br+s}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\right|\leqslant$$

$$\frac{s}{4}+s\cdot\sup_{q}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{3}{4}s<\frac{3}{4}b\Rightarrow$$
$$\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\right|<\frac{3b}{4n}\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{4}$$

B－1 设

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1},n\geqslant 1$$

求证：(1) $b_n=\frac{n+1}{2n}b_{n-1}+1,n\geqslant 2.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2.$

解 (1) 我们有

$$n!b_n=\sum_{k=0}^{n}k!(n-k)!=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!(n-k+1)!\Rightarrow 2n!b_n=$$
$$0!n!+\sum_{k=1}^{n}(k!(n-k)!+(k-1)!(n-k+1)!)+$$
$$n!0!=2n!+(n+1)\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(n-k)!=$$
$$2n!+(n+1)((n-1)!b_{n-1})\Rightarrow$$
$$b_n=1+\frac{n+1}{2n}b_{n-1}$$

(2) 令 $b_n=2+C_n$，则

$$nC_n=1+\frac{n+1}{2(n-1)}(n-1)C_{n-1}$$

下面用数学归纳法证明 $nC_n\leqslant 6$.

易知 $n=1,2,3$ 时（$C_1=0,C_2=1/2,C_3=2/3$），结论正确．假定 $n=k-1(k\geqslant 4)$ 时，结论正确，那么

$$kC_k\leqslant 1+\frac{k+1}{2(k-1)}\cdot 6\leqslant 1+\frac{5}{2\cdot 3}\cdot 6=6$$

第二个不等式成立的理由在于

$$\frac{k+1}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}\leqslant 1+\frac{2}{3},k\geqslant 4$$

由于 $0\leqslant C_n\leqslant\frac{6}{n}$，因此 $C_n\to 0,b_n\to 2;(n\to\infty)$.

注 利用下列不等式可以直接证明

$$\lim_{n\to\infty}b_n=2$$

$$2+\frac{2}{n}<b_n=2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1}<$$

$$2+\frac{2}{n}+(n-3)\binom{n}{2}^{-1}, n \geqslant 3$$

B－2　任取 $n+1$ 个不大于 $2n$ 的正整数，求证：其中至少有一个能被另一个整除.

解　每一个正整数都可以唯一地写成 $2^p q$ 的形式，其中 p 为非负整数，q 为该正整数的最大奇约数. 由于集 $S=\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 中的奇数只有 n 个，因此从 S 中任选 $n+1$ 个数里面至少有两个的最大奇约数相同. 令此二数为 $2^{p_1}q$ 与 $2^{p_2}q$，则 $p_1 \neq p_2$. 若 $p_1 < p_2$，则 $2^{p_1}q \mid 2^{p_2}q$.

B－3　设边长为 1 的正方形被分成任意两个点集，则其中必有一个点集的直径（点集内两点间距离的最小上界）不小于 $\sqrt{5}/2$. 并确定一种分法，使两个点集的直径都不大于 $\sqrt{2}/2$.

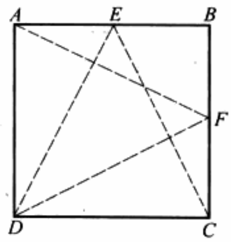


图 1

解　设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 和 F 分别是 AB 边和 BC 边的中点，如图 1 所示. 于是

$$|AF|=|DF|=|DE|=|CE|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

假定正方形被划分成两个点集 S 和 T，它们的直径都小于 $\sqrt{5}/2$. 若 $A \in S$，则 $F \in T, D \in S, E \in T, C \in S$. 但是 $|AC|=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$，这与 S 的直径小于 $\sqrt{5}/2$ 矛盾（若 $A \in T$，亦将导改与 T 的假定矛盾）.

另一方面，我们可将正方形 $ABCD$ 划分成两个全等的长方形（图 2），其直径皆不小于 $\sqrt{5}/2$.

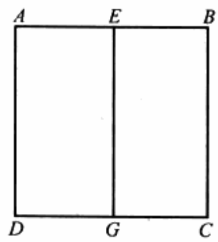


图 2

图中分割线段 EG 上的点可任意归属两长方形之一. 当 E, G 两点分属两长方形时，它们的直径都等于 $\sqrt{5}/2$，否则其中之一的直径将会小于 $\sqrt{5}/2$.

B－4　设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=C, \lim_{x\to\infty} f'''(x)=0$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0$.

解　应用具有拉格朗日型余项的泰勒公式，我们有

$f(x+1)=f(x)+f'(x)+$

$$\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x)),0<\zeta<1 \quad ①$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)),0<\eta<1 \quad ②$$

① ± ② 并整理即得 ③ 与 ④

$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x))+\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)) \quad ③$$

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x))-\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)) \quad ④$$

当 $x\to\infty$ 时，$x+\zeta(x)\to\infty$，$x-\eta(x)\to\infty$，因此

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f''(x)=C-2C+C-\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}\left(C-C-\frac{1}{6}\cdot 0-\frac{1}{6}\cdot 0\right)=0$$

B－5 从平面上一点引出的一条无穷段折线，其每段的长度依次构成调和数列 $1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots$，从第二段折线起，每一段都与前一段夹 θ 角．设此无穷折线最终有一个极限点，试确定其起点与极限点间的距离及方向．

解 将题设的无穷折线置于复平面上来考察．令起始线段位于 0，1 之间，则第二段折线将位于 $1,1+\frac{1}{2}e^{i\theta}$ 之间，因而此线段可用复数 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ 表示．依此类推，第 n 段折线可用复数 $\frac{1}{n}e^{i(n-1)\theta}$ 表示．

将所得的 n 个复数相加得 $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}$，此和（复数）恰好表示折线的起点至第 n 段折线的终点的向量．于是本题化为确定下列无穷（复）级数的以收敛性及求和问题

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta} \quad ①$$

当 $\theta=0$ 或 2π 的整数倍时，① 成为调和级数，因而发散．下面将证明 ① 在其他情况下都收敛．在证明中需要用到关于变号级数的狄利克雷收敛性判别法：

若级数 $\sum_{p=1}^{\infty}a_p$ 的部分和有界，实序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ 单调地趋于

零，则级数 $\sum_{p=1}^{\infty} a_p b_p$ 收敛.

令 $b_p = \dfrac{1}{p}, a_p = e^{i(p-1)\theta}$，则当 $e^{i\theta} \neq 1$ 时，我们有

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_p\right| = \left|\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

因此 ① 满足狄利克雷判别条件，从而成为收敛级数($e^{i\theta} \neq 1$).

为了计算 ① 的和，需要应用阿贝尔定理：

若 $\sum_{p=1}^{\infty} c_p$ 收敛，则 $\lim\limits_{r\to 1-0} \sum_{p=1}^{\infty} c_p r^p = \sum_{p=1}^{\infty} c_p$，其中 r 为实变数.

于是我们有

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = e^{-i\theta} \lim_{r\to 1-0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}(re^{i\theta})^p$$

令 $Z = re^{i\theta}$，则上式右边极限号后的级数是复函数 $-\ln(1-z)$ 在 $|z| < 1$ 内的主值泰勒级数展开式. 因此

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = -e^{i\theta} \lim_{r\to 1-0} \ln(1 - re^{i\theta}) = -e^{i\theta}\ln(1 - e^{i\theta})$$

由于
$$1 - e^{i\theta} = 2\sin\frac{1}{2}\theta e^{\frac{1}{2}i(\theta-\pi)}, 0 < \theta < 2\pi$$

且 $2\sin\dfrac{1}{2}\theta > 0$，$\dfrac{1}{2}(\theta - \pi)$ 是辐角的主值(因为 $-\pi < \dfrac{1}{2}(\theta - \pi) < \pi$)，故有

$$\ln(1 - e^{i\theta}) = \ln(2\sin\frac{1}{2}\theta) + \frac{1}{2}i(\theta - \pi)$$

于是
$$\sum_{p=1} \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = -e^{-i\theta}\left(\ln(2\sin\frac{1}{2}\theta) + \frac{1}{2}i(\theta - \pi)\right)$$

由此求得无穷折线从起点至极限点间的距离为

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta}\right| = \sqrt{(\ln 2\sin\frac{1}{2}\theta)^2 + \frac{1}{4}(\theta - \pi)^2} \quad ②$$

从起点至极限点的向量辐角为

$$\pi - \theta + \arg(\ln(2\sin\frac{1}{2}\theta) + \frac{i}{2}(\theta - \pi)) \quad ③$$

B－6 设一种完全定向图由 n 个已知点确定，即对于点集 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 中任意两点 p_i, p_j，都有确定的方向 $p_i \to p_j$(或 $p_j \to p_i$). 求证：已知的点集存在一种排列

$$[p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_n}] = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

能成立连锁定向关系：$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_n$.

解 对 n 用数学归纳法来证明. $n = 2$ 时，命题虽然正确($n = 1$ 是平凡情形). 假定 $n = 2, 3, \cdots, k$ 时，命题正确，则可从

$k+1$ 个点决定的完全定向图中任取一点 b,并将其余的 k 个点关于点 b 分成下列两个子集

$$A=\{x \mid x\rightarrow b\}, C=\{x \mid b\rightarrow x\}$$

依题意知,A 和 C 是两个局部完全定向图.若 A 含有 p 个点,C 含有 q 个点,则 $p+q=k$.由归纳假定知 A 中的点存在连锁定向排列 $a_1\rightarrow a_2\rightarrow\cdots\rightarrow a_p$.同理可知 C 中的点存在连锁定向排列 $c_1\rightarrow c_2\rightarrow\cdots\rightarrow c_p$.再根据对 A 与 C 作的定义即得 $a_1\rightarrow a_2\rightarrow\cdots\rightarrow a_p\rightarrow b\rightarrow c_1\rightarrow c_2\rightarrow\cdots\rightarrow c_q$.

顺便指出,当 A,C 之一为空集的情形,更易得知命题的正确性.

B-7 设 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.若 $a_i>a_j$ 对于所有的 $j>i$ 都成立,则称 a_i 是此排列的一个"大"数.试计算全体 $n!$ 个排列中所有"大"数的平均值.

解 令 σ 是一个排列,$N_i(\sigma)=1$ 表示 σ 的第 i 个数是"大"数,$N_i(\sigma)=0$ 表示 σ 的第 i 个数不是"大"数.于是从 1 到 n 的全体 $n!$ 个排列中,$N_i(\sigma)$ 的平均值应是 $\frac{1}{n-i+1}$.因为 a_i 前面的 $i-1$ 个数共有 P_n^{i-1} 种排法,而每一排法后面都可以从余下的 $n-i+1$ 个数中选出一个最大的排在第 i 个位置.由此可得

$$\sum_{n=i} N_i(\sigma)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+2)(n-i)!$$

令 $i=1,\cdots,n$,即得本题所求"大"数的平均值为

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1$$

第 20 届美国大学生数学竞赛

A－1　设 n 为正整数.求证:$x^n - x^{-n}$ 可以表成 $x - x^{-1}$ 的实系数多项式的充要条件是 n 为奇数.

解　令 $z = x - x^{-1}$,若有实系数多项式 $P_n(z)$ 满足等式

$$x^n - x^{-n} = P_n(z)$$

则 $P_n(z)$ 中 z^n 的系数必等于 1. 比较上列等式两边 x^{-n} 的系数,因为 $-x^{-n} = (-x)^{-n}$,所以 n 必为奇数.必要性获证.

下面用数学归纳法证明充分性.

易知 $n = 1$ 时,$P_1(z) = z$,命题正确.

假定 $n = 3,5,\cdots,2k-1(k \geqslant 1)$ 时,命题正确,那么由

$$(x^2 + x^{-2})(x^{2k-1} - x^{1-2k}) = x^{2k+1} - x^{-2k-1} + x^{2k-3} - x^{3-2k}$$

可得　$(z^2 + 2)P_{2k-1}(z) = x^{2k+1} - x^{-2k-1} + P_{2k-3}(z)$

若定义　$P_{2k+1}(y) = (y^2 + 2)P_{2k-1}(y) - P_{2k-3}(y)$

则有　$P_{2k+1}(z) = x^{2k+1} - x^{-2k-1}$

即 $n = 2k + 1$ 时,命题正确.也就是说,n 为任意正奇数时,$x^n - x^{-n}$ 都能用 $x - x^{-1}$ 的实系数多项式表示.

A－2　设复平面上一正三角形的两个顶点分别是 z_1 和 z_2.求证:第三个顶点是 $-\omega z_1 - \omega^2 z_2$,其中 ω 是 1 的虚立方根.

解　依题意,令正三角形的第三个顶点为 z_3,则

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

易知 $\alpha^3 = -1, \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$,从而可得

$$z_3 = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 = -\alpha^2 z_1 - \alpha^4 z_2 = -\omega z_1 - \omega^2 z_2$$

其中 $\omega = \alpha^2 = e^{2\pi i/3}$ 是 1 的复立方根之一.

因为给定 z_1, z_2 后,z_3 有二解,所以若取 $\omega = \alpha^2 = e^{-2\pi i/3}$,即得另一解 $z_3 = -\omega^2 z_1 - \omega z_2$.

A－3 设 z 为任意复数，求适合下列等式的复函数 f：

$$f(z)+zf(1-z)=1+z$$

解 我们有

$$f(z)+2f(1-z)=1+z,\forall z \qquad ①$$

在 ① 中将 z 换成 $1-z$ 得

$$f(1-z)+(1-z)f(z)=2-z \qquad ②$$

由 ①，② 消去 $f(1-z)$ 得

$$(1-z+z^2)f(z)=1-z+z^2$$

因此，当 $1-z+z^2\neq 0$，即 $z\neq e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$ 时，$f(z)=1$.

记 $\alpha=e^{i\pi/3}$，则 $\overline{\alpha}=e^{-i\pi/3}$，$\alpha+\overline{\alpha}=1$，$\alpha\overline{\alpha}=1$.

令 $f(\alpha)=1+\beta$，$f(\overline{\alpha})=1+\gamma$，$z=\alpha$，则 ① 化为

$$\beta+\alpha\gamma=0$$

于是 $\gamma=-\overline{\alpha}\beta$，其中 β 可取任意复数.（$z=\overline{\alpha}$ 时亦得同样的结果）

因此所求满足等式 ① 的复函数 f 是

$$f(\alpha)=1+\beta,\forall\beta$$
$$f(\overline{\alpha})=1-\overline{\alpha}\beta,\forall\beta$$
$$f(z)=1,z\neq e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

A－4 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在全体实数上的两个实函数．求证：存在两个实数 x_1 与 x_2，满足下列三个不等式

$$0\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1,\ |x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|\geqslant\frac{1}{4}$$

解 我们有

$$\begin{aligned}1=&|(1-f(1)-g(1))+(f(1)+g(0))+(f(0)+\\&g(1))-(f(0)+g(0))|\leqslant\\&|1-f(1)-g(1)|+|f(1)+g(0)|+\\&|f(0)+g(1)|+|f(0)+g(0)|\end{aligned}$$

上式最后四个绝对值中至少有一个不小于 1/4．因此在 (0,0)，(0,1)，(1,0) 及 (1,1) 中，至少有一点的坐标满足本题求证之三个不等式．

A－5　沿水平直线方向飞行的一只麻雀正上方50呎(英尺旧称呎,1 英尺 = 0.304 8 m)处有一只鹫,正下方 100 呎处有一只鹰.鹫和鹰一起向着麻雀飞去捕食,并同时到达捕捉目标.已知鹰的飞行速度是麻雀的 2 倍,问三只鸟各飞行了多远距离?鹫的飞行速度是多少?

解　因题意没有特别指明,故可假定三种鸟都以匀速飞行.我们先作一般的考虑:

设鹫的飞行速度为 v,麻雀的飞行速度为 rv,$0 < r < 1$.

假定麻雀从(0,0)出发,沿 x 轴正向飞行,经时刻 t 后位于 (rvt, v) 处.鹫从 $(0, h)$ 出发(如图 1 所示,$h > 0$),经时刻 t 后位于 (x, y).依题意,后者的飞行方向始终正对前者.因此有

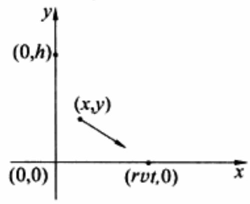


图 1

$$\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t} = \frac{rvt - x}{-y} \qquad ①$$

易知当 y 非负时,恒有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < 0$.取 y 作自变量,① 即化为

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x - rvt \qquad ②$$

因 v 为常数,故有

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = v \Rightarrow -\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + 1} = v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \qquad ③$$

等式左边冠以负号,是由于 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y < 0$.

对 ② 两边微分得

$$y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - rv\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

将 ③ 代入即得

$$y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = r\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + 1}$$

令 $z = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y$,则得一阶微分方程

$$y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = r\sqrt{1 + z^2} \Rightarrow r\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

解得

$$r\ln y = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) + C \qquad ④$$

注意 $y = h$ 时,$z = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 0$,从而有 $C = r\ln h$.

④ 可化为

$$\left(\frac{y}{h}\right)^r = z + \sqrt{1 + z^2}$$

解出 z 得

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{y}{h}\right)^{r}-\left(\frac{y}{h}\right)^{-r} \quad ⑤$$

再由初始条件 $x=0,y=h$ 即可求得⑤的解

$$2x=\frac{h}{1+r}\left(\frac{y}{h}\right)^{1+r}-\frac{h}{1-r}\left(\frac{y}{h}\right)^{1-r}+\frac{2rh}{1-r^2} \quad ⑥$$

其中 $y>0$.

当 $y\to 0^+$ 时,由⑥,⑤及②可得

$$x\to\frac{rh}{1-r^2},y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\to 0,x-rvt\to 0$$

因此,鹫经过时刻 $t=\dfrac{h}{v(1-r^2)}$ 到达位置 $\left(\dfrac{rh}{1-r^2},0\right)$.经过同一时刻,麻雀与鹫飞行的路程分别是

$$\frac{rh}{1-r^2}\text{与}\frac{h}{1-r^2}$$

现在回到本题的数值计算上来:

按鹰的出发位置,可取 y 轴的下方为正向.因此有 $h=100$ 呎,$r=1/2$.麻雀飞行的路程为 200/3 呎,鹰飞行的路程为 400/3 呎.

关于鹫的飞行情况:$h=50$ 呎,r 可由下列方程确定

$$\frac{50r}{1-r^2}=\frac{200}{3}\Rightarrow r=\frac{-3+\sqrt{73}}{8}\text{(舍去负根)}$$

鹫的飞行速度(是麻雀的 $1/r$ 倍)可以表示为

$$v=\frac{v_1(3+\sqrt{73})}{16}\approx 0.721v_1$$

其中,v_1 是鹰的速度.

三只鸟飞行的时间都是$\dfrac{400}{3v_1}$,而鹰的飞行路程为

$$\frac{400}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{73}}{16}\approx 96.2\text{(呎)}$$

A-6 设 m,n 是大于1的整数,$a_1,\cdots,a_{m+1}$ 是实数.求证:存在 m 个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$,满足下列两个条件:

(1) $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}_j)=a_j,j=1,\cdots,m$;

(2) $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_m)=a_{m+1}$.

解 令

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix} a_2 & b & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$A_i=\begin{bmatrix} a_i & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix},i=3,4,\cdots,m$$

矩阵中没写出的元素都是零. A_2 中的 b 是待定常数. 易见 $\det(A_j)=a_j,j=1,2,\cdots,n$, 且有

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{bmatrix} s & b & & & \\ 1 & m & & & \\ & & m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m\end{bmatrix}$$

其中 $s=a_1+a_2+\cdots+a_m$. 由此可得

$$\det(A_1+A_2+\cdots+A_m)=(sm-b)m^{n-2}$$

于是取
$$b=sm-a_{m+1}m^{-n+2}$$
即可得命题求证之结论.

A-7 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续一阶导数,且当 $x\in[a,b]$ 时,不成立连等式 $f(x)=f'(x)=0$. 求证:在 $[a,b]$ 上存在一个有连续一阶导数的函数 g,当 $x\in[a,b]$ 时,恒成立

$$fg'-f'g>0$$

解 设 $f:[a,b]\to R$ 是有连续导数的函数,且 f 与 f' 在定义域内同一点不同时为零. 令 $S=\{x\mid f(x)=0\}$,则 S 必为有限集. 否则 S 中就会有一个聚点 $x_0\in[a,b]$,使得 S 中的一个点列 $\{x_n\}$ 成立 $x_n\to x_0$,且 $x_n\neq x_0$. 由 $f(x_0)=0$ 及 f 的连续性可得

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

这与题设条件矛盾.

由于 f' 在 S 集上不为零, 故可找到一个多项式 h, 使得 $f'(x)h(x)=-1$,对于所有的 $x\in S$ 都成立. 令

$$g_c(x)=xf(x)+ch(x)$$

$$w_c(x)=f(x)g'_c(x)-f'(x)g_c(x)=$$

$$(f(x))^2+c(f(x)h'(x)-f'(x)h(x))$$

其中,c 为某个正数.我们来证明,对于充分小的正数 c,w_c 在 $[a,b]$ 上恒取正值,从而 g_c 即为所求的函数.

当 $x\in S$ 时,显然有 $fh'-f'h=1>0$.由 $fh'-f'h$ 的连续性知,在集 $T\supseteq S$ 内亦有 $fh'-f'h>0$.其中 T 是 $[a,b]$ 上的一个适当的开集.再者,$|fh'-f'h|$ 在 $[a,b]$ 上有界 M.在紧集 $[a,b]-T$ 上,$f^2\geqslant\varepsilon>0$.因此若 c 满足不等于 $0<c<\varepsilon/M$,则当 $x\in[a,b]-T$ 时有

$$w_c(x)\geqslant(f(x))^2-c\,|f(x)h'(x)-f'(x)h(x)|\geqslant\\ \varepsilon-cM>0$$

当 $x\in T$ 时有

$$w_c(x)\geqslant c(f(x)h'(x)-f'(x)h(x))>0$$

总之,在 $[a,b]$ 上恒有 $w_c>0$,从而 g_c 即为所求之函数.

B-1 设 X,Y 的正半轴上各有 m 个和 n 个定点.在此 m 及 n 个点中,每两点连一线段,如果每三条线段不共点,试确定所连全体线段交点的个数.(不包括线段的端点)

解 在 X 及 Y 轴上各任取两点连成一凸四边形,其对角线的交点必在第一象限内.反之,所连一切线段的交点都可用此方法得到.依题意,在第一象限内无三线段共点的情形出现.因此所连线段的交点都是唯一确定的,其总数应是

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2}=\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

B-2 设 c 为任一正实数.求证:c 可用无穷多种方法选择以下序列的项表成收敛级数的和,即

$$\frac{1}{10},\frac{1}{20},\cdots,\frac{1}{10n},\cdots$$

解 我们来证明更一般的命题:设 c 为任一正实数,$a(1)$,$a(2),\cdots,a(n),\cdots$ 是任一满足条件 $n\to\infty$ 时,$a(n)\to 0$ 的正数序列,且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n) \qquad ①$$

发散,那么存在无穷多的严格递增正整数序列 $n_1,n_2,\cdots$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}a(n_i)=c$$

令 k 为适合 $a(k)<c$ 的某个整数.定义 $n_1=k$,n_2 是使 $a(n_1)+a(n_2)<c$ 成立的最小整数,$\cdots$,一般地,n_i 是使下列不等

式成立的最小整数

$$a(n_1)+a(n_2)+\cdots+a(n_{t-1})+a(n_i)<c$$

因 $n\to\infty$ 时,$a(n)\to 0$,故上面定义的序列 $\{n_i\}$ 必定存在,并且正项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}a(n_i) \quad ②$$

以 c 为其上界.现证其和等于 c.

$\forall\varepsilon>0$,选取 $p>k$,使对所有的 $n>p$ 成立 $a(n)<\varepsilon$.由 ① 的发散性知,① 内有无穷多的项不在 ② 内出现.设 $q>p$,对任何 i 都有 $n_i\neq q$.因 $n_1<q$,故 $n\to\infty$ 时,必存在足码 r,能使 $n_{r-1}<q<n_r$,且有

$$a(n_1)+a(n_2)+\cdots+a(n_{r-1})+a(q)\geqslant c$$

于是

$$c-\sum_{i=1}^{r-1}a(n_i)\leqslant a(q)<\varepsilon$$

此不等式表明 ② 收敛于 c.

由 ② 的构造可知,n_1 可从 ① 中任一 $a(k)<c$ 的 k 开始,因此在 ① 中存在无穷多种选择,能使 ② 收敛于 c.

令 $a(n)=\dfrac{1}{10n}$,即得本题求证之结论.

B-3　试举出一个从 $[0,1]$ 映射到 $[0,1]$ 的连续函数 $f(x)$,对于每一个 x 的值都有无穷多个函数值与之对应.

解　我们知道,著名的皮亚诺曲线即可作为存在连续满映射

$$g:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$$

的一个例子.

下面再举一例以示一斑:

先用一无穷三角级数来定义一个几乎满足本题要求的函数,然后对其稍加变形即得完全符合要求的函数.

选取 p,使 $0<p<1$,并令

$$h(x)=(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x),x\in[0,1]$$

此级数以 $(1-p)\sum p^{k-1}$ 为其强级数,因此 h 连续,且 $|h(x)|\leqslant 1$.易知当且仅当 $x=0,1/3,2/3,1$ 时,才有 $|h(x)|=1$,即 $h(0)=h(2/3)=1,h(1/3)=h(1)=-1$. 下面证明 h 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$ 内的每一点都可取无穷多个不超出闭区间 $[-1,1]$ 的函数值.令

$$h(x)=h_n(x)+R_n(x)$$

其中 $$h_n(x)=(1-p)\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x)$$

$$R_n(x)=(1-p)\sum_{k=n}^{n-1}p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x)$$

设 $\alpha\in(-1,1)$，则存在一个正整数 q，当 $n\geqslant q$ 时，能使

$$h_n(0)>\alpha>h_n(1)$$

且对任一固定的 $n(\geqslant q)$，存在某个

$$t_n\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$$

能使 $h(t_n)=\alpha$.

$\forall X$，我们有

$$|h'(x)|\leqslant(1-p)\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}3^{k^2}\pi\leqslant 3^{(n-1)^2}\pi$$

由此可推知，若

$$|x-t_n|<\frac{1}{\pi}p^n(1-2p)3^{-(n-1)^2}$$

则 $$|h_n(x)-\alpha|<p^n(1-2p)$$

由 $\cos(3^{n^2}\pi x)$ 的周期性知，在每一长为 $2\cdot 3^{-n^2}$ 的区间上，$h(x)$ 的第 n 项 $(1-p)p^{n-1}\cos(3^{n^2}\pi x)$ 的值在 $-(1-p)p^{n-1}$ 与 $+(1-p)p^{n-1}$ 之间振动，而 $|R_{n+1}(x)|$ 关于 p^n 一致有界. 因此，$R_n(x)$ 的值在每一长为 $2\cdot 3^{-n^2}$ 的区间上至多是在 $-(1-2p)p^{n-1}$ 与 $+(1-2p)p^{n-1}$ 之间振动，令

$$A_n=\left[\frac{I_n\text{ 的长}}{2\cdot 3^{-n^2}}\right]\geqslant\left[\left(\frac{1-2p}{6\pi}\right)(qp)^n\right]$$

其中，[ ] 表示不超过其内所含数值的最大整数. $I_n\subseteq[0,1]$，I_n 的长大于等于 $\frac{1}{\pi}p^n(1-2p)3^{-(n-1)^2}$. 则在 I_n 所含 A_n 个不重叠子区间的每一个内，$h=h_n+R_n$ 取值 α 至少一次，从而在 I_n 内取值 α 至少 A_n 次. 因 n 可以任意大，当 $(qp)^n\to\infty$ 时，即有

$$\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$$

能使 $h(x)=\alpha$，其中 α 可取 $(-1,1)$ 上的任意值.

最后令

$$f(x)=\sin^2\left(2h\left(\frac{x+1}{q}\right)\right)$$

即得完全符合本题要求的函数表达式.

B - 4　已知下列 5×5 矩阵

$$\begin{bmatrix} 11 & 17 & 25 & 19 & 16 \\ 24 & 10 & 13 & 15 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 2 & 18 \\ 23 & 4 & 1 & 8 & 22 \\ 6 & 20 & 7 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

试从这个矩阵中选出 5 个元素，使得它们任何两个都不位于相同的行或列，并使其中最小的一个有尽可能大的值．证明：你所选答案的正确性．

解　因为矩阵的边线只有四条，所以依题意从边线上最多只能选取四个元素．从而至少要从给定矩阵的中心 3×3 子矩阵中选取一个元素，易见这个元素的最大值是 15．再从矩阵的四条边线上选取 25，18，23，20 即可．事实上，当 15 选定以后，在第三列必须选取25，在第三行必须选取 18，最后在第四、五两行必须选取 23 与 20．这样选取的 5 个元素是符合本题要求的唯一解．

B - 5　已知两直线方程：

(1) $x=t+1,y=2t+4,z=-3t+5$;

(2) $x=4t-12,y=-t+8,z=t+17$.

求与此二直线相切的最小球面方程．

解　用 l,m 表示两已知直线．由题设数据易知 l 与 m 异面，从而存在唯一的公垂线 PQ，垂足 P 在 l 上，垂足 Q 在 m 上．以 PQ 为直径的球面即为本题所求的最小球面．

l 与 m 用含参数 t 的向量表达式分别为

$$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v} \text{ 与 } \boldsymbol{b}+t\boldsymbol{w}$$

因为
$$PQ\perp l,PQ\perp m$$
所以
$$\overrightarrow{PQ}=\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}, \text{其中 } \rho \text{ 是待定常数}$$

令 $\boldsymbol{a}+\sigma\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{w}$ 分别表示 P,Q 二点（σ,τ 为待定常数），则 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\sigma\boldsymbol{v}+\tau\boldsymbol{w}$，从而得出

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\rho(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})-\sigma\boldsymbol{v}+\tau\boldsymbol{w} \quad ①$$

由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 皆为已知向量，且 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 线性无关，故 ρ,σ,τ 可以求出．于是所求球面的中心是

$$\boldsymbol{a}+\sigma\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \quad ②$$

半径是
$$\frac{1}{2}|\rho||\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}| \quad ③$$

由题设条件知

$$\boldsymbol{a} = \{1,4,5\}, \boldsymbol{b} = \{-12,8,17\}$$
$$\boldsymbol{v} = \{1,2,-3\}, \boldsymbol{w} = \{4,-1,1\} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \{-1,-13,-9\}$$

由 ① 解得 $\rho = -\frac{147}{251}, \sigma = -\frac{782}{251}, \tau = \frac{657}{251}$

由 ② 求得球面中心为

$$\frac{1}{502}\{-915,791,8\ 525\}$$

由 ③ 求得球面半径的平方为

$$\frac{1}{4}\rho^2 |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|^2 = \frac{147^2}{1\ 004}$$

最后得所求球面方程为

$$(502x + 915)^2 + (502y - 791)^2 + (502z - 8\ 525)^2 = 251 \cdot 147^2$$

B－6 设正无理数 x 与 y 满足下列等式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

求证：两序列 $[x],[2x],\cdots,[nx],\cdots$ 与 $[y],[2y],\cdots,[ny],\cdots$

合在一起恰好不重复地构成自然数集. 记号[ ] 表示不超过其内所含数值的最大整数.

解 易知 $x > 1, y > 1$，因此题设的两个序列的前一项与相邻的后一项的差数大于 1，从而得知整数序列

$$[x],[2x],[3x],\cdots,[nx],\cdots \quad ①$$
$$[y],[2y],[3y],\cdots,[ny],\cdots \quad ②$$

都是严格递增的.

假定存在某个整数 p 在 ① 与 ② 中重复出现，那么必定存在两个整数 a 与 b，使得

$$p = [ax] = [by] \Rightarrow p < ax < p + 1, p < ay < p + 1$$

（因为 ax 与 ay 都是无理数，所以上列不等式严格成立）由此推得矛盾的不等式组

$$p = \frac{p}{x} + \frac{p}{y} < a + b < \frac{p+1}{x} + \frac{p+1}{y} = p + 1$$

因此在 ① 与 ② 中决不会出现相同的整数.

再假定存在某个整数 p 在 ① 与 ② 内都不出现，那么也会存在两个整数 a 与 b，使得

$$ax < p < p + 1 < (a + 1)x$$
$$by < p < p + 1 < (b + 1)y$$

由此推得

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1<\frac{a+1}{p+1}+\frac{b+1}{p+1}\Rightarrow$$
$$a+b<p<p+1<a+b+2$$

这也是矛盾的不等式组.因此本题论断正确.

B－7　设 f_n 对每个正整数 n 都是 n 个实变数的实对称函数,且对一切 n 及任何 $n+2$ 个实数 $x_1,\cdots,x_{n+1},y$ 满足下列三个等式:

$$f_n(x_1+y,\cdots,x_n+y)=f_n(x_1,\cdots,x_n)+y \tag{①}$$
$$f_n(-x_1,\cdots,-x_n)=-f_n(x_1,\cdots,x_n) \tag{②}$$
$$f_{n+1}(f_n(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})=f_{n+1}(x_1,\cdots,x_{n+1}) \tag{③}$$

求证:

$$f_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n) \tag{④}$$

解　由 ② 可得 $f_1(0)=-f_1(0)$,故有

$$f_1(0)=0 \tag{⑤}$$

再由 ⑤ 和 ① 可得

$$f_1(x)=f_1(0)+x=x$$

此等式表明 ④ 对于 $n=1$ 是正确的.

对任何整数 $n>1$ 及任一实数 c,由 f_n 的对称性质及 ② 可得

$$f_n(c,0,\cdots,0,-c)=f_n(-c,0,\cdots,0,c)=-f_n(c,0,\cdots,0,-c)\Rightarrow \tag{⑥}$$
$$f_n(c,0,\cdots,0,-c)=0$$

假定 $n=k$ 时,④ 正确,则由 ③ 可知

$$f_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$$

只依赖于 x_{k+1} 及 $x_1+\cdots+x_k$.若令 $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=0$,则由推导 ⑥ 的方法可以推得

$$f_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})=f_{k+1}(-a_{k+1},0,\cdots,0,a_{k+1})=0 \tag{⑦}$$
$$\forall x_1,x_2,\cdots,x_{k+1},令\ a_i=x_i-u,i=1,2,\cdots,k+1$$

其中,u 为 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 的算术平均值,则易知

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=0$$

由 ① 与 ⑦ 即可推得

$$f_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})=f_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})+u=u$$

这就证明了 $n=k+1$ 时,④ 也正确.因此 ④ 对任意正整数 n 都正确.

第 21 届美国大学生数学竞赛

A－1　已知 n 为正整数,试确定下列方程中有序正整数对 (x,y) 的解的个数

$$\frac{xy}{x+y}=n$$

解　给定的方程可化为

$$(x-n)(y-n)=n^2 \quad ①$$

易见,或者 $x>n,y>n$,或者 $x<n,y<n$.且当 $0<x\leqslant n$ 及 $0<y\leqslant n$ 时,① 无解(因 $|x-n||y-n|<n\cdot n=n^2$).因此我们只须研究当 $x-n>0$ 及 $y-n>0$ 时,① 的整数解究竟有多少?为此只须确定把 n^2 分解成两有序因数的积有多少种不同的分法即可.

令 n 的质因数分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则

$$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$$

于是 n^2 分解成两有序因数的积的不同分法种数是 $(2\alpha_1+1)\cdot(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)$. 此即本题所求结果.

A－2　求证:在单位闭正方形内任意三点中至少有两点间的距离不超过 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

解　在已知单位闭正方形内任意确定三点,它们可能构成三角形或在一条线段上(退化情形).过所设三点分别作与已知正方形的边平行的直线(至多六条,至少四条),从中确定一个各边皆通过所设三点之一的矩形 R,于是所设三点至少有一个是 R 的顶点.将 R 在正方形内平行移动,使所设三点之一与正方形的一个顶点重合,而另二点仍然位于该正方形内.作这样的平等移动,显然不会变更所设三点间的相互距离.

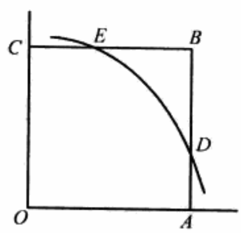


图 1

设如图 1,令 O 是所设三点之一,以单位闭正方形 $OABC$ 的边 OA,OC 为轴建立坐标系,记 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,则圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 AB 边交于点 $D(1,\sqrt{a^2-1})$,与 BC 边交于点 $E(\sqrt{a^2-1},1)$(注意 $1<a<\sqrt{2}$).

因为

$$|DE|^2 = 2(1-\sqrt{\alpha^2-1})^2 =$$
$$2(1-\sqrt{7-4\sqrt{3}}) = 2[1-(2-\sqrt{3})]^2 =$$
$$2(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = \alpha^2$$

所以 $|DE| = \alpha$.

假定所设三点的另二点为 P,Q,且 $|OP|,|OQ|,|PQ|$ 的长都大于 a,则 P,Q 必位于曲边 $\triangle BDE$ 内,但此曲边三角形内两点间的最大距离为 $|DE| = \alpha$,故 $|PQ| \leqslant \alpha$,即上述假定不能成立.这就证明了本题论断的正确性.

A - 3　设 t_1,t_2,t_3,t_4,t_5 为实数,求证

$$\sum_{j=1}^{5}(1-t_j)\exp\Big(\sum_{k=1}^{j}t_k\Big) \leqslant e^{e^{e^e}}$$

解　设 $f(x) = (1-x+a)e^x$,则 $f'(a) = 0, f''(a) < 0$.由此可知下列不等式成立,即

$$(1+x+a)e^x \leqslant e^a \qquad ①$$

其中 x 与 a 为任意实数.

在 ① 中令 $a = 0, x = t_5$,则

$(1-t_5)e^{t_5} \leqslant e^0 = 1 \Rightarrow$

$(1-t_4)e^{t_4} + (1-t_5)e^{t_4+t_5} \leqslant (1-t_4)e^{t_4} + e^{t_4} \leqslant e$

最后一步系由 ① 令 $a = 1$

$\Rightarrow (1-t_3)e^{t_3} + (1-t_4)e^{t_3+t_4} + (1-t_5)e^{t_3+t_4+t_5} \leqslant$

$(1-t_3)e^{t_3} + e\cdot e^{t_3} \leqslant e^e$

$\Rightarrow (1-t_2)e^{t_2} + (1-t_3)^{t_2+t_3} + (1-t_4)^{t_2+t_3+t_4} +$

$(1-t_5)e^{t_2+t_3+t_4+t_5} \leqslant (1-t_2)e^{t_2} + e^e\cdot e^{t_2} \leqslant e^{e^e}$

再类推一步即得

$$\sum_{i=1}^{5}(1-t_j)\exp\Big(\sum_{k=1}^{j}t_k\Big) \leqslant e^{e^{e^e}}$$

A - 4　设如图 1,已知平面上有两定点 P,Q 位于定直线 L 的一侧.试求第三点 R,使得 $PR + RQ + RS$ 取极小值,若 $RS \perp$ 直线 L,S 为垂足.

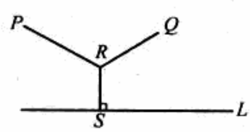


图 1

解　取 L 为 x 轴,令 $P = (0,a), Q = (c,b)$,不失一般性,可以假定 $c \geqslant 0, 0 < b \leqslant a$,取 Q 关于 L 的对称点 $Q^* = (c,-b)$,

作直线 PQ^* 交 L 于 K 则对 L 上任一点 X,易知成立下列不等式

$$PX + QX = PX + XQ^* \geqslant PQ = PK + KQ^* = PK + QK$$

仅当 $X = K$ 时成立等式(图2).

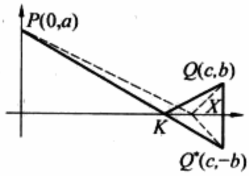


图2

我们将无穷带形区域 $x \geqslant 0, 0 < y \leqslant a$ 划分成三个子区域来进行研究,现分别考虑下列三种情形:

(1) $c \leqslant \sqrt{3}(a-b)$,即点 Q 位于闭 $\triangle POA$ 内.

(2) $\sqrt{3}(a-b) < c < \sqrt{3}(a+b)$,即点 Q 位于开 $\triangle PBA$ 内或位于线段 AB 内.

(3) $c \geqslant \sqrt{3}(a+b)$,即点 Q 位于 AB 上或位于它的右边(图3).

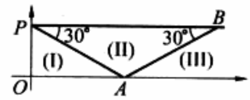


图3

现在令 $R = (x, y)$,并求

$$\sigma(R) = |PR| + |RQ| + |RS| = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-b)^2} + |y|$$

的极小值.当 R 不与 P, Q 重合,且不在直线 L 上时,我们有

$$\sigma'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2 + (y-b)^2}}$$

$$\sigma'_y = \frac{y-a}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{y-b}{\sqrt{(x-c)^2 + (y-b)^2}} \pm 1$$

其中第二个等式右边的 ± 1 表示 $y > 0$ 时取正号,$y < 0$ 时取负号.令 $\sigma'_x = \sigma'_y = 0$,经计算知,当 $y < 0$ 时,$\sigma(R)$ 无驻点.当 $y > 0$ 时,$\sigma(R)$ 有唯一驻点

$$R = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) + \frac{c}{2}, \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}c\right)$$

由于 $y > 0$,故需 $c < \sqrt{3}(a+b)$.

由求出驻点坐标的中间运算步骤,可以断定当点 Q 位于图中的区域(Ⅱ)时,过 Q 作平行于 BA 的直线交 PA 于 R,此即所求之驻点.当点 Q 位于区域(Ⅰ)或(Ⅲ)时,驻点不存在.

在区域(Ⅱ)内,我们可以算出

$$\sigma(R) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

在 σ'_x 及 σ'_y 不存在的点,我们有

$$\sigma(Q) = b + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \leqslant a + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} = \sigma(P)$$

在直线 L 上

$$\min \sigma(X) = \sigma(K) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

经比较知 $\sigma(R) < \sigma(Q), \sigma(R) < \sigma(K)$.

因此在区域(Ⅱ)内,R 点即为所求.

为了确定在(Ⅰ),(Ⅲ)两个区域内使 σ 达到极小值的点的位置,只须检验下列差式的符号即可.

在区域(Ⅰ)内,由 $c \geqslant \sqrt{3}(a-b)$ 可得

$$\sigma(Q)^2-\sigma(K)^2=b(b-4a+2\sqrt{(a-b)^2+c^2})<0$$

因此点 Q 是使 σ 达到极小值的点.

在区域(Ⅲ)内,由 $c \geqslant \sqrt{3}(a+b)$ 可得

$$\sigma(Q)^2-\sigma(K)^2=b(b-4a+2\sqrt{(a-b)^2+c^2})>0$$

因此点 K 是使 σ 达到极小值的点.

A-5　设 $f(x)$ 是对任何一个实系数多项式 $g(x)$ 都成立等式 $f(g(x))=g(f(x))$ 的实系数多项式.试确定并证明 $f(x)$ 所应具有的性质.

解　设 g 为一常数函数,例如 $g(x)\equiv a$,则 $f(g(x))=g(f(x))$ 化为 $f(a)=a$.因为 a 可取任意实数,所以 f 是恒等映射,即 $f(x)=x$.

A-6　一赌徒独自掷骰.他规定掷得几点记几分,一直掷到取得或超过预定的分数 n 为止,记 $P(n)$ 为恰好掷得总分 n 的概率.试求 $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$.

解　因为骰子每掷一次,出现点数的平均值是 21/6,故可猜测当 n 充分大时,将有

$$p(n)\approx\frac{1}{\frac{21}{6}}=\frac{2}{7}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}p(n)=\frac{2}{7}$$

我们来证明这一猜测是正确的.

将一颗骰子掷 k 次恰好得到总数 n 点的概率等于下列多项式展开式中 x^n 的系数

$$\left(\frac{1}{6}(x+x^2+\cdots+x^6)\right)^k$$

因为掷 k 次得到 n 点与掷 l 次得到 n 点($k\neq l$)是互斥事件,所以本题所求概率 $p(n)$ 是下列无穷级数中 x^n 的系数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}(x+x^2+\cdots+x^6)\right)^k$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\frac{6}{6-(x+x^2+\cdots+x^6)}=$$

$$\frac{6}{(1-x)(x+x^2+\cdots+x^6)}=$$

$$\frac{6}{(1-x)(6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5)}=$$
$$\frac{2}{7(1-x)}+\frac{2}{7}\cdot\frac{15+10x+6x^2+3x^3+x^4}{6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5}\Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)-\frac{2}{7}\right)x^n=$$
$$\frac{2}{7}\cdot\frac{15+10x+6x^2+3x^3+x^4}{6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5}$$

上面的推导纯属组合分析.现视 x 为复变数,并令

$$D=6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5$$

若 $x=1$,则 $D\neq 0$.假定 $x\neq 1$,但 $|x|\leqslant 1$,则

$$D(1-x)=6-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6\Rightarrow$$
$$|D||1-x|>6-6|x|\geqslant 0$$

因此 D 的零点位于复平面上的单位圆外部.于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)-\frac{2}{7}\right)x^n$$

的收敛半径大于1,而 $\lim\limits_{n\to\infty}p(n)=2/7$.

A-7 设 x 表示 n 个符号的各种排列,I 表示这 n 个符号的初始排列,$N(n)$ 表示使 $x^N=I$ 成立的最小正整数.求证:当 $n>1$ 时 $\frac{N(n)}{N(n-1)}=\begin{cases}1, n\text{ 能被两个不同的质数整除}\\ p, n\text{ 只能被质数 }p\text{ 的幂整除}\end{cases}$.

解 令 $L(n)$ 为 $1,2,3,\cdots,n$ 的最小公倍数,则 $L(n-1)\mid L(n)$,$n=2,3,\cdots$.我们来证明对任何 n 都有 $N(n)=L(n)$.

从 n 个符号中任取 i 个作一 x 的 i 阶子排列,易见 $i\mid N$ 是 $x^N=1$ 的充要条件.因为 n 个符号的所有 $\sum$ 个排列含有阶数为 $1,2,\cdots,n$ 的各种排列,所以 $i\mid N(n)$,$i=1,2,\cdots,n$.于是 $L(n)\mid N(n)$.反之,因为 $\sum$ 中的每一个排列都可以分解成阶数不超过 n 的轮换子排列的积,所以 $x^{L(n)}=1$,$\forall x\in\sum$,于是 $L(n)\geqslant N(n)$,对比 $L(n)\mid N(n)$,即得 $L(n)=L(n-1)$.

i 若 $n=ab$ 且 a,b 互质,则由 $a\mid L(n-1)$,$b\mid L(n-1)$,得 $ab\mid L(n-1)$,从而

$$L(n)\mid L(n-1)\Rightarrow L(n)=L(n-1)$$

ii 若 n 仅含质因数 p 的幂,令 $n=p^a$,则

$$\frac{n}{p}\mid L(n-1)\Rightarrow n\mid pL(n-1)\Rightarrow L(n)\mid pL(n-1)$$

另一方面 $p\left|\frac{L(n)}{L(n-1)}\Rightarrow pL(n-1)\right|L(n)$

故有
$$L(n) = pL(n-1)$$
综合 i, ii 并注意 $L(n) = N(n)$，得知：

当 n 能被两个不同的质数整除时
$$\frac{N(n)}{N(n-1)} = 1$$
当 n 只能被质数 p 的幂整除时
$$\frac{N(n)}{N(n-1)} = p$$

B－1　设 m, n 是不相等的两个整数. 试求 $n^m = m^n$ 的全部解. 并证明求得的解的完备性.

解　先假定 $m > 0, n > 0$，将 $n^m = m^n$ 化为等价方程
$$\frac{1}{m}\ln m = \frac{1}{n}\ln n \qquad ①$$
由
$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$
可以断定函数 $\ln x/x$ 当 $0 < x < \mathrm{e}$ 时严格增加，当 $x \geqslant \mathrm{e}$ 时严格减少，于是 ① 的解必须满足不等式 $m < \mathrm{e} < n$ 或 $n < \mathrm{e} < m$. 因此 m, n 必有一个等于 1 或 2，但因 $\ln 1 = 0$，故 $m = 1$ 或 $n = 1$ 都将导致 $m = n = 1$，这不是本题的解. 当 $n = 2$ 时，得 $n = 4$，或者 $n = 2$ 时，得 $m = 4$ 是 m, n 为正整数时仅有的两组解.

再者，原方程显然没有 m 或 n 取 0 值的整数.

最后假定 $m < 0$，若 $n > 0$，令 $m = -k$，则 $m^n = n^m$ 化为 $(-k)^n = 1/n^k$，这也显然无整数解. 若 $n < 0$，令 $n = -l$，则 $m^n = n^m$ 化为 $(-k)^{-l} = (-l)^{-k}$，从而必须
$$(-1)^l = (-1)^k \text{ 及 } k^i = l^k$$
由前面关于 $m > 0, n > 0$ 所作的分析知 $k = 2, l = 4$ 或 $l = 2, k = 4$ 恰好符合要求，并且再无其他的整数解.

综上所述，原方程仅有四组符合要求的整数解
$$(m, n) = (2,4), (4,2), (-2,-4), (-4,-2)$$

B－2　求下列二重级数的和：
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k-j-(k+j)^2}$$

解　用直接分析的方法证明：对此二重级数先沿对角线 $j + k = n$ 上的项求和，再对 n 求和，从而有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-3k-j-(j+k)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k-n-n^2}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}(1-2^{-2n-2})2^{-n-n^2}\right)=$$
$$\frac{4}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-n^2}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-(n+1)(n+2)}\right)=$$
$$\frac{4}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n(n+1)}-\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m(m+1)}\right)=\frac{4}{3}$$

其中第三步拆成两级数的差(代数和)是允许的,因拆成的两级数都收敛.

B-3 设平面上流体质点运动的规律由下列速度分量公式所描述:

$$\frac{dx}{dt}=y+2x(1-x^2-y^2) \quad ①$$
$$\frac{dy}{dt}=-x$$

试作出原点邻近的轨线图,并讨论个别质点当 $t\to+\infty$ 时的运动情形,证明你的论断.

解 这是一个自治微分系统(即方程组右边不显含时间变量 t).因为当且仅当 $x=y=0$ 时,$dx/dt=dy/dt=0$,所以原点是此方程组的唯一奇点,除原点外,过相平面上其他任一点,① 存在唯一的轨线.

为了作出在原点邻近的轨线图,略去 ① 中右边的高次项得其线性近似方程组

$$\frac{dx}{dt}=2x+y \quad ②$$
$$\frac{dy}{dt}=-x$$

令 $v=x+y$,② 即化为 $dv/dt=v\Rightarrow v=ae^t$,进而求得 ② 的解为

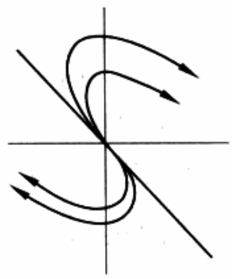
$$x=(at+b)e^t$$
$$y=(-at+a-b)e^t \quad ③$$

其中 a,b 为任意常数.

在确定曲线 ③ 的性质之前,先作代换

$$x_1=at+b$$
$$y_1=-at+a-b \quad ④$$

由于 $x_1+y_1=a$(常数).故 ④ 表示流体的质点沿此直线作匀速运动.直线 $x_1+y_1=0$ 上的点都成为稳定点,其它点的运动情形如图 1 所示.


③的轨线图

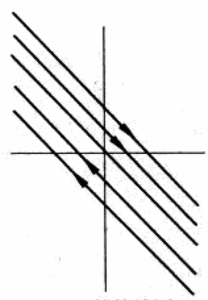
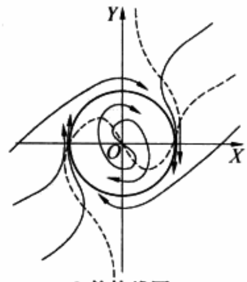

④的轨线图

图 1

回到方程组 ③ 来看,当 $t\to-\infty$ 时,因子 e^t 将 ④ 的每条直线都急速"拉向"原点. ③ 的每条轨线都在原点以 $x+y=0$ 作为其切线(图 1),这样的奇点叫做不稳定结点. 方程组 ① 在原点的充分小邻域内的轨线与 ③ 是类似的.



① 的轨线图

图 2

再对系统 ① 作进一步研究. 易知

$$x=\cos t, y=\sin t$$

是 ① 的一个解,它表示绕顺时针方向旋转的单位圆. 我们来证明除奇点外,相平面上一切轨线,当 $t\to+\infty$ 时,都渐近地趋向于单位圆,即单位圆内的任一轨线都向外盘旋接近它,而单位圆外的任一轨线都向内盘旋接近它.

将 ① 用极坐标表示得

$$r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x^2(1-r^2) \quad ⑤$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r^2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-1+(r^2-1)\sin 2\theta \quad ⑥$$

由 ⑤ 可知 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t>0$, r 是 t 的严格递增函数($x=0$ 对应着奇点 $r=0$,不予考虑),再者 r 也不会界于 $\rho<1$ 的闭轨线 L 内,否则界于单位圆及 L 形成的环域内的任一轨线(当 $t\to-\infty$ 时)将与 L 相交,这与 ① 仅有一个奇点相矛盾. 因此单位圆内任一轨线当 $t\to+\infty$ 时,都无限盘旋接近于此单位圆. 同理可证,在单位圆外的任一轨线也都无限盘旋接近于此单位圆.

由 ⑥ 可知,当 $3/4<r<6/5$ 时, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t<-1/2$,这表明在单位圆的充分小邻域内,一切轨线都是顺时针方向盘旋接近于它的.

① 的轨线如图 2 所示. 其中虚曲线是按方程 $y+2x(1-x^2-y^2)=0$ 作出的,过此曲线上任一点 P 的轨线皆有过点 P 的铅垂切线. 而过 y 轴上任一点 Q 的轨线皆有过点 Q 的水平切线.

B-4 设有一首项与公差皆为正整数的无穷等差数列 a, $a+d$, $a+2d$, $\cdots$. 求证:对于任何正整数 k,或者已知数列中无一项是整数 k 的方幂,或者有无穷多项是整数 k 的方幂.

解 假定已知数列中有一项等于 n^k(即恰为整数 n 的 k 次幂),那么由二项式定理可得

$$(n+d)^k=n^k+d\left(\binom{k}{1}n^{k-1}+\binom{k}{2}n^{k-2}d+\cdots+d^{k-1}\right)$$

因此 $(n+d)^k$ 也是已知等差数列的一项,由归纳法可知, $(n+2d)^k$, $(n+3d)^k$, $\cdots$,都是已知等差数列里的项. 再者,例如等差数

列 2,6,10,⋯,$2+4d$,⋯ 中就不会含有 n^k 的项出现.

B－5 设已知一数列如下:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1 + \sin(-1)$$
$$\vdots$$
$$a_n = 1 + \sin(a_{n-1} - 1)$$
$$\vdots$$

试计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

解 令 $b_n = a_n - 1$,则 $b_0 = -1$,而

$$b_n = \sin b_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots \quad ①$$

将递推关系式①与 $y = x$ 进行比较,如图1所示,启发我们猜想 $n \to \infty$ 时,b_n 从 -1 增加到0,事实上,当 $-\pi/2 < x < 0$ 时,$x < \sin x < 0$.再由 $-1 \leqslant b_{n-1} < 0$ 可推得 $b_{n-1} < b_n < 0$.于是

$$-1 = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < 0$$

从而 $\lim b_n = c$ 存在.对①两边取极限得 $c = \sin c \Rightarrow c = 0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.下面证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = 0 \quad ②$$

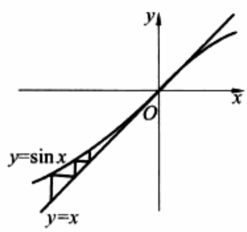


图 1

任给 $\varepsilon > 0$,可选取充分大的整数 p,使当 $k > p$ 时,恒成立 $b_k > -\varepsilon$.再选取 m,使 $m\varepsilon > p$ 及 $m > p$.于是当 $n > m$ 时,我们有

$$\sum_{k=1}^{n}(-b_k) = \sum_{k=1}^{p}(-b_p) + \sum_{k=p+1}^{n}(-b_k) < p + n\varepsilon < 2n\varepsilon \Rightarrow$$

$$0 > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k > -2\varepsilon$$

由 ε 的任意性得知②成立,最后即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = 1$$

B－6 任何一个正整数可以写成 $n = 2^k(2l+1)$,其中 k, l 皆为非负整数.令 $a_n = \mathrm{e}^{-k}$,$b_n = a_1 a_2 \cdots a_n$,求证:$\sum b_n$ 收敛.

解 易知当且仅当 n 为奇数时,$a_n = \mathrm{e}^0 = 1$,而 n 为偶数时,$a_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}$,因此

$$b_{2k} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2k} \leqslant e^{-k}, b_{2k+1} \leqslant e^{-k} \Rightarrow$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2k} <$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2k+1} \leqslant$$
$$1 + 2e^{-1} + 2e^{-2} + \cdots + 2e^{-2k} < 1 + \frac{2e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

这表明正项级数 $\sum b_n$ 的部分和有界,故 $\sum b_n$ 收敛.

B－7　设实函数 $g(t)$ 与 $h(t)$ 当 $t \geqslant 0$ 时连续,且有函数 $v(t)$ 与 $u(t)$ 分别满足下列具有初值的微分不等式与微分方程

$$\frac{dv}{dt} + g(t)v \geqslant h(t), v(0) = c$$
$$\frac{du}{dt} + g(t)u \geqslant h(t), u(0) = c$$

求证:$v(t) \geqslant u(t)(t \geqslant 0)$.并且对充分小的 $t > 0$,下列初值问题的解

$$\frac{dv}{dt} + g(t)v = v^2, v(0) = c_1$$

可以写成

$$V = \max_w \left(c_1 e^{-\int_0^t [g(s) - 2w(s)] ds} - \int_0^t e^{-\int_0^t [g(s_1) - 2w(s_1)] ds_1} w^2(s) ds \right)$$

其中,极大值是对任何连续函数 $w(t)$ 在某个正区间 $[0, t_0]$ 上确定的.

解　令

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds$$

则 $G' = g$,又令 $x = ue^G, y = ve^G$,则

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{du}{dt} + gu \right) e^G = he^G$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dv}{dt} + gv \right) e^G \geqslant he^G$$

因为 $e^G > 0$,所以 $d(y - x)/dt \geqslant 0$.注意 $x(0) = y(0) = c$ 知当 $t \geqslant 0$ 时

$$y(t) \geqslant x(t) \Rightarrow v(t) \geqslant u(t)$$

再假定 v 在某个区间 $[0, t_0]$ 上满足

$$\frac{dv}{dt} + gv = v^2, v(0) = c$$

并在 $[0, t_0]$ 上任选一个连续函数 w,则

$$(v - w)^2 \geqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+(g-2w)v=v^2-2wv\geqslant -w^2$$

令
$$W(t)=\int_0^t w(s)\mathrm{d}s,\gamma=v\mathrm{e}^{G-2w}$$

则
$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+(g-2w)v\right)\mathrm{e}^{G-2w}\geqslant -w^2\mathrm{e}^{G-2w}\Rightarrow$$

$$\gamma(t)\geqslant c_1-\int_0^t w^2\exp(G(s)-2W(s))\mathrm{d}s\Rightarrow$$

$$v(t)\geqslant c_1\exp(-G(t)+2W(t))-$$
$$\int_0^t\exp(G(s)-G(t)-2(W(s)-W(t)))w^2(s)\mathrm{d}s\Rightarrow$$

$$v(t)\geqslant\max_w(c_1\exp(-G(t)+2W(t))-$$
$$\int_0^t\exp(G(s)-G(t)-2(W(s)-$$
$$W(t)))w^2(s)\mathrm{d}s)$$

若取 $w=v$,则上面一系列不等式成为等式.因此

$$v(t)=\max_w(c_1\exp(-G(t)+2W(t))$$
$$-\int_0^t\exp(G(s)-G(t)-2(W(s)-$$
$$W(t)))w^2(s)\mathrm{d}s)$$

这等价于求证的结论.

注意初值问题

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+gv=v^2,v(0)=c_1$$

的解在有限区间内可以无界.例如当 $t\uparrow t_1$ 时,可使 $v\to\infty$.故上述论证仅于 $t<t_1$ 保持有效.因此对任何 t_0,当 $0<t_0<t_1$,上述结论在 $[0,t_0]$ 上成立.

第22届美国大学生数学竞赛

A－1　求证:方程 $x^y=y^x$ 位于第一象限内的图形由一条直线和一条曲线组成.试确定此直线与曲线交点的坐标.

解　在第一象限内,$x^y=y^x$ 等价于

$$\frac{1}{y}\ln y=\frac{1}{x}\ln x \tag{①}$$

作辅助函数

$$f(t)=\frac{1}{t}\ln t,t>0$$

因为 $f'(t)=\frac{1}{t^2}(1-\ln t)$,所以 f 当 $t\leqslant e$ 时严格递增,$t\geqslant e$ 时严格递减,并在 $t=e$ 处达到极大值 e^{-1}(图1).又易知 $t\to0$ 时,$f(t)\to-\infty$;$t\to+\infty$ 时,$f(t)\to0$.因此,若 $\alpha\in(0,e^{-1})$,则 $f(t)=\alpha$ 有两个解,一个位于 $(1,e)$ 内,另一个位于 $(e,+\infty)$ 内.当 α 充分靠近零时,$f(t)=\alpha$ 的两个解分别趋于1和 $+\infty$.当 α 充分靠近 e^{-1} 时,$f(t)=\alpha$ 的两个解从e的两边趋于e.

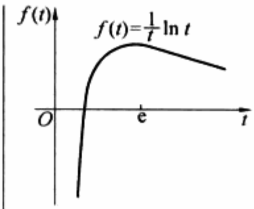


图1

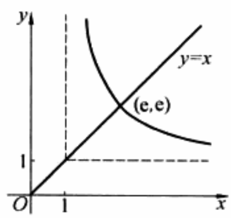


图2

据上述分析推知,方程①的图形是由直线 $y=x$ 及位于区域 $D=\{(x,y)\mid x>1,y>1\}$ 内的一条曲线 M 所组成.并且 M 以 $x=1$ 及 $y=1$ 为渐近线(图2).由方程 $x^y=y^x$ 显然可知 M 关于直线 $y=x$ 对称,其交点为 (e,e).

A－2　设 $f(x,y)$ 是定义在第一象限的二元实函数,若对任意正数 x,y,存在一个正数 k,使得 $|f(x,y)|<(x+y)k$,则称 $f(x,y)$ 线性有界.试对实数 α,β 求使 $x^\alpha y^\beta$ 为线性有界的充要条件.

解　假定 $\forall x>0$ 及 $\forall y>0$,有 $x^\alpha y^\beta<(x+y)k$,令 $x=y=t$,则 $t^{\alpha+\beta-1}<2k$ 对任意正数 t 成立,因此必须 $\alpha+\beta=1$.再令 $x=s,y=1-s$,则 $s^\alpha(1-s)^\beta<k$ 在 $0<s<1$ 内成立.于是当 $s\to0$ 时,必须 $\alpha\geqslant0$,当 $s\to1$ 时,必须 $\beta\geqslant0$.这就证明了 $\alpha\geqslant$

$0,\beta \geqslant 0$ 及 $\alpha+\beta=1$ 是使 $x^{\alpha}y^{\beta}$ 线性有界的必要条件.

反之,假定 $\alpha \geqslant 0,\beta \geqslant 0$ 及 $\alpha+\beta=1$.则对 $0<t<1$,显然有

$$t^{\alpha}(1-t^{\beta})<1^{\alpha}1^{\beta}=1$$

于是 $$x^{\alpha}y^{\beta}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{x}{x+y}\right)^{\beta}(x+y)<x+y$$

对任意正数 x,y 都成立.因此只须取 $k=1$,即知 $x^{\alpha}y^{\beta}$ 是线性有界函数.这就证明了条件的充分性.

A－3 试求:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$.

解 先将和式写为

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

由 $$\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}<\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

可得 $$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<S_n<\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}$$

A－4 设 f 为一定义在正整数集合上的函数,$f(1)=1,n>1$ 时,$f(n)=(-1)^k$,其中 k 为 n 的所有质因数的个数.例如 $f(g)=(-1)^2,f(20)=(-1)^3$.定义 $F(n)=\sum f(d)$,其中 d 表示 n 的所有正约数.求证:$F(n)$ 等于0或1.并确定对于怎样的 $n,F(n)=1$?

解 设 m,n 互质,则 mn 的每一个约数可唯一写成 d_1d_2,使得 $d_1\mid m,d_2\mid n$,反之亦然.因此

$$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$$

而 $$F(mn)=\sum_{d\mid mn}f(d)=\sum_{d_1\mid m}\sum_{d_2\mid n}f(d_1)f(d_2)=F(m)F(n)$$

故 F 是积性函数.若 p 为质数,α 为正整数,则

$$\begin{aligned}F(p^2)&=f(1)+f(p)+f(p^2)+\cdots+f(p^2)=\\&1-1+1-\cdots+(-1)^2=\\&\begin{cases}1,\alpha\text{ 为偶数}\\0,\alpha\text{ 为奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

当 n 为任一正整数时,设 n 的标准分解式为

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

于是
$$F(n) = F(p_1^{\alpha_1}) F(p_2^{\alpha_2}) \cdots F(p_k^{\alpha_k})$$
显然而见，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 中有一个为奇数，则 $F(n) = 0$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 全都是偶数，则 $F(n) = 1$. 换句话说

$$F(n) = \begin{cases} 1, n \text{ 为完全平方数} \\ 0, n \text{ 不是完全平方数} \end{cases}$$

A-5　设 Ω 是由 n 个点组成的集. Ω 的 2^n 个子集作为元素又组成一个新集. 而 $\sum$ 是这个新集的非空子集. 它关于交、并、补运算是封闭的(即若 $A \in \sum, B \in \sum$，则 $A \cap B, A \cup B, \Omega - A, \Omega - B$ 也都属于 $\sum$). 令 k 表示集 $\sum$ 中元素的个数，试确定 k 的取值范围，并加以证明.

解　因 $\sum$ 非空，令 $A \in \sum, A \neq \varnothing$ 及任何一个 $B \in \sum$. 若 $A \cap B$ 或者等于 $\varnothing$，或者等于 A，则称 A 是 $\sum$ 的一个极小元素. 一般地，若 $A \in \sum$，且 A 只含有一个点，则 A 即是 $\sum$ 的一个极小元素. 若 $\sum$ 中不存在仅含一个点的极小元素，则可进而考察 $\sum$ 中无含两个点的极小元素. 依此类推，若 $\sum = \{\varnothing, \Omega\}$，则 Ω 即为 $\{\varnothing, \Omega\}$ 的极小元素.

令 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ 是 $\sum$ 中全部极小元素的一个适当编组，则它们两两不会相交(即不含公共点). 若不然，当 $i \neq j$ 时，由 $B_i \cap B_j = B \neq \varnothing$ 及 B_i, B_j 的极小性可推得 $B = B_i = B_j$，这与 $B_i \neq B_j$ 矛盾.

又若 $\Omega - (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p) \neq \varnothing$，则 $\Omega - (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p)$ 不是极小元素，从而必有某个极小元素 B_i 使得
$$B_i = B_i \cap (\Omega - (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p)) = \varnothing$$
这不可能，故必有
$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p = \Omega$$

$\forall C \in \sum$，我们有
$$C = C \cap \Omega = C \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p) = (C \cap B_1) \cup (C \cap B_2) \cup \cdots \cup (C \cap B_p)$$
于是又由 B_i 的极小性推得，$C \cap B_i$ 或者等于 $\varnothing$，或者等于 B_i. 因此 $\sum$ 中的每个元素都是 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ 中若干个的并. 反之，每个这样的并也是 $\sum$ 中的一个元素. 这就证明了 $\sum$ 中全体元素的个数(包括 $\varnothing$)是

$$\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{p}=2^p,1\leqslant p\leqslant n$$

将 Ω 中的 n 个点任意分成 p 组，即可得到 $B_1,B_2,\cdots,B_p(p=1,2,\cdots,n)$. 按定义，它们就是 $\sum$ 的全体极小元素. 因而本题问及的 k 的取值范围是 $2^1,2^2,\cdots,2^n$.

A－6　设 $J_2=\{0,1\}$ 是模 2 的完全剩余系. $J_2[x]$ 表示系数属于 J_2 且允许有一个待定系数的多项式整环. 求证：当 $n+1$ 是合数时，$p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ 在 $J_2[x]$ 上是可约的. 问当 $n+1$ 是质数时，属于 $J_2[x]$ 的 $p(x)$ 在 $J_2[x]$ 上是否不可约？

解　令 $n+1=sr,s>1,r>1$，则

$$1+x+\cdots+x^n=$$
$$(1+x+\cdots+x^{r-1})(1+x^n+x^{2r}+\cdots+x^{(s-1)r})$$

论断正确.

反之不然. 例如，我们有

$$(1+x+x^3)(1+x^2+x^3)=$$
$$1+x+x^2+3x^3+x^4+x^5+x^6=$$
$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6(\bmod 2)$$

其中 $6+1=7$ 是质数.

A－7　设欧氏平面上有一闭圆盘 D(包括圆周及其内部) 含有一个非空闭集 S，而 D 又是含有 S 的任一闭圆盘的子集. 求证：D 内每一点都是 S 上某两点所连线段的中点.

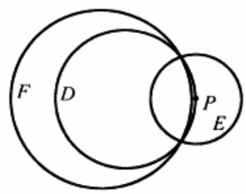


图 1

解　我们先证明 S 含有 D 的整个圆周. 若不然，如图 1，假定 D 的圆周上有一点 P 不在 S 内，因 S 是闭集，故存在以 P 为圆心以充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径的小圆盘 E 不属于 S. 于是我们可以作出一个圆盘 F 含有 $(D-E)$ 及 S，因而 $P\notin F$. 但这与题设条件"含有整个 S 的 F 必含有整个 D" 相矛盾(这样的 F 必定存在，下面再补充证明这一事实)，因此 S 必含有 D 的整个圆周.

显然，D 内任一点都是 D 的圆周上一条弦的中点，而 S 含有 D 的整个圆周，这就证明了本题的论断正确.

关于 F 的存在性证明：设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-a^2\leqslant 0\}$，并假定 D 上的点 $P(a,0)$ 不在 S 内，作 $E=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2-\varepsilon^2\leqslant 0\}$，$\varepsilon>0$ 充分小，令

$$\varphi(x,y)=(x^2+y^2-a^2)-\frac{1}{2}((x-a)^2+y^2-\varepsilon^2)$$

作 $$F=\{(x,y)\mid\varphi(x,y)\leqslant 0\}$$

则有 $$x^2+y^2-a^2\leqslant 0\Leftrightarrow(x,y)\in D$$

$$(x-a)^2+y^2-\varepsilon^2>0\Leftrightarrow(x,y)\notin E$$

从而推得 $$\varphi(x,y)<0\Leftrightarrow(x,y)\in(D-E)$$

即$(D-E)\subseteq F$.但是

$$\varphi(a,0)=\frac{1}{2}\varepsilon^2>0$$

因此 $P\notin F$.

B－1　设有正实数序列 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$,令

$$s_n=\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

$$r_n=\frac{1}{n}(\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1})$$

若 $n\to\infty$ 时,s_n 与 r_n 的极限存在,求证:乘积 s_nr_n 不小于 1.

解　显然只须证明对于任何一个 n(或对于任何一个 $n>N$,N 为充分大的正整数),成立 $r_ns_n\geqslant 1$ 即可.

令 $\beta_i=\alpha_i^{\frac{1}{2}},\gamma_i=\alpha_i^{-\frac{1}{2}}$,根据柯西－许瓦兹不等式得

$$n^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{-1}\right)=(ns_n)(nr_n)\Rightarrow r_ns_n\geqslant 1$$

B－2　已知二正数 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$.如果在长为 β 的线段上随机地任取二点,问所取二点间的距离不小于 α 的概率是多少?

解　我们来求解下列与原问题等价的问题:以$(0,0)$,$(\beta,0)$,(β,β),$(0,\beta)$为顶点作一边长为 β 的闭正方形,如图 1 所示.在此正方形内随机选择点(x,y),求使 $|x-y|>\alpha$ 的概率.

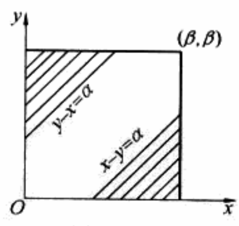


图 1

"随机"之意是指所选择的点落在正方形$[0,\beta]\times[0,\beta]$内任一区域的概率与此区域的面积成正比.将正方形用直线 $x-y=\pm\alpha$ 划分出两个有阴影的三角形区域(图 1),即可发现所求的概率等于

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{\beta^2}=\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

B－3 设平面上有四点，其中任何三点不共线，且此四点不共圆．求证：这四个点中必有一点位于过其余三点所作的圆的内部．

解 设四个已知点为 P_1,P_2,P_3,P_4．依次作出 $\triangle P_2P_3P_4$，$\triangle P_1P_3P_4$，$\triangle P_1P_2P_4$，$\triangle P_1P_2P_3$，若 P_1,P_2,P_3,P_4 中有一个出现在这四个三角形的某一个内部，则作该三角形的外接圆即包含第四个已知点在圆内．若不出现这种情形，则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 必为凸四边形．因已知四点不共圆，故 $\angle P_1+\angle P_3\neq\angle P_2+\angle P_4$．不妨设 $\angle P_1+\angle P_3>\angle P_2+\angle P_4$．于是 $\triangle P_1P_2P_4$ 及 $\triangle P_2P_3P_4$ 的外接圆分别含有 P_3 与 P_1 在其内部(同弧所对的圆周角小于圆内角)．

B－4 设有 n 个非负实数 x_k 满足不等式 $0\leqslant x_k\leqslant 1(k=1,2,\cdots,n)$，试确定下列 n 元函数的极大值

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|$$

解 我们先固定 $x_2,x_3,\cdots,x_n$，仅视 x_1 为变数，易证已知的函数(记为 $f(x_1)$)是下凸的．于是除 $f(x_1)=C$(常数)外，我们有

$$\max f(x_1)=\max\{f(0),f(1)\}$$

已知函数在 R_n 内的定义域是一个有界闭集，故必在某点(n 数组)达到极大值．由于我们将 x_1 取作 0 或 1 时，得到的两个 $n-1$ 元函数的极大值没有变小．依此类推，当全部 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别取为 0 或 1 时，所求函数必定会达到它的极大值．

若诸 x_k 中有 p 个取为 0，有 $n-p$ 个取为 1，则所求函数即化为

$$p(n-p)=\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}-p\right)^2$$

因此当 n 为偶数时，取 $p=n/2$，即得到所求函数的极大值为 $n^2/4$；当 n 为奇数时，取 $p=(n\pm 1)/2$，即得所求函数的极大值为 $(n^2-1)/4$．

B－5 设 k 为正整数，n 为大于 2 的整数．定义

$$f_1(n)=n,f_2(n)=n^{f_1(n)},\cdots,f_{j+1}(n)=n^{f_j(n)}$$

等．求证：下列双边不等式成立，即

$$f_k(n)<n!!\cdots!<f_{k+1}(n)$$

中间的项表示 n 的 k 级阶乘记号．

解 定义 $g_1(n)=n!$，$g_{k+1}(n)=[g_k(n)]!$，则求证的双边不等式即可写成

$$f_k(n)<g_k(n)<f_{k+1}(n), n>2$$

先证左边的不等式：当 $t\geqslant 2n^2$ 时，我们有

$$t!>(n^2)^{t-n^2}=n^t\cdot n^{t-2n^2}\geqslant n^t \quad ①$$

令 $n=3$ 或 4 而 $k\geqslant 2$，则

$$g_k(n)\geqslant g_2(3)=6!=720>32\geqslant 2n^2$$

若 $n\geqslant 5, k\geqslant 1$，则

$$g_k(n)\geqslant n!\geqslant n(n-1)(n-2)>2n^2$$

易见当 $n\geqslant 3$ 时，有 $f_1(n)<g_1(n)$，及 $f_2(3)<f_2(4)=256<720=g_2(3)<g_2(4)$．假定 $n\geqslant 3$ 时，$f_k(n)<g_k(n)$（若 $n=3$ 或 4，则 $k\geqslant 2$），那么由 $g_k(n)>2n^2$ 及 ① 可得

$$f_{k+1}(n)=n^{f_k(n)}<n^{g_k(n)}<[g_k(n)]!=g_{k+1}(n)$$

因此，由归纳法原理证得本题左边的不等式成立．

再证右边的不等式：补充定义 $g_0(n)=n$，并注意 $g_{k+1}(n)=g_k(n!)$，我们来证明下列的辅助不等式

$$g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_k(n)<n^{g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_{k-1}(n)} \quad ②$$

对于 $k\geqslant 1$ 及 $n>2$ 成立．

先看 $k=1$ 及 $n>2$ 时的情形，我们有

$$n\cdot n!=n\cdot n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1<n\cdot n\cdots n\cdot n=n^n$$

从而得知 $$g_0(n)g_1(n)g_2(n)<n^{g_0(n)}$$

再假定对于定值 $k>1$ 及 $n>2$ 时，② 能成立．那么

$$\begin{aligned}&g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_{k+1}(n)=\\&g_0(n)g_0(n!)g_1(n!)\cdots g_k(n!)<\\&n(n!)^{g_0(n!)\cdots g_{k-1}(n!)}\leqslant n^{g_1(n)\cdots g_k(n)}\cdot(n!)^{g_1(n)\cdots g_k(n)}=\\&(n\cdot n!)^{g_1(n)\cdots g_k(n)}<(n^{g_0(n)})^{g_1(n)\cdots g_k(n)}=\\&n^{g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)}\end{aligned}$$

因此，由归纳法原理知，不等式 ② 对任意的 $k\geqslant 1$ 及 $n>2$ 都成立，最后来证明

$$g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)<f_{k+1}(n) \quad ③$$

对于 $k\geqslant 1$ 及 $n\geqslant 2$ 成立（$k=0$ 时，显然成立等式）．

当 $k=1$ 时，③ 即化为 $n\cdot n!<n^n$，显然成立，假定 ③ 对于某个固定 $k>1$ 及 $n\geqslant 2$ 成立，则由 ② 可得

$$g_0(n)g_1(n)\cdots g_{k+1}(n)<n^{g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)}<n^{f_{k+1}(n)}=f_{k+2}(n)$$

由归纳原理知，③ 对任意的 $k\geqslant 1$ 及 $n>2$ 都成立．亦即

$$g_k(n)<f_{k+1}(n)$$

B－6 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''=-(1+\sqrt{x})y$ 及初值条件 $y(0)=1, y'(0)=0$. 求证：$y(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恰有一个零点.

解 考察下列三个具初值条件的方程所确定的函数

$$u''+3u=0, u(0)=1, u'(0)=0$$

$$y''+(1+\sqrt{x})y=0, y(0)=1, y'(0)=0$$

$$v''+v=0, v(0)=1, v'(0)=0$$

易知

$$u(x)=\cos\sqrt{3}x, v(x)=\cos x$$

对于 $0<x<\pi/2$，我们有

$$3>1+\sqrt{x}>1$$

根据斯图谟比较定理，在区间 $0<x<\pi/2$ 内，u 的第一个零点（即 $\pi/2\sqrt{3}$）应位于 y 的第一个零点（设为 ξ）的前面，而 ξ 应位于 v 的第一个零点（$\pi/2$）的前面，因此应有 $\pi/2\sqrt{3}<\xi<\pi/2$.

假定 y 在 $(\xi,\pi/2)$ 有第二个零点 η，则由施图谟定理断定，u 的零点应当位于 (ξ,η) 内. 但 u 在 $(0,\pi/2)$ 内仅有一个零点 $\pi/2\sqrt{3}<\xi$，因此 y 不可能有第二个零点出现在 $(0,\pi/2)$ 内.

B－7 设非负实数序列 $\{a_n\}$ 中任何两项都满足不等式 $a_{n+m}\leqslant a_na_m$. 求证：序列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时有有限的极限.

解 若 $\{a_n\}$ 中有某个 $a_p=0$，则由 $a_{p+m}\leqslant 0\cdot a_m=0$. 因而对于任何一个 $n\geqslant p$，恒有

$$a_n=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=0, n\to\infty$$

现假定 $\{a_n\}$ 无一项等于零，令 $b_n=\ln a_n$，则由 $a_{m+n}\leqslant b_m+a_n$，可得 $b_{m+n}\leqslant b_m+b_n$，进而可得

$$b_{km+t}\leqslant kb_m+b_t$$

对任何非负整数 k,m,t 都成立.

现在固定 m，对任意的 n，令 $n=k(n)m+t(n), 0<t(n)<m$. 并记 $c=\max(b_0,b_1,\cdots,b_{m-1})$，则

$$b_n=b_{k(n)m+t(n)}\leqslant k(n)b_m+b_{t(n)}\leqslant$$

$$k(n)b_m+c\Rightarrow\frac{b_n}{n}<\frac{k(n)}{n}b_m+\frac{c}{n}$$

易见 $n\to\infty$ 时，$\frac{k(n)}{n}\to\frac{1}{m}$，由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}b_n \leqslant \frac{1}{m}b_m \qquad ①$$

若有 $\alpha > \lim\limits_{n\to\infty}\inf b_n/n$,则可选择 m,使得 $b_m/m < \alpha$,于是由①有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}b_n \leqslant \alpha$$

由 α 的任意性可推得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}b_n \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}b_n$$

因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n$ 广义地存在,在①中取 $m=1$,便有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n < 1$,但也可能有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n \to -\infty$.无论如何,可以断定极限

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}b_n\right)$$

一定存在(有限).

第23届美国大学生数学竞赛

A－1 设平面上有五个已知点，其中每三点不在一条直线上．求证：这五个点中必有某四个点能构成一凸四边形的顶点．

解 设 A,B,C,D,E 是已知的五个点，先作出四边形 $ABCD$，若是凸的，问题获证．若是凹的，则必可作出一个三角形包含另一点在其内部．不妨认为点 D 位于 $\triangle ABC$ 内．再看点 E，若在 $\triangle ABC$ 之外，则三个四边形 $DAEB$，$DEBC$，$DCEA$ 中至少有一个是凸的．问题获证．若点 E 也在 $\triangle ABC$ 内部，则直线 DE 必与 $\triangle ABC$ 的二边相交，不妨认为与 AB，AC 相交(图1)，则四边形 $BDEC$ 就是凸的．

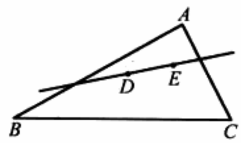


图1

A－2 设函数 f 定义在有限或无限区间 I 上，I 的左端点为0．若正数 $x\in I$，则 f 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求满足上述条件的一切函数 f．

解 因几何平均值只对正数有意义，故在 $[0,x]$ 上，f 处处为正．再者 f 在 $[0,x]$ 上应是可积的．

为方便起见，令 $f(0)=a>0$ 及

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \qquad ①$$

依题设条件可得

$$af(x)=\left(\frac{1}{x}F(x)\right)^2 \qquad ②$$

对一切正数 $x\in I$ 成立．

由①知，对 $x>0$，F 是连续可微函数，由②知，f 也是连续可微函数．于是②可化为

$$aF'(x)=\frac{1}{x^2}F(x)^2$$

分离变量解此微分方程得

$$F(x)=\frac{ax}{1-cx}$$

其中，c 是积分常数．因此，当 $x>0$ 时，我们有

$$f(x)=F'(x)=\frac{a}{(1-cx)^2}$$

应注意：$x=0$ 时，求得的公式也保持有效；当 $c>0$ 时，f 在区间 $[0,1/c]$ 上不可积，最后得适合问题条件的函数 f 应是

$$f(x)=\frac{a}{(1-cx)^2}\quad\begin{cases}若\ c>0,则\ 0\leqslant x<1/c\\ 若\ c\leqslant 0,则\ 0\leqslant x<+\infty\end{cases}\qquad ③$$

其中 $a>0$.

A－3　设 $\triangle ABC$ 有一内接 $\triangle A'B'C'$，A' 在 BC 边上，B' 在 AC 边上，C' 在 AB 边上，且有

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{BC'}{C'A}=\frac{CA'}{A'B}=k$$

其中，k 是一个正的常数．联结 AA'，BB'，CC' 构成 $\triangle PQR$，求证

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$

解　为方便起见，就用 $\triangle$ 表示三角形面积，并应用面积公式可得

$$\frac{\triangle AQC}{\triangle AQC'}=\frac{QC}{QC'}=\frac{\triangle BQC}{\triangle BQC'}\Rightarrow$$

$$\frac{\triangle BQC}{\triangle AQC}=\frac{\triangle BQC'}{\triangle AQC'}=\frac{BC'}{AC'}=k$$

同理可得

$$\frac{\triangle AQB}{\triangle AQC}=\frac{\triangle A'QB}{\triangle A'QC}=\frac{A'B}{A'C}=\frac{1}{k}\Rightarrow$$

$$\frac{\triangle AQB+\triangle BQC+\triangle AQC}{\triangle AQC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AQC}=$$

$$1+k+\frac{1}{k}=\frac{1+k+k^2}{k}$$

由对称性可得

$$\frac{\triangle AQC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle BRA}{\triangle ABC}=\frac{\triangle CPB}{\triangle ABC}=\frac{k}{1+k+k^2}$$

由于 $\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle AQC-\triangle BRA-\triangle CPB$，从而有

$$\frac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=1-3\cdot\frac{k}{1+k+k^2}=\frac{(1-k)^2}{1+k+k^2}$$

A－4 设 $f(x)$ 定义在长度不小于 2 的一个区间里，且 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$.求证：$|f'(x)|\leqslant 2$.

解 不失一般性，不妨认为 $f(x)$ 定义在区间 $[-1,1]$ 上，应用泰勒展开公式，对于 $x\in[-1,1]$，我们有

$$f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+\frac{1}{2}(1-x^2)f''(\xi)$$

$$f(-1)=f(x)+(-1-x)f'(x)+\frac{1}{2}(-1-x^2)f''(\eta)$$

其中 $\xi\in(x,1),\eta\in(-1,x)$，由此可得

$$f(1)-f(-1)=2f'(x)+\frac{1}{2}(1-x^2)f''(\xi)-\frac{1}{2}(1+x)^2f''(\eta)$$

注意 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$，我们有

$$2|f'(x)|\leqslant|f(1)|+|f(-1)|+\frac{1}{2}(1-x)^2|f''(\xi)|+\frac{1}{2}(1+x)^2|f''(\eta)|\leqslant 2+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}(1+x)^2=3+x^2\leqslant 4\Rightarrow |f'(x)|\leqslant 2$$

A－5 求下列组合级数的和

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$$

解 用微分法：对

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边求导后再乘以 x 得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^k$$

再对上式两边求导后乘以 x，并令 $x=1$ 即得结论

$$n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}+nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k\Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-3}$$

A－6　设 S 为满足下列条件的有理数集：

(1) 若 $a \in S, b \in S$,则 $a+b \in S, ab \in S$.

(2) 对任一有理数 r,三个关系 $r \in S, -r \in S, r=0$ 有且仅有一个成立.

求证：S 是由全体正有理数组成的集.

解　若 $r \neq 0$,则 $r \in S$ 或 $-r \in S \Rightarrow r^2 \in S$.取 $r=1$,显然有 $1 \in S$.从而由条件 $a+b \in S$ 推知全体正整数都属于 S.

设 p,q 为二整数,则 $1/q^2 \in S$.再由 $ab \in S$ 的条件推得

$$\frac{p}{q} = pq\left(\frac{1}{q^2}\right) \in S$$

因此,S 含有全体正有理数,由条件(2) 即知 0 与全体负有理数不属于 S,即 S 是由全体正有理数组成的集.

B－1　定义 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$,$n$ 为正整数,$x^{[0]}=1$,求证：

$$(x+y)^{[n]} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n-k]}$$

解　用数学归纳法,$n=0$ 时,求证的等式显然成立,假定 $n=p$ 时,求证的等式成立,则

$$\begin{aligned}(x+y)^{[p+1]} = (x+y)^{[p]}(x+y-p) &= \\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p-k]}(x-k+y-(p-k)) &= \\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k+1]}y^{[p-k]} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p-k+1]} &= \\ \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}x^{[k]}y^{[p+1-k]} &+ \\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p+1-k]} &= \\ \sum_{k=0}^{p+1}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)x^{[k]}y^{[p+1-k]} &= \\ \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^{[k]}y^{[p+1-k]}\end{aligned}$$

因此 n 为任意正整数时,求证的等式都成立.

B-2 设$\mathbf{R}$为全体实数集，S是正整数的所有子集构成的集，试在$\mathbf{R}$上定义一个函数f，使它以S为其值域.且当$a<b$时，$f(a)$是$f(b)$的真子集.

解 令$\varnothing$是对全体有理数的一种编序法则，即$\varnothing:\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$是一个满单映射，其中$\mathbf{N}$是正整数集，$\mathbf{Q}$是有理数集.

现对f作如下定义：

$$f(r)=\{n\mid\varphi(n)<r\}$$

其中r是任一实数，$n\in\mathbf{N}$.于是f是定义在$\mathbf{R}$上的一个函数其值域是$\mathbf{N}$的子集所成的集S.

若$a<b$，且$n\in f(a)$，则

$$\varnothing(n)<a<b\Rightarrow n\in f(b)\Rightarrow f(a)\subseteq f(b)$$

再注意对于$a<b$，必存在正整数p，使得$a<\varnothing(p)<b\Rightarrow p\in f(b)$.但$p\notin f(a)$，因此$f(a)$是$f(b)$的真子集.

B-3 设S是欧氏平面上含有原点的一个凸形区域.若从原点引出的每一条射线(即半直线)都至少有一点在S的外部，求证：S是有界的.(平面区域中任意二点间的线段完全在其内部，则称此区域是凸的)

解 考务委员们指出，题设的区域S是开集时，若不补充某种拓扑假定，结论就不能成立.例如，$x-y$平面上的带形开域$0<x<1$连同原点在内的无界凸集S，就没有一条过原点的射线完全在S内.

我们来证明：如果原点是S的内点，或者S是闭集，那么S就是一个有界的凸集.

以原点O为极点建立极坐标系(ρ,θ)，依题设条件知，对任意的θ，集$\{\rho\mid(\rho,\theta)\notin S\}$非空，且$\rho$以零为其下界.令

$$f(\theta)=\inf\{\rho\mid(\rho,\theta)\notin S\}$$

S与过点O一切射线的交是一个区间，且有

$$0\leqslant\rho<f(\theta)\Rightarrow(\rho,\theta)\in S \quad ①$$

$$\rho>f(\theta)\Rightarrow(\rho,\theta)\notin S \quad ②$$

因此，若M是f的一个上界，则S位于闭圆域$\rho=M$内.

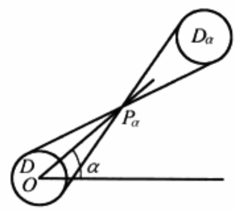


图1

假定O是S的内点，令D是O为圆心的一个圆域，且$D\subseteq S$.对任意的$\alpha\in[0,2\pi]$，令$P_\alpha=(1+f(\alpha),\alpha)$，以$P_\alpha$为对称中心，作圆域$D_\alpha$与$D$对称，如图1所示.若$Q\in D_\alpha$，则与$Q$关于$P_\alpha$对称的点$Q\in D\subseteq S$.由于$P_\alpha\notin S$，故$Q\notin S$，从而$D_\alpha\cap S=\varnothing$.设

O 点对 D_α 的视角为 2ε，则从点 O 引出与 D_α 相交的射线，其极角的变动区间为 $I_\alpha=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$. 点 O 至 D_α 的距离小于 $2(1+f(\alpha))$. 于是，当 $\theta\in I_n$ 时，有 $f(\theta)\leqslant 2(1+f(\alpha))$. 根据海涅－波雷尔定理，存在有限个完全覆盖区间 $[0,2\pi]$ 的区间 $I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},\cdots,I_{\alpha_n}$. 将此 n 个区间 $2(1+f(\alpha_1)),2(1+f(\alpha_2)),\cdots,2(1+f(\alpha_n))$ 中最大的一个取作 f 的上界. 这就证明了 S 若以 O 为其内点，则 S 必为有界的凸集.

再假定 S 是无界闭集，于是我们可从区间 $[0,2\pi]$ 选出无穷序列 $\{\theta_n\}$，使得 $f(\theta_n)\to\infty$. 根据波察诺－魏尔斯特拉斯定理，存在 $\{\theta_n\}$ 的一个收敛子序列. 为方便起见，不妨就认为 $\{\theta_n\}$ 是收敛的：$\theta_n\to\beta$. 令 $\rho_0=1+f(\beta)$，则存在某个 N，使得对于所有的 $n>N$，成立 $f(\theta_n)>\rho_0$. 由 ① 得知，$(\rho_0,\theta_n)\in S$. 由于 S 是闭集，且 $(\rho_0,\theta_n)\to(\rho_0,\beta)$，故 $(\rho_0,\beta)\in S$. 但由 ② 得知，$(\rho_0,\beta)\notin S$. 这一矛盾证明了 S 只可能是有界的闭集.

B－4　一欧氏平面被有限个圆分成了若干个区域. 对所分的每个区域分别涂以红色或蓝色，求证：能使任何两相邻区域涂的颜色不同.（凡有共用弧作为边界的两个区域称为相邻的区域）

解　对平面上每一个被圆分成的区域，分别数一数它位于多少个圆的内部？若它位于奇数个圆的内部，就涂成红色，若它位于偶数个圆的内部，就涂成蓝色. 这种涂色方法即能符合问题的要求.

若平面上只有两个圆划分形成的区域，则命题显然正确，假定平面被 n 个圆分成若干区域后，命题也正确（$n\geqslant 2$），则对此情形再任意增加一个圆，即得 $n+1$ 个圆（记为 C_{n+1}）划分原平面成更多区域的情形. 考察原来的某个区域 D 被 C_{n+1} 分成的两个子域 D_1、D_2，它们共有 C_{n+1} 的一段圆弧作为边界，因而其中有且仅有一个（不妨设为 D_1）位于 C_{n+1} 里面，由此得知 D_1 比 D_2 多位于一个圆里面. 这一分析对任何与 C_{n+1} 相交的区域都有效. 因此命题对于 $n+1$ 个圆的情形正确. 即命题普遍正确.

B－5　设 n 为大于 1 的整数，求证：

$$\frac{3n+1}{2n+2}<\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n<2$$

解　对于 $n>1,x>0$，函数 x^n 是凸的（即其图象下凸）. 因

而它在[0,1]上的积分小于用梯形法则算得的面积,即

$$\frac{1}{n+1}=\int_0^1 x^n\mathrm{d}x<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{0}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}\right)^n\right)\Rightarrow$$

$$\frac{3n+1}{2n+2}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}<\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right)$$

欲证题中和式小于2,只须将上面的积分式与 n 等分子区间上的黎曼小和比较(两边加1),即可得出结论.但我们可用下述方法证明更加精确的估计式:

易知 $1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$ 对任意的 x 都成立,故有

$$\left(1-\frac{i}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-1}$$

令 $i=0,1,2,\cdots,n$,即得

$$\left(\frac{n}{n}\right)^n+\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+\mathrm{e}^{-1}+\cdots+\mathrm{e}^{-(n-1)}\leqslant \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}<2$$

B-6 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)$$

其中 a_k,b_k 为常数,$x\in[0,2\pi]$,$|f(x)|\leqslant 1$,且对 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{2n}<2\pi$,有

$$|f(x_1)|=|f(x_2)|=\cdots=|f(x_{2n})|=1$$

求证:存在一个常数 a,使得 $f(x)=\cos(nx+a)$.

解 利用公式

$$\cos kx=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),\sin kx=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})$$

并令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,即可将题设的 n 次三角多项式化为下面的复系数多项式

$$f(x)=z^{-n}p(z)$$

其中 $p(z)$ 是一个 $2n$ 次复系数多项式.

$f(x)$ 的每个零点 b 对应于 $p(z)$ 在复平面的单位圆上的每个零点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.由复函数微分法(注意 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x=\mathrm{i}z$)可得

$$f'(x)=\mathrm{i}z^{-n}(zp'(z)-np(z))$$

若 b 是 $f(x)$ 的二重零点,则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ 就是 $p(z)$ 的二重零点.因此,$f(x)$

在$[0,2\pi]$上零点的个数不超过$2n$(即与$p(z)$的零点一样多).

本题中$f(x)$的系数a_k,b_k显然全为实数,否则,例如设$f(x)=\cos x+\mathrm{i}\sin x$就得不到应有的结论.再者,当$n>0$时,易知$|f(x)|\neq 1$.

我们来研究两个$2n$次非负的三角多项式

$$1-f(x)^2\text{ 与 }f'(x)^2$$

它们分别具有$2n$个不同的二重零点$x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$.由两多项式相等的判别法则知,存在某个常数$m>0$,能使

$$f'(x)^2=m^2(1-f(x)^2) \qquad ①$$

其中$m\neq 0$,否则由$m=0\Rightarrow f(x)\equiv c$(常数),导致$n=0$的平凡情况.

微分方程①的通解是

$$f(x)=\cos(mx+a) \qquad ②$$

其中,a为任意常数.由于①还有奇解$f(x)=\pm 1$,这就会产生许多分段函数作为①的解,例如

$$f(x)=\begin{cases}1,x\leqslant 0\\ \cos mx,0<x<\dfrac{\pi}{m}\\ -1,x\geqslant\dfrac{\pi}{m}\end{cases}$$

即为①的一个解.

我们只关心①的解是n次三角多项式的情形.这样的解是以2π为周期的解析函数,因而不能用分段函数表示,亦即一定具有通解②的形式,且m为正整数.再由题设条件知,$x\in[0,2\pi]$,$|\cos(mx_i+a)|=1,i=1,2,\cdots,2n$,因此$m=n$.这就证明了本题论断的正确性.

第 24 届美国大学生数学竞赛

A - 1 (1) 已知一个正六边形,六个正方形和六个正三角形的边长都相等,求证:用它们能拼成一个既不重叠又不留空隙的正十二边形.

(2) 设 $P_1,\cdots,P_{12}$ 依次为正十二边形的顶点,求证:三条对角线 $P_1P_9,P_2P_{11},P_4P_{12}$ 交于一点.

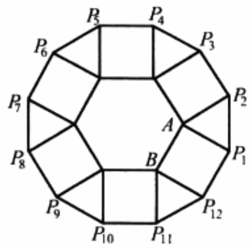


图 1

解 (1) 在边长为 s 的正六边形的每边上向外作六个正方形. 于是每两个共顶点的正方形的两邻边夹角为 $360° - 90° - 120° - 90° = 60°$. 在这六个正方形的相邻空隙里,恰好可安放六个边长为 s 的正三角形(图 1). 这样就拼成了符合本题要求的正十二边形. 其每边长为 s,每个顶角等于 $90° + 60° = 150°$.

(2) 因为正十二边形有一个外接圆,所以 $\angle P_1P_{12}P_4$ 是 $\overset{\frown}{P_1P_4}$ 所对中心角的一半,又因

$$\angle P_1P_{12}P_4 = 360° \times \frac{3}{12} \times \frac{1}{2} = 45°$$

所以 $P_{12}P_4$ 是正方形 P_1ABP_{12} 的一条对角线. 同理可知 P_1P_9 是该正方形的另一条对角线.

另一方面,P_2P_{11} 显然是六边形 $P_1P_2ABP_{11}P_{12}$ 的对称轴. 因此正十二边形的三条对角线 $P_1P_9,P_2P_{11},P_4P_{12}$ 交于正方形 P_1ABP_{12} 的中心.

A - 2 设 $\{f(n)\}$ 是取正整数值的严格递增序列. 已知 $f(2) = 2$,当 m,n 互质时

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

求证:$f(n) = n$.

解 因为 $0 < f(1) < f(2) = 2$,所以

$$f(1) = 1$$

由 f 的整值递增性可知,对于任意二正整数 n,p,有

$$f(n + p) \geqslant f(n) + p$$

令 $f(3) = a$,则可推得

$$f(5) \geqslant a+2$$
$$f(15)=f(3)f(5) \geqslant a^2+2a$$
$$f(18) \geqslant f(15)+3 \geqslant a^2+2a+3 \quad ①$$
$$f(6)=f(2)f(3)=2a$$
$$f(5) \leqslant f(6)-1=2a-1$$
$$f(10)=f(2)f(5) \leqslant 4a-2$$
$$f(9) \leqslant f(10)-1 \leqslant 4a-3 \quad ②$$
$$f(18)=f(2)f(9) \leqslant 8a-6$$

由 ①,②$\Rightarrow (a-3)^2 \leqslant 0$,所以 $f(3)=a=3$.

下面用数学归纳证明等式

$$f(2^k+1)=2^k+1 \quad ③$$

当 $k=1$ 时,③ 化为 $f(3)=3$,命题正确.

假定 $k=t$ 时,$f(2^t+1)=2^t+1$,则

$$f(2^{t+1}+2)=f(2)f(2^t+1)=2(2^t+1)=2^{t+1}+2$$

因为

$$1=f(1)<f(2)<\cdots<f(2^{t+1}+1)<f(2^{t+1}+2)=2^{t+1}+2 \quad ④$$

所以
$$f(2^{t+1}+1)=2^{t+1}+1$$

由归纳法原理知,对任意自然数 k,等式 ③ 都正确.

最后由 ③ 与 ④ 即可推得

$$f(n)=n, n=1,2,3,\cdots$$

A-3　设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数,算子 δ 定义如下:

$$\delta \equiv x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

求下列微分方程解的积分形式:

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y=f(x)$$

其中 y 满足初值条件

$$y(1)=y'(1)=\cdots=y^{(n-1)}(1)=0$$

解　先用数学归纳证明下列等式

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y=x^n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \quad ①$$

$n=1$ 时,$\delta y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,命题正确.假定等式 ① 对于某固定的 n 成立,则

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)(\delta-n)y=$$
$$(\delta-n)\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y=$$

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-n\right)x^n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=x^{n+1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

由归纳法原理知等式 ① 对任意正整数 n 都成立.

利用 ① 可将题设的微分方程化为

$$x^n y^{(n)}=f(x),x\geqslant 1 \qquad ②$$

② 的解可用积分算子$\int_1^x$对 $f(x)x^{-n}$ 积分 n 次而得到. 但我们也可用下述简单解法,从而避免求累次积分.

若 $y^{(n)}$ 当 $x\geqslant a$ 时连续,则 $y(x)$ 可展开成 n 阶带积分余项的泰勒公式

$$y(x)=y(a)+(x-a)y'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

令 $a=1$ 由 ② 即可求得符合本题条件的解为

$$y(x)=\int_1^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{f(t)}{t^n}\mathrm{d}t$$

A-4 已知$\{a_n\}$是一个正实数序列,求证

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1$$

并说明此不等式右边的 1 不能换成比 1 大的任何数.(记号 lim sup 亦可写为$\overline{\lim}$)

解 用反证法. 假定对于某个正整数 k,当所有的 $n\geqslant k$ 时,恒有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1 \qquad ①$$

① 可化为
$$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1},\forall n\geqslant k\Rightarrow$$
$$\frac{a_k}{k}\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geqslant\cdots\geqslant$$
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+p}+\frac{a_{k+p}}{k+p}$$

其中 p 可为任意自然数. 由调和级数的发散性即知不等式 ① 不能成立. 因此对任一正整数 k,必存在某个 $n\geqslant k$,使得

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)>1\Rightarrow\overline{\lim}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1$$

我们若取 $a_n=n\ln n$,则对 $n\geqslant 2$ 有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\frac{1}{\ln n}(1+(n+1)\ln(n+1)-n\ln n)=$$

$$\frac{1}{\ln n}\left(1+n\ln\frac{n+1}{n}+\ln(n+1)\right)<$$

$$\frac{1}{\ln n}(2+\ln(n+1))\to 1\quad ,n\to\infty$$

因此,对于$\{a_n=n\ln n\}$的任一子序列应有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1$$

这表明本题不等式右边的 1 不能换成比 1 大的任何数.

另一方面,我们若取 $a_n=n^{1+\varepsilon}$,$\varepsilon>0$,则用二项式级数展开式即可推得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=1+\varepsilon$$

A-5 (1) 设函数 f 在闭区间$[0,\pi]$上连续,且有

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

求证:在$(0,\pi)$内存在两点 α,β,使得

$$f(\alpha)=f(\beta)=0$$

(2) 设 R 是欧氏平面上任一有界的,凸的,开区域(即 R 是被某一圆域包含的连通开集,R 内任意二点间的线段完全位于其内部).试应用(1)的结论证明:R 的形心(重心)至少平分 R 内三条不同的弦.

解 (1) 不妨认为 $f\neq 0$.由条件

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0\text{ 及 }\sin\theta>0(0<\theta<\pi)$$

可知 f 在$(0,\pi)$内必定变号.又由 f 的连续性可知,至少存在一点 $\alpha\in(0,\pi)$,使得 $f(\alpha)=0$.

假定 α 是 f 在$(0,\pi)$内的唯一零点,则 f 在$(0,\alpha)$与(α,π)内异号,于是

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\sin(\theta-\alpha)\mathrm{d}\theta\neq 0 \qquad ①$$

另一方面,我们又有

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\sin(\theta-\alpha)\mathrm{d}\theta=\cos\alpha\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta-\sin\alpha\int_0^{\pi}f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$$

这与①矛盾.因此 f 在$(0,\pi)$内至少还有第二个零点 β,即

$$f(\alpha)=f(\beta)=0,\alpha,\beta\in(0,\pi),\alpha\neq\beta$$

(2) 取以 R 的形心 P 为极点的极坐标系.记 R 的边界曲线 Γ 为$\rho=g(\theta)$.由 R 的有界性及凸性可知,过极点 ρ 的任一射线与 Γ

有且仅有一个交点,故 g 是 θ 的单值函数.

Γ 是一条紧的曲线,因而存在一个由 Γ 到(极坐标下)单位圆的满单连续映射 $(\rho,\theta)\to(1,\theta)$.其逆映射 $(1,\theta)\to(g(\theta),\theta)$ 也连续,故 g 是 θ 的连续函数.

区域 R 关于直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的矩分别是

$$\iint_R(\rho\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \text{ 及 } \iint_R(\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

由于 R 以其形心 P 作为极点,因此上面两个二重积分都等于零,由此可得

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(g(\theta))^3\cos\theta\mathrm{d}\theta=0=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(g(\theta))^3\cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad ②$$

注意 $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta,\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$,由 ② 可得

$$\int_0^{\pi}((g(\theta))^3-(g(\theta+\pi))^3)\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$$

$$\int_0^{\pi}((g(\theta))^3-(g(\theta+\pi))^3)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

应用(1)证得的结论即知

$$f(\theta)=(g(\theta))^3-(g(\theta+\pi))^3$$

在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点,亦即方程

$$g(\theta)=g(\theta+\pi)$$

在 $(0,\pi)$ 内至少有两个根.这表明 R 内至少有两条不与极轴重合的弦被形心 P 所平分.我们若取其中一条弦所在的直线作为新的极轴,则由已经证明的事实可知,R 内至少存在三条被其形心所平分的弦.

A-6 如图1,设 M 是椭圆的一条弦 UV 的中点,过 M 再任作两弦 AB 和 CD,设 AC,BD 与 UV 分别交于 P,Q 两点.求证:M 也是线段 PQ 的中点.

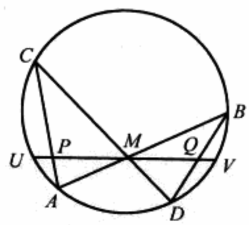


图 1

解 取 M 为原点,UV 为 x 轴,y 轴不与 AB 及 CD 重合,建立一斜坐标系.令 AB,CD 的方程分别为 $y=mx,y=nx$,则椭圆方程可写成

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

由于 $V(t,0)$ 及 $U(-t,0)$ 在此椭圆上,因此 $d=0$.

我们知道,过 A,B,C,D 四点的圆锥曲线系方程是

$$K_1(ax^2+by^2+cxy+ey+f)+K_2(y-mx)(y-nx)=0 \quad ①$$

其中 K_1,K_2 为不同取为零的任意常数.令 $y=0$,由 ① 可得

$$K_1(ax^2+f)+K_2mnx^2=0$$

它表明 x 轴上关于原点对称的两点必在 ① 所表示的曲线上.特别

地,适当选择常数 K_1 及 K_2,使 ① 退化成两相交直线 AC,BD,则 P,Q 两点关于点 M 对称,因此 $PM = MQ$.

B-1 设 $x^2 - x + a$ 能整除 $x^{13} + x + 90$,试确定整数 a 的值.

解 令

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a)q(x)$$

其中,a 为整数,$q(x)$ 是整系数多项式.

若 $a \leqslant 0$,则 $x^2 - x + a$ 有非负零点.但 $x^{13} + x + 90$ 没有正的零点,故 $a > 0$.对所设的恒等式分别令 $x = -1,0,1$,依次可得

$$(a + 2)q(-1) = 88, aq(0) = 90, aq(1) = 92$$

二、三两个等式表明 $a \mid 2$,故 $a = 2$ 或 1.但当 $a = 1$ 时,由第一个等式推得 $3 \mid 88$,这不可能.故只能有 $a = 2$.据此即可求得

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + 2)(x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 23x + 45)$$

B-2 设 m,n 的任意整数,S 是由 $2^m 3^n$ 类型的数构成的集,P 是全体正实数构成的集.问 S 在 P 内是否稠密?

解 因为指数函数的反函数也是单值连续的,故本题与下述问题等价:

设 m,n 为任意整数,问属于 $m\ln 2 + n\ln 3$ 类型的数在全体实数 $\mathbf{R}$ 中是否稠密?为了作出肯定的回答,我们需要用到下列两个引理.

引理 1 设 T 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的加法群的一个子群,则有可能是 $T = \{0\}$,或者 T 由某个正数的所有倍数组成,或者 T 在 $\mathbf{R}$ 内稠密.

引理的证明 若 T 不含任何正数,则 $T = \{0\}$.假定 T 含有一个最小的正数 x,则 T 显然含有 x 的一切倍数.$\forall y \in T$,必存在一个整数 n,使得

$$n \leqslant \frac{y}{x} < n + 1$$

令 $z = y - nx$,则有 $0 \leqslant z < x$.由于 x 是 T 内的最小正数,因此 $z = 0$,从而 $y = nx$,即 T 由 x 的一切倍数组成.

再假定 T 含有正数 x,但 T 内不存在最小的正数,则在 $(0,x)$ 内有无穷多的数属于 T.$\forall \delta > 0$,$\exists t_1, t_2 \in T$,且满足

$$0 < t_1 < t_2 < x$$

$$0 < s = t_2 - t_1 < \delta$$

于是 s 的一切倍数都在 T 内.令 $I = (a, a + \delta)$ 是 $\mathbf{R}$ 的任意一个开区间,则 s 的某个倍数必定会出现在 I 内.从而得知 $T \cap I \neq \varnothing$.由 I 的任意性即知,T 在 $\mathbf{R}$ 内是稠密的.

引理 2 设 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,$m, n$ 为任意整数,则形如 $m\alpha + n\beta$ 的数在 $\mathbf{R}$ 内稠密的充要条件是,对于任何不同时为零的两个整数 p, q,成立

$$p\alpha + q\beta \neq 0 \quad ①$$

证明 形如 $m\alpha + n\beta$ 的数集 T 显然构成 $\mathbf{R}$ 的一个群,且 $\alpha \in T$,$\beta \in T$.

若 $\alpha = \beta = 0$,则 $T = \{0\}$ 在 $\mathbf{R}$ 内不稠密,这时条件 ① 亦不能成立.

若 α, β 不全为零,则 $T \neq \{0\}$.假如 T 在 $\mathbf{R}$ 内仍不稠密,则由引理 1 可知,T 内必含有某个最小正数 x,且 T 由 x 的一切倍数组成.令 $\alpha = qx$,$\beta = -px$(p, q 为不同时等于零的整数),则有

$$p\alpha + q\beta = 0$$

即条件 ① 仍不能成立.因此,当 $m\alpha + n\beta$ 在 $\mathbf{R}$ 内稠密时,条件 ① 必定成立.必要性证明毕.

反之,设整数 p, q 不同时为零,且有

$$p\alpha + q\beta = 0 \quad ②$$

若 $\alpha = \beta = 0$,则 $T = \{0\}$ 在 $\mathbf{R}$ 内不稠密.

若 $\beta = 0, \alpha \neq 0$,则 $T = \{m\alpha\}$ 在 $\mathbf{R}$ 内不稠密.

若 $\alpha\beta \neq 0$,则 $pq \neq 0$.② 可化为 $\beta = -\frac{p\alpha}{q}$,于是

$$T = \{m\alpha + n\beta\} = \left\{\left(m - \frac{p}{q}\right)\alpha\right\}$$

在 $\mathbf{R}$ 内仍不稠密.因此,若条件 ① 成立,则 $m\alpha + n\beta$ 在 $\mathbf{R}$ 内必定稠密,充分性证毕.

回到本题:令 $\alpha = \ln 2$,$\beta = \ln 3$,则条件 ① 与下列条件等价

$$2^p 3^q \neq 1 \quad ③$$

其中,p, q 为不同时等于零的整数.

不等式 ③ 显然成立.因此本题中的集 S 在集 P 内是稠密的.

> B - 3 设 f 是在全体实数上二次可微函数.试求下列函数方程的解
>
> $$f^2(x) - f^2(y) = f(x + y)f(x - y)$$

解 对给定的方程令 $x = y = 0$,则得 $f(0) = 0$.又对其两边关于 x, y 先后求两次偏导数得

$$2f(x)f'(x)=f'(x+y)f(x-y)+f(x+y)f'(x-y)$$
$$0=f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)$$

作变量代换 $x+y=u, x-y=v$，则有

$$f''(u)f(v)=f(u)f''(v) \quad ①$$

若存在一点 v_0，使得 $f(v_0)\neq 0$，则可令

$$c=\frac{f''(v_0)}{f(v_0)}$$

① 即化为 $f''(u)=cf(u)$.

根据初值条件 $f(0)=0$ 即可求得 ② 的解为

$$f(u)=\begin{cases}A\sin hku, k^2=c>0\\ Au, c=0\\ A\sin ku, -k^2=c<0, A\text{ 为任意常数}\end{cases}$$

不验验证 $f(u)$ 在三种情形下的表达式都适合本题给定的函数方程.

B-4 设 C 是一条有连续转动切线的平面闭曲线，它围成一个凸区域，T 是 C 的具有极大周长的内接三角形．求证：过 T 的三个顶点所作 C 的法线是 T 的对应内角的平分线.

如果 T 已经具有上述求证的性质，那么 T 具有极大周长是不是必要条件？若 C 是一个圆，则情况如何？

解 我们可以证明一个更为普遍的定理，而将本题的论断作为其推论.

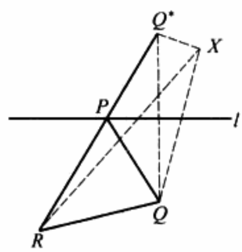


图 1

定义 设 C 是平面上任一点集，直线 l 与 C 至少有一个公共点．若被 l 分成的两个开的半平面中，有一个不含有 C 的点，则称 l 是 C 的一条支撑线.

定理 设 T 是顶点全部位于给定点集 C 内具有极大周长的三角形，则在 T 的各个顶点，都有一条 C 的支撑线垂直于 T 在该顶点的内角平分线.

定理的证明 如图 1 所示，令 $T=\triangle PQR$，l 是过点 P 且与 $\angle QPR$ 的平分线垂直的直线，Q^* 是关于 l 与 Q 对称的点．易知 R，P，Q^* 三点共线.

若 X 是与 Q^* 位于 l 同旁的任意一点，则

$$RQ+RX+XQ>RQ+RX+XQ^*\geqslant$$
$$RQ+RQ^*=RQ+RP+PQ$$

因为 $\triangle RXQ$ 的周长大于 $\triangle PQR$ 的周长，所以 $X\notin C$．由定义即知 l 是 C 的一条支撑线．定理证毕.

回到本题，因为 C 是光滑的凸闭曲线，所以过 C 上任一点的

支撑线就是过该点与 C 相切的直线.因此根据所证定理即可推得本题结论的正确性.

若将一等边三角形的三个顶点稍加“磨圆”成可微弧,即得一近似于等边三角形边界的凸闭可微曲线 C.于是原等边三角形的三条中位线构成的三角形就具有本题求证的性质.但它在 C 内显然不是周长最大者.

若 C 是圆.设其有一内接三角形具备已经证明的性质,则此三角形的三内角平分线必交于圆心 O.如图 2 所示,我们有 $\overset{\frown}{QS}=\overset{\frown}{RS}$, $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{PR}\Rightarrow\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QR}=\overset{\frown}{RP}$,因此 $\triangle PQR$ 是等边三角形.

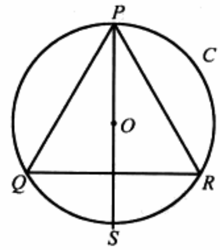


图 2

众所周知,内接于圆的所有三角形中,以等边三角形的周长为最大.因此,对于圆 C 来说,“具有极大周长”是使本题结论成立的充要条件.

B - 5 设 $\{a_n\}$ 是满足下列两个条件的实数序列:

(1) $0\leqslant a_k\leqslant 100\,a_n$,其中 $n=1,2,3,\cdots$,且 $n\leqslant k\leqslant 2n$.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

解 令 $s_k=\sum\limits_{n\geqslant\frac{k}{2}}a_n$,则当 $k\to\infty$ 时, $s_k\to 0$.

题设条件(1) 可略微变形写成

$$0\leqslant a_k\leqslant 100\,a_n$$

其中, $\frac{1}{2}k\leqslant n\leqslant k$,让 n 从不小于 $k/2$ 的整数依次取值,一直到 k 为止,将所得的这些不等式同边相加得

$$\frac{1}{2}ka_k\leqslant\frac{1}{2}[k+1]a_k\leqslant 100s_k\Rightarrow$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}ka_k\leqslant 200\lim_{k\to\infty}s_k=0$$

由于 $a_k\geqslant 0$,故得 $\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0$.

B - 6 设 E 是不超过三维的欧氏空间, A 是 E 的非空子集.将 A 内任意两点连成线段,由这些闭线段上的全体点构成的集记为 $S(A)$.对一给定的非空集 A_0,定义

$$A_n=S(A_{n-1}),n=1,2,3,\cdots$$

求证: $A_2=A_3=\cdots$

(只含一个点的集 A,可认为是闭线段的特殊情形).

解 将 E 看做是一个向量空间,设

$$a_i \in E, \lambda_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$

若

$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

则称向量 P 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个凸组合.

凸组合具有传递性:若向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_j$ 的每一个都是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的凸组合,向量 C 是 $b_1, b_2, \cdots, b_j$ 的凸组合,则 C 也是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的凸组合.

设 A 是 E 的一个非空子集.A 内元素的一切凸组合构成的集 K 是凸的,它是含有 A 的最小凸集,称为 A 的凸包.

本题的实质可用下列定理剖析:

定理 设 E 是 n 维空间,A 是 E 的一个非空子集,则 A 的凸包 K 内每一点都能写成 A 内至多 $n+1$ 个点的凸组合.

定理的证明 设有 $P \in K$,假定 P 不能用 A 内少于 $n+2$ 个点写成凸组合,则有

$$P = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i \tag{①}$$

其中 $a_i \in A, \lambda_i \geqslant 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_q = 1, q \geqslant n+2$.

由于 E 是 n 维向量空间,故可找到 q 个不全为零的数 $\mu_1, \cdots, \mu_q$,使得

$$\begin{cases} \mu_1 + \cdots + \mu_q = 0 \\ \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_q a_q = 0 \end{cases} \tag{②}$$

因为 a_i 都是 n 维向量,所以 ② 是具有 q 个未知数 μ_i,具有 $n+1$ 个方程的齐次线性方程组.

由 ①,② 可得

$$P = \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \sigma\mu_i) a_i \tag{③}$$

其中 σ 可取任意实数,但总能保持 a_i 的系数和等于 1.我们适当地选择 σ,使得 ③ 的右边关于 a_i 有一项的系数 $\lambda_i + \sigma\mu_i = 0$,而使其余的系数都保持非负.这只须在 $\mu_1, \cdots, \mu_q$ 中取出全部 $\mu_i > 0$ 的数,再令 σ 等于 $-\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ 中最大的一个即可(由 ② 的第一个等式可知,至少存在一个 $\mu_i > 0$).

综上所述,p 的表达式 ③ 变成了在 A 中有少于 q 个的点构成的凸组合.这样终将会导致与证明开头作的假定矛盾.因此定理获证.

回到本题,令 K 为 A_0 的凸包,若 X 是 K 的任一子集,则 $X \subseteq S(X) \subseteq K$(第一个包含关系需要用关于退化线段的约定,即 x 可表示从 x 到 x 的"线段").从而可得

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \cdots \subseteq K \quad ④$$

设有 $p \in K$,则由上述定理,可将 p 写成

$$p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$$

其中 $a_i \in A_0, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0$(若 p 恰好可用 A_0 内少于四个的点表示成凸组合,就认为上式右边关于 a_i 有同类项相加).令

$$q = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2$$

$$r = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4} a_3 + \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4} a_4$$

则有

$$q \in S(A_0) = A_1, r \in A_1$$

$$p = (\lambda_1 + \lambda_2) q + (\lambda_3 + \lambda_4) r \in S(A_1) = A_2$$

这就证明了 $K \subseteq A_2$,再由 ④ 即知

$$A_2 = A_3 = \cdots = K$$

第 25 届美国大学生数学竞赛

A－1　在平面上任意给定六点，求证：这六点中，两点间最远距离与两点间最近距离的比不小于$\sqrt{3}$.

解　若已知的六点有三点共线，例如点 B 位于线段 AC 上，那么不等式 $|AC| \geqslant 2|BC|$ 与 $|AC| \geqslant 2|AB|$ 总有一个成立，因而本题论断正确．下面再对无任何三点共线的情形进行研究．

若已知的六点只能构成凹六边形，则其中必有一点（设为 A）位于其他五点构成的某个三角形（设为 $\triangle BCD$）内．考察 $\triangle BAC$，$\triangle CAD$，$\triangle DAB$，即知其中必有一个内角不小于 $120°$，不妨认为 $\angle BAC \geqslant 120°$，$b \geqslant c$，对 $\triangle ABC$ 应用余弦定理，注意 $-\cos A \geqslant \frac{1}{2}$ 即得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geqslant b^2 + c^2 + bc \geqslant 3c^2$$

因此 $a \geqslant \sqrt{3}c$.

若已知的六点能构成凸六边形，则此六边形必有一内角为不小于 $120°$ 的钝角．据上所证，我们所需要的三角形显然存在．

A－2　求定义在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的所有连续正函数 $f(x)$，使之满足下列三个等式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1, \int_0^1 f(x)x\mathrm{d}x = \alpha, \int_0^1 f(x)x^2\mathrm{d}x = \alpha^2$$

其中 α 是已知实数．

解　将第一个等式两边乘以 α^2，第二个等式两边乘以 -2α 连同第三个等式同边相加得

$$\int_0^1 f(x)(\alpha - x)^2\mathrm{d}x = 0$$

此等式右边对任何一个正的连续函数 $f(x)$，积分的值都是正的，因此本题无解．

A－3 设 $P_1,P_2,\cdots$ 是开区间 $(0,1)$ 内的一个稠密点列，点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ 将 $(0,1)$ 分成了 n 个子区间，而 P_n 又将其中一个子区间分成了两个新子区间. 令 a_n 和 b_n 是这两个新子区间的长，求证：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n(a_n+b_n)=\frac{1}{3}$$

（一个区间的任一子区间内都至少含有一个点列中的一点，则称此点列在该区间内是稠密的）.

解 令 S_n 是点 $P_1,P_2,\cdots P_{n-1},P_n$ 分 $(0,1)$ 所成 $n+1$ 个子区间长度立方的和，则 $S_n,S_{n-1},(a_n+b_n)^3$ 及 $a_n^3+b_n^3$ 之间的关系不难确立为

$$S_{n-1}-S_n=(a_n+b_n)^3-(a_n^3+b_n^3)=3a_nb_n(a_n+b_n)\Rightarrow$$

$$1-S_k=S_0-S_k=\sum_{n=1}^{\infty}3a_nb_n(a_n+b_n)$$

由此可见 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=0\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_nb_n(a_n+b_n)=1$

现在来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}S_k=0$. 设 t 为正整数，由于 $\{P_t\}$ 在 $(0,1)$ 内稠密，故可选择充分大的整数 q，使得 $\{P_1,P_2,\cdots,P_q\}$ 中的点能在下列 t 个区间中的每一个内都出现

$$\left(0,\frac{1}{t}\right],\left(\frac{1}{t},\frac{2}{t}\right],\cdots,\left(\frac{t-1}{t},1\right)$$

取 $k\geqslant q$，令 $l_0,l_1,\cdots,l_k$ 是由点 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 分区间 $(0,1)$ 所得诸子区间的长，则它们的长都不会超过 $2/t$，于是

$$S_k=\sum_{i=0}^{k}l_i^3\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^2\sum_{i=0}^{k}l_i=\frac{4}{t^2}$$

由 t 的任意性即可得知

$$\lim_{k\to\infty}S_k=0$$

A－4 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 是一个整数有界序列，且满足下列递推关系

$$p_n=\frac{p_{n-1}+p_{n-2}+p_{n-3}p_{n-4}}{p_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}+p_{n-4}}$$

求证：此序列终将会出现循环情形.

解 我们来着手证明比本题更一般化的命题：设 f 为一任意 k 元函数，而 $\{P_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 是递推公式

$$P_{n+k}=f(P_{n+1},P_{n+2},\cdots,P_{n+k-1})$$

决定的一个整数有界序列. 那么$\{P_n\}$终将会出现循环情形. 令 k 数组$(P_n, P_{n+1}, \cdots, P_{n+k-1}) = q_n$, 正整数 $M = \sup\{|P_n|\}$, 则 $\forall n$ 有

$$P_n \in \{-M, -M+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, M-1, M\}$$

根据重复排列公式可知 q_n 至多能有 $A = (2M+1)^k$ 种不同的表达式. 因此, 在 $A+1$ 个 k 数组 $q_1, q_2, \cdots, q_{A+1}$ 中, 必有某两个完全相同. 若 $q_i = q_j (i < j)$, 则 $P_{i+t} = P_{j+t}$, 其中 $t = 0, 1, 2, \cdots, k-1$. 再由$\{P_n\}$的递推公式推得 $t = k$ 时, 亦有 $P_{i+k} = P_{j+k}$. 于是由归纳法原理即知, 对任意非负整数 t, 都有 $P_{i+t} = P_{j+t}$. 这就证明了序列$\{P_n\}$从第 i 项开始, 每$(j-i)$个一组, 将会循环出现.

A－5 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 为一任意正数序列, 求证: 必定存在一个常数 k, 能使下列不等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

解 先令 $m = 2t$ 是一个固定的偶数, 我们来证明下面的不等式

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n}$$

再取 $k = 4$, 令 $m \to \infty$, 即可推得本题求证的结论.

将数项 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ 按递增顺序重新排列成 $b_1, b_2, \cdots, b_m$, 对于 $1 \leqslant p \leqslant t$, 我们有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1} \geqslant$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2p-1} \geqslant p b_p$$

由此易得 $$\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} \leqslant \frac{2p-1}{p b_p} < \frac{2}{b_p}$$

及 $$\frac{2p}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p}} \leqslant \frac{2}{b_p}$$

于是 $$\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p}} < \frac{4}{b_p} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=1}^{t} \left(\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p}} \right) < \sum_{p=0}^{t} \frac{4}{b_p}$$

注意 $m = 2t$, 即可推得需要证明的不等式

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \sum_{p=1}^{t} \frac{4}{b_p} < \sum_{p=1}^{m} \frac{4}{b_p} = 4 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n}$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 则求证的不等式显然成立. 另一方面, 我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

从而得到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

A-6 设 S 是一条直线上的有限点集,且 S 中的点两两之间的距离(最大距离除外)的值都至少出现两次,我们称 S 是有重复距离的集.求证:集 S 中任意两个距离数值的比是有理数.

解 不失一般性,设集 S 的 n 个已知点在数轴上的分布为

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}=1 \quad ①$$

下面用反证法证明本题.若本题结论不真,则 S 内至少含有一个无理点.令 $\{1,\alpha_1,\cdots\alpha_k\}$ 是向量组 $\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ 在有理数域上生成的线性空间的一个基底,其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k(k\geqslant 1)$ 是无理数.于是 S 内任意两点间的距离可用下列线性关系式唯一表出

$$r_0+r_1\alpha_1+\cdots+r_k\alpha_k \quad ②$$

其中 $r_0,r_1,\cdots,r_k$ 为恰当的有限组有理数.(以下凡是按①写出的线性表达式,与诸 r 对应的字母都表示确定的有理数)

在用①表出 S 内所有不相等的距离表达式中,将无理数 α_1 的全体系数中绝对值最大者记为 $m(m\neq 0$,否则 $\alpha_1\notin S$,这与反证法开头的假定矛盾).根据 S 内的点出现重复距离的性质及表达距离具有唯一性的关系式①,我们可在 S 内确定四点 $x_i<x_j<x_p<x_q$,使得下列四个等式必有一个成立

$$|x_j-x_i|=|x_q-x_p|=a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k \quad ③$$
$$|x_p-x_i|=|x_q-x_j|=a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k$$

由③推知下列四个等式必有一个成立

$$|x_q-x_i|=2(a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k)\pm|x_p-x_j| \quad ④$$

注意系数 m 的极大性,④中不论哪个等式成立,都有

$$|x_p-x_j|=b_0\mp m\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_k\alpha_k$$
$$|x_q-x_i|=c_0\pm m\alpha+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k$$

再在 S 内确定两点 x_s,x_t,使得

$$|x_q-x_i|=|x_t-x_s|$$

重复应用上述推理过程,由于每次考察 S 内两点间的距离越来越大,经过有限步骤以后,就会导致 S 内某两点间的距离大于1,这与①矛盾,因此 S 内不可能含有无理点 α_1.

同理可证 S 内不可能含有无理点 $\alpha_2,\cdots,\alpha_k$,即集 S 所含的点全部是有理点.从而本题结论正确.

B－1　设 $u_k(k=1,2,\cdots)$ 为一整数序列，v_n 表示 $\{u_k\}$ 前 n 项中小于或等于 n 的个数，求证：如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k}<\infty$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0$$

解　$\{u_k\}$ 中不能含有无穷个负项．例如，令 $u_k=(-1)^k/k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=\frac{1}{2}$，本题结论不能成立．若 $\{u_k\}$ 中含有有限个负项，则可将这些负项全部改 $+1$ 而不影响本题的证明．$\{u_k\}$ 既为正项序列，收敛级数 $\sum\frac{1}{u_k}$ 的项可以重排而不影响收敛的结果．令 $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3\leqslant\cdots$，则对任一固定的 p，选择充分大的 n，使得 $v_n>p$，于是我们有

$$\sum_{k=p+1}^{v_n}\frac{1}{u_k}\geqslant\frac{v_n-p}{n}$$

(因此左边的每一项都不小于 $1/n$) 由上面的不等式可以推得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{v_n}{n}\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{u_l}$$

再由 p 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{v_n}{n}\leqslant\lim_{p\to\infty}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{u_k}=0$$

注意 $v_n/n\geqslant0$，最后即得 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n/n=0$．

B－2　设集 S 含有 $n(n\geqslant1)$ 个元素，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 S 的一族不同子集，它们两两的交非空，而 S 的其他子集不能与 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都相交，求证：$k=2^{n-1}$．

解　S 总计有 2^n 个子集，我们可将其分成 2^{n-1} 组，使得每组内都含有两个互余的子集．假定 $k>2^{n-1}$，那么我们可从 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中选取两个互余的子集彼此不相交，这与题设矛盾．再假定 $k<2^{n-1}$，那么我们可从 S 中除 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 外，选取一对互余的子集 X 和 Y．于是至少有一个 A_i 符合 $A_i\cap X=\varnothing$，$A_i\subseteq Y$．同理至少有一个 A_j 符合 $A_j\cap Y=\varnothing$，$A_j\subseteq X$，由此推得

$$A_i\cap A_j\subseteq X\cap Y=\varnothing$$

这仍与题设矛盾，故必须 $k=2^{n-1}$．

B－3 设 $f(x)$ 是定义在全体实数上的连续函数，且对于任意的 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(n\varepsilon)=0 \quad ,n\ 为正整数$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=0$$

解 我们先来证明下述引理：

引理 设 $0<a<b$，k 为任一正整数，则

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]$$

含有从某点 c 开始的射线 $[c,+\infty)$.

引理的证明 取某个正整数 t，使 $t\geqslant k$，$t\geqslant\frac{a}{b-a}$. 当 $n\geqslant t$ 时，我们有

$$n(b-a)\geqslant a\Rightarrow nb\geqslant(n+1)a$$

因此，$[na,nb]$ 与 $[(n+1)a,(n+1)b]$ 是重叠的两个闭区间. 由此即可推知

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]\supseteq[ta,+\infty)$$

令 $c=ta$ 即得引理之结论.

回到本题，对任意给定的 $\alpha>0$，定义

$$F_n=\{x\mid |f(nx)|\leqslant\alpha\}$$

$$E_k=\{x\mid(\forall n\geqslant k)|f(nx)|\leqslant\alpha\}$$

则 $E_k=\bigcap_{n>k}F_n$. 因 f 连续，故 F_n 为闭集，E_k 也是闭集.

设 $y\in(0,+\infty)$，则依题意有 $\lim_{n\to\infty}f(ny)=0$，即存在某个 K，使得对于一切的 $n\geqslant k$ 都有 $|f(ny)|\leqslant\alpha$. 因此，$y\in E_k$，从而 $(0,\infty)\subseteq\bigcup E_k$. 根据下面即将证明的贝尔范畴定理，在 $\{E_k\}$ 中必有一个 E_m 含有区间 $[a,b]$，亦即

$$(\forall x\in[a,b])(\forall n\geqslant m)|f(nx)|\leqslant\alpha\Rightarrow$$

$$(\forall y\in\bigcup_{n=m}^{\infty}[na,nb])|f(y)|\leqslant\alpha$$

应用引理即知，存在某个常数 c，使 $\bigcup_{n=m}^{\infty}[na,nb]\supseteq[c,+\infty)$，而

$$(\forall y\geqslant c)|f(y)|\leqslant\alpha$$

由 α 的任意性即证得 $\lim_{y\to\infty}f(y)=0$.

贝尔[①]范畴定理 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的闭子集序列 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 含有某个区间，则 $\{E_k\}$ 中至少存在一个子集含有该区间.

① 贝尔（Baire），1874—1932，法国数学家.

证明 令 I_0 是属于 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 的一个有界闭区间. 若定理的结论不真,则 $I_0 \not\subseteq E_1$,即存在一点 $x \in I_0 - E_1$,因为 E_1 是闭集,所以存在一个含有 x_1 且不与 E_1 相交的闭区间 $I_1 \subseteq I_0$,依此类推,若已经作出了 I_{n-1},则必有一点 $x_n \in I_{n-1} - E_n$,进而又有 $x_n \in I_n \subseteq I_{n-1}$,且 $I_n \cap E_n = \varnothing$,根据区间套定理,必定存在一点 $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$,于是 $x \in I_0$,但是 $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 这一矛盾证明了贝尔范畴定理的正确性.

B－4 设球面上有 n 个大圆,其中任何三个都不共点,问此 n 个大圆将球面分成了多少个区域?

解 令 $f(n)$ 表示球面被 n 个大圆(无三个共点)分成的区域个数,则易知 $f(1) = 2, f(2) = 4$. 注意任何两个大圆都有且仅有两个交点,因此第 $n+1$ 个大圆与前面 n 个大圆将会交于 $2n$ 个点,从而第 $n+1$ 个大圆被分成 $2n$ 条弧. 其中每一条弧都将原 $f(n)$ 个区域中的某一个分成两个,并且彼此不重复. 由此可得递推关系式

$$f(n+1) = 2n + f(n), n \geqslant 1 \qquad ①$$

据此不难解得

$$f(n) = n^2 - n + 2, n \geqslant 1$$

由于 $f(0) = 1$. 故上面的递推关系式 ① 及其解对于 $n = 0$ 不能成立.

B－5 设有一严格递增的正整数序列(例如 1,2,3,4,5,6,10,12,…). u_n 表示此序列前 n 项的最小公倍数. 求证:下列无穷级数收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$$

解 设 u 为一正整数,d 与 u/d 为 u 的两个约数,若 $d \geqslant \sqrt{u}$,则 $u/d \leqslant \sqrt{u}$. 因此 u 的全体正约数中,至少有一半不超过 $\sqrt{u}$,从而 u 的全体正约数的个数不超过 $2\sqrt{u}$.

在本题中,u_n 是 n 个相异正整数的最小公倍数,因此 u_n 至少有 n 个正约数,于是 $2\sqrt{u_n} \geqslant n$. 由此推知收敛级数 $\sum 4/n^2$ 是 $\sum 1/u_n$ 的强级数,这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/u_n$ 的收敛性.

B－6 试证明：单位圆盘不能分成两个不相交的可叠合子集.

解 设D为单位圆盘，p为圆心，ρ表示圆盘内两点间的距离函数.

假定D是两不相交而又可叠合的集A与B的并，$p \in A$，记$x \to x^*$是从A到B的叠合映射，则$p^* \in B$. 作D的直径$rs \perp pp^*$，注意

$$\forall a \in A \Rightarrow \rho(p,a) \leqslant 1, \forall b \in B \Rightarrow \rho(p^*,b) \leqslant 1$$

及
$$\rho(p^*,r) = \rho(p^*,s) > 1$$

即知
$$r \in A, s \in A$$

又因为$\rho(r^*,s^*) = \rho(r,s) = 2$.所以$r^*s^*$也是$D$的直径，再由$\rho(p^*,r^*) = \rho(p,r) = 1$即知，$p^*$也是$D$的圆心. 于是$p^* = p$.这与$A \cap B = \varnothing$矛盾.因此$D$不能分成两个不相交的可叠合子集.

第 26 届美国大学生数学竞赛

A-1　设$\triangle ABC$中$\angle A<\angle C<90^\circ<\angle B$,$\angle A$,$\angle B$的外角平分线(从角顶到对边延长线止)之长都等于$AB$.试求出$\angle A$的度数.

解　设$\angle A$的外角平分线交直线BC于X,$\angle B$的外角平分线交直线AC于Y.若假定C位于B与X之间,则同$\angle B>\angle C$相矛盾,故我们可以断定B位于X与C之间.同理,由$\angle A<\angle C$可知C位于A与Y之间.

如果Z是直线AB上一点且B位于A与Z之间,我们从$\triangle ABY$有$\angle ZBY=2\angle A$,所以$\angle BXA=\angle ABX=\angle ZBC=2\angle ZBY=4\angle A$,而$\triangle ABX$的内角之和为$90^\circ-\frac{1}{2}\angle A+8\angle A$,所以$\angle A=12^\circ$.

A-2　试证:对任何正整数n

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

式中,$[x]$表示不超过x的最大整数,$\binom{n}{r}$是二项式系数即组合数,约定$\binom{n}{0}=1$.

解　在给定的和式中作代换$s=n-r$,则

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=\sum_{s=n}^{n-[(n-1)/2]}\left(\frac{-n+2s}{n}\binom{n}{n-s}\right)^2=$$

$$\sum_{s=n}^{n-[(n-1)/2]}\left(\frac{n-2s}{n}\binom{n}{r}\right)^2=$$

$$\sum_{r=n}^{n-[(n-1)/2]}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=$$

$$\sum_{r=n-[(n-1)/2]}^{n}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2\qquad①$$

当$(n-1)$为偶数,则

$$((n-1)/2)=(n-1)/2$$

$$n-((n-1)/2)=n-(n-1)/2=(n+1)/2$$

这时式①的左、右两边和号内的项数相同,和数相等,而且按 r 编号恰为从 0 到$(n-1)/2$,再从$(n+1)/2$到 n,一项不缺.所以

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=2\sum_{r=0}^{((n-1)/2)}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2$$

当$(n-1)$为奇数,则

$$((n-1)/2)=(n-2)/2$$

$$n-((n-1)/2)=n-(n-2)/2=(n+2)/2$$

这时①式两边的项按 r 编号为从 0 到$(n-2)/2$,再从$(n+2)/2$到 n,中间缺了编号为 $n/2$ 这一项.但是注意到若 $r=n/2$,就有 $\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=0$,即这一项为 0,所以仍有

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=2\sum_{r=0}^{((n-1)/2)}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2.$$

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right)^2=\sum\left(1-\frac{2r}{n}\right)^2\binom{n}{r}^2=$$

$$\sum\binom{n}{r}^2-4\sum\frac{r}{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r}+4\sum\binom{r}{n}^2\binom{n}{r}^2=$$

$$\binom{2n}{n}-4\sum\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{r}+4\sum\binom{n-1}{r-1}^2=$$

$$\binom{2n}{n}-4\binom{2n-1}{n-1}+4\binom{2n-2}{n-1}=\binom{2n}{n}-4\binom{2n-2}{n-1}=$$

$$\left(\frac{2n(2n-1)}{n^2}-\frac{4(n-1)}{n}\right)\binom{2n-2}{n-1}=$$

$$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\qquad ②$$

A－3 证明:对任意的实数序列 $a_1,a_2,\cdots$,下面两个条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_2}+\cdots+e^{ia_n}}{n}=\alpha\qquad ①$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_2}+\cdots+e^{ia_{n^2}}}{n^2}=\alpha\qquad ②$$

总是等价的.

解 ①蕴涵②,这可从一个收敛序列的子序列收敛于原序列的极限的事实来推知.

下面令 $c_r = \exp \mathrm{i}a_r, S(t) = c_1 + c_2 + \cdots + c_t$ 来简化记法.注意到 $|c_r| = 1$ 与 $|S(t+k) - S(t)| \leqslant k$.现在设②成立,记 $m = n^2 + k(0 \leqslant k \leqslant 2n)$,则

$$\left|\frac{S(m)}{m} - \frac{S(n^2)}{n^2}\right| \leqslant \left|\frac{S(m)}{m} - \frac{S(n^2)}{m}\right| + \left|\frac{S(n^2)}{n^2} - \frac{S(n^2)}{m}\right| \leqslant$$
$$\frac{k}{m} + n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m}\right) =$$
$$\frac{k + m - n^2}{m} = \frac{2k}{m} \leqslant \frac{4n}{n^2}$$

所以
$$\lim_{m \to \infty}(S(m)/m - S(n^2)/n^2) = 0$$
就是 $S(m)/m$ 收敛于 a.

A－4　在某次舞会上,假如没有一个男孩同每个女孩都跳过舞,但每个女孩至少同一个男孩跳了舞.证明:一定有两对舞伴 gb 及 $g'b'$,他们中的 b 没有和 g' 跳舞,g 没有和 b' 跳舞(此处 g 代表女孩,b 代表男孩).

解　设 b 是同最多女孩跳舞的男孩(也许有别的男孩也同这么多女孩跳舞,但不可能同更多的女孩跳舞),g' 是没有同 b 跳舞的某个女孩,而 b' 是同 g' 跳了舞的男孩.那么 b 的舞伴当中必有一个女孩 g 是没有同 b' 跳舞的(否则 b' 将比 b 有更多的舞伴).这样的两对舞伴 gb 及 $g'b'$ 就解决了问题.

A－5　有多少种方法能将从 1 到 n 的 n 个整数排成下面的排列,除了左边第一个整数以外,每个数都与它左方(不必相邻)的某一个数相差 1?

解　对 1 到 n 作符合题意的每一个排列皆简称为 n 排列.当 $n = 2$ 时,可得 2 个 2 排列:12,21;当 $n = 3$ 时,可得 2^2 个 3 排列:123,213,231,321;当 $n = 4$ 时,可得 2^3 个 4 排列:1234,2134,2314,3214,2341,4321,3421,3241.据此,我们会猜测 n 排列有两条性质:

(1)n 排列必以 1 或 n 结尾;

(2)n 排列的个数为 2^{n-1}.

下面用数学归纳法证明.

(1)假定 $n = k$ 时论断真确.则当 $n = k + 1$ 时,任取一个 $k + 1$ 排列 $\alpha = a_1a_2\cdots a_{k+1}$,若 $a_{k+1} \neq 1$ 或 $k + 1$,我们从 a 中删除 $k + 1$,则由归纳法假设知这个 k 排列的末尾 $a_{k+1} = k$.但 $k + 1$ 位于 k 前面不论什么位置,α 都不能成为 $k + 1$ 排列.这个矛盾表明任一 n 排列必须以 1 或 n 结尾.

(2) 假定 $n-1$ 排列的个数为 2^{n-2},则对其每个末尾添上 n 即可得 n 排列,个数仍为 2^{n-2}.又对此每个 n 排列作下述一一映射

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}n \to n+1-a_1, n+1-a_2, \cdots, n+1-a_{n-1}, 1$$

恰好得到以1结尾的 n 排列,共 2^{n-2} 个.由(1)的结论即知,全体 n 排列的个数为 $2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$.

A-6 在笛卡儿平面直角坐标系 xy 上,证明:直线 $ux+vy=1$ 与曲线 $x^m+y^m=1(m>1)$ 相切的充要条件是 $u^n+v^n=1$ 及 $m^{-1}+n^{-1}=1$.

解 这个问题并非普遍成立,除非 x,y,u,v 满足某些更严的限制条件.例如,当它们都非负时可能成立(但也还不充分,见下).即令如此,若 m 为有理数,具有奇数为分子和分母,则当 $u^n+v^n>1$ 时有切于曲线的切线;若 m 是以奇数为分子偶数为分母的有理数,则尽管 u,v 适合 $u^n+v^n=1$,而直线 $ux+vy=1$ 仍不与曲线 $x^m+y^m=1$ 相切.

在下面的证法中,我们用到对于非负数 a 及正数 r,s 有 $(a^t)^s=a^{ts}$ 的事实.

设 (x_0,y_0) 是曲线 $x^m+y^m=1$ 上一点.过这点的切线为 $x_0^{m-1}x+y_0^{m-1}y=1$.它形如 $ux+vy=1$,其中 $u=x_0^{m-1}$,$v=y_0^{m-1}$(u,v 非负).由关系式 $m^{-1}+n^{-1}=1$ 得 $n=m/(m-1)$,则有 $u^n+v^n=x_0^m+y_0^m=1$.

反之,设 $m^{-1}+n^{-1}=1$,u,v 为非负且使 $u^n+v^n=1$.我们定义 $x_0=u^{n/m}$,$y_0=v^{n/m}$,那么 x_0,y_0 非负且 $x_0^m+y_0^m=u^n+v^n=1$.于是 (x_0,y_0) 在曲线 $x^m+y^m=1$ 上,并且根据前面的计算,直线 $ux+vy=1$ 是该曲线的切线.

B-1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

解 作变量代换 $x_k\to 1-x_k$,得

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n=$$
$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

注意到左、右两被积函数之和的积分为1,所以左、右两式都等于 $\frac{1}{2}$,取极限仍为 $\frac{1}{2}$.

B－2　有 n 名选手 $p_1,p_2,\cdots,p_n(n>1)$ 参加循环赛，每名选手与其他各选手都赛一场且规定无平局，用 w_r 与 l_r 分别表示选手 p_r 赢与输的场数，证明

$$\sum_{r=1}^{n} w_r^2 = \sum_{r=1}^{n} l_r^2$$

解　显然 $w_r+l_r=n-1(r=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_1^n w_r=\sum_1^n l_r$，则

$$\sum_1^n w_r^2-\sum_1^n l_r^2=\sum_1^n (w_r-l_r)(w_r+l_r)=$$
$$(n-1)\sum_1^n (w_r-l_r)=(n-1)\cdot 0=0$$

B－3　试证：边长为整数而面积在数值上等于周长的两倍的直角三角形，正好有三个.

解　所有的毕氏三重组能从 $x=\lambda(p^2-q^2),y=2\lambda pq,z=\lambda(p^2+q^2)$ 获得(关于毕氏三重组，即勾股数，可参看例如陈景润《初等数论 I》，科学出版社，1978，64 页. 注意这里多了系数 λ). 其中 $0<q<p$，p 与 q 互素且 $p\not\equiv q \bmod 2$，λ 为任意自然数.

题目要求有

$$\frac{1}{2}xy=2(x+y+z)$$

即
$$\lambda^2(p^2-q^2)pq=2\lambda(p^2-q^2+2pq+p^2+q^2)$$

化简得
$$\lambda(p-q)q=4$$

因为 $p-q$ 为奇数，推知 $p-q=1$，而这仅当 q 为 1，2，4 才能适合上述关系式.

当 $q=1$，则 $p=2,\lambda=4,x=12,y=16,z=20$.

当 $q=2$，则 $p=3,\lambda=2,x=10,y=24,z=26$.

当 $q=4$，则 $p=5,\lambda=1,x=9,y=40,z=41$.

B－4 考虑函数

$$f(x,n)=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{4}x^2+\cdots}{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}x+\binom{n}{5}x^2+\cdots}$$

式中 n 为正整数. 试用含 $f(x,n)$ 与 x 的有理式来表示 $f(x,n+1)$. 由此, 或用别的方法, 对适当的 x 固定值求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x,n)$.

解 根据组合恒等式

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

不难推得
$$f(x,n+1)=\frac{f(x,n)+x}{f(x,n)+1}$$

当 $n\to\infty$ 时,若 x 能使 $f(x,n)$ 收敛,记极限为 $F(x)$ 必满足

$$F(x)=(F(x)+x)/(F(x)+1)$$

得 $F^2(x)=x$.现在证明对任何正数 x 都收敛于 $\sqrt{x}$.当 $x=0,1$ 显然如此.注意(可用归纳法证)

$$f(x,n)=\sqrt{x}\,\frac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{(1+\sqrt{x})^n-(1-\sqrt{x})^n}$$

当 $0<x<1$ 时,记 $a=(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})$,则 $0<a<1$ 而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\,\frac{1+a^n}{1-a^n}\to\sqrt{x}$$

当 $x>1$ 时,记 $b=(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)$,则 $0<b<1$ 而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\,\frac{1+(-b)^n}{1-(-b)^n}\to\sqrt{x}$$

当 $x<0$,则 $\sqrt{x}$ 为纯虚数,利用复数的三角函数式令 $1+\sqrt{x}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,可得

$$f(x,n)=-\mathrm{i}\sqrt{x}\cot n\theta$$

当 $n\to\infty$ 时极限不存在.若 x 为其它复数,则 $\sqrt{x}$ 的两根关于原点对称,必有一个处于右半平面.经过不太复杂的演算可知 $f(x,n)$ 的极限存在,且等于 x 在右半平面的那个平方根.

B－5 考虑 V 个不同对象 $a,b,c,\cdots,k$ 的非序对的集合.其中如有三个这样的非序对 bc,ca,ab 便称为形成一个三角形.求证:若 $4E\leqslant V^2$,则选取 E 个非序对而其中不形成三角形是可能的.

解　分这些对象为两个子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$与$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，此处$m+n=V$.则这mn个非序对$a_jb_k(j=1,2,\cdots,m$而$k=1,2,\cdots,n)$当中显然不含三角形.若V是偶数，则取$m=n=V/2$；而若V是奇数，则取$m=(V+1)/2,n=(V-1)/2$.就有$mn\geqslant V^2/4\geqslant E$.

B－6　设A,B,C,D是平面上四个不同的点，使得过A和B的每个圆与过C和D的每个圆相交(或重合).证明：这四点或者共线或者共圆.

解　用反证法.假设A,B,C,D既不共线又不共圆，则线段AB的中垂线p不会与线段CD的中垂线q重合.有两种情形；

i 若直线p与q相交，则它们的交点是两个同心圆的圆心，一个圆过A,B，另一个圆过C,D.这两圆当然不相交又不重合(否则四点共圆)，与题设矛盾.

ii 若p与q平行，则直线AB与CD也平行，考虑分别位于p,q上，又是平行直线AB与CD之间的中点的两点P与Q，显然，圆ABP与CDQ没有公共点，也与题设矛盾.

第27届美国大学生数学竞赛

A－1 设 $f(n)$ 表示数列 0,1,1,2,2,3,3,4,… 的前 n 项的和,该数列的通项为

$$a_n=\begin{cases}n/2 & ,当 n 为偶数\\(n-1)/2 & ,当 n 为奇数\end{cases}$$

试证:若 x 与 y 正整数且 $x>y$,则

$$xy=f(x+y)-f(x-y)$$

解 容易用数学归纳法证明

$$f(n)=\begin{cases}n^2/4 & ,当 n 为偶数\\(n^2-1)/4 & ,当 n 为奇数\end{cases}$$

由于 $x+y$ 与 $x-y$ 总是有相同的奇偶性,所以在两种(奇、偶)情况下我们都有

$$f(x+y)-f(x-y)=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=xy$$

A－2 设 a,b,c 为三角形三边之长,$p=(a+b+c)/2$,r 为内切圆半径,求证

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$$

解 可用两种方法来计算所给三角形面积:$A=pr$ 以及 $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.平方之并令它们相等,得

$$p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

置 $x=1/(p-a)$,$y=1/(p-b)$,$z=1/(p-c)$,可将上面的等式写为

$$\frac{1}{r^2}=pxyz=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

于是我们仅需证明

$$yz+xz+xy\leqslant x^2+y^2+z^2$$

这极易从熟知的不等式 $y^2+z^2\geqslant 2yz$,$x^2+z^2\geqslant 2xz$,$x^2+y^2\geqslant 2xy$

得到.

A－3　设 $0 < x_1 < 1$ 而 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$，$n = 1,2,\cdots$．求证

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$$

解　以 $(n+1)$ 乘给定的关系式得

$$(n+1)x_{n+1} = nx_n + x_n - (n+1)x_n^2 = nx_n + x_n(1-(n+1)x_n) \quad ①$$

为了证明 nx_n 递增，我们须证 $1-(n+1)x_n \geqslant 0$．事实上

$$x_2 = x_1(1-x_1) = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$$

$$x_n \leqslant a \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - x_n\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$$

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) = -\left(\frac{1}{2} - x_n\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant -\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x_{n+1} \leqslant a(1-a)$$

这样，利用数学归纳法得

$$(n+1)x_n \leqslant (n+1)\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \leqslant 1$$

进而 $nx_n < (n+1)x_n \leqslant 1$，故 nx_n 以 1 为上界，所以 nx_n 收敛于极限 α，此处 $0 < nx_n < a \leqslant 1$．现在对式 ① 由 2 到 n 的情况相加，得

$$1 \geqslant (n+1)x_{n+1} = 2x_2 + x_2(1-3x_2) + x_3(1-4x_3) + \cdots + x_n(1-(n+1)x_n) \quad ②$$

若 $\alpha \neq 1$，则对所有足够大的 n 有

$$(1-(\alpha+1)x_n) \geqslant (1-\alpha)/2$$

从而由 ② 证得 $\sum x_n$ 收敛．可是 $nx_n \geqslant x_1$，故

$$\sum x_n \geqslant x_1 \sum \frac{1}{n}$$

A－4　试证：从自然数列中删去完全平方数之后，第 n 个数等于 $n + \{\sqrt{n}\}$，这时定义 $\{\sqrt{n}\}$ 为最接近 $\sqrt{n}$ 的整数.

解　为了证明这个公式，利用数学归纳法证明差值 $\Delta = n + \{\sqrt{n}\} - (n-1+\{\sqrt{n-1}\}) = 1$ 或 2，而当且仅当 $n + \{\sqrt{n-1}\}$ 是一个完全平方数时上述差值才为 2，就可以了．为方便起见，令 $\{\sqrt{n-1}\} = q$，则自然有

$$q-\frac{1}{2}<\sqrt{n-1}<q+\frac{1}{2}$$

或表为 $q^2-q+\frac{1}{4}<n-1<q^2+q+\frac{1}{4}$ 更好.这给出

$$q^2+5/4<n+\{\sqrt{n-1}\}<(q+1)^2+\frac{1}{4}$$

所以当且仅当 $n=(q+1)^2-q$ 时数 $n+\{\sqrt{n-1}\}$ 是一个完全平方数.然而,那时且仅在那时 $\sqrt{n}>q+\frac{1}{2}>\sqrt{n-1}$.换言之,那时且仅在那时有 $\{\sqrt{n}\}-\{\sqrt{n-1}\}=1$,因为这差绝不会大于 1.

A-5 设 C 为实轴上的连续函数族,T 是将 C 映为 C 的映射且具有下列性质:

(1) T 为线性的,即 $T(c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1T\psi_1+c_2T\psi_2$,式中 c_1,c_2 为实数,ψ_1,ψ_2 在 C 中.

(2) T 是局部的,即若在某区间 I 内 $\psi_1\equiv\psi_2$,则在 I 内也有 $T\psi_1\equiv T\psi_2$.

求证:T 一定是具有形式 $T\psi(x)=f(x)\psi(x)$ 的映射,式中 $f(x)$ 是某一适当的连续函数.

解 我们将证明 $T\psi(x)=f(x)\psi(x)$ 对所有 $\psi\in C$ 成立,这里 f 是函数 1(就是那个使所有 x 都对应于 1 的函数)经 T 映成的象.我们对于每个 x_0 及 ψ,定义 ψ' 为

$$\psi'(x)=\begin{cases}\psi(x) & ,若\ x\leqslant x_0\\ \psi(x_0) & ,若\ x>x_0\end{cases}$$

由于 T 是局部的,对于所有 $x\leqslant x_0$ 必有 $T\psi'(x)=T\psi(x)$.另一方面,由 T 的线性性,对于 $x>x_0$,有 $T\psi'(x)=\psi(x_0)T_1(x)=\psi(x_0)f(x)$.根据 $T\psi'$ 的连续性,$T\psi(x_0)=\psi(x_0)f(x_0)$.

A-6 证明:表达式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

解 我们知道这表达式意即

$$3=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

我们看到

$$3=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}=$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

致使我们猜测有关系式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}\quad (n\geqslant 2) \qquad ①$$

这可由

$$(n+2)^2=n^2+4n+4=1+(n+1)(n+3)=1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$$

以及数学归纳法来证明,于是我们有

$$3>\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \qquad ②$$

为了建立一个反方向的不等式,注意到对于任何 $\alpha>1$,有 $\sqrt{1+n\alpha}\leqslant\sqrt{\alpha}\ \sqrt{1+n}$. 在式 ① 中倒数第二个根号内取 $\sqrt{(n+2)^2}$ 为 α,利用这里的不等式.然后对层层根号利用类似的不等式,可一直将 $(n+2)^a$ 提到最前面,这里 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即有

$$3\leqslant(n+2)^a\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \qquad ③$$

在 ②,③ 两式中均令 $n\to\infty$ 就可得证.

B-1　设一个凸多边形 P 含于边长为1的正方形内,试证:P 的各边的平方和小于或等于 4.

解　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 P 的顶点,$P'_1,P'_2,\cdots,P'_n$ 是 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 在正方形一边上的投影,$P''_1,P''_2,\cdots,P''_n$ 是 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 在与前一边垂直的另一边上的投影.由于 P 是凸的,第一边至多被线段 $\overline{P'_1P'_2},\cdots,\overline{P'_{n-1}P'_n},\overline{P'_nP'_1}$ 遮盖两次.因而得不等式 $\overline{P'_1P'_2}^2+\cdots+\overline{P'_nP'_1}^2\leqslant 2$.同理 $\overline{P''_1P''_2}^2+\cdots+\overline{P''_nP''_2}^2\leqslant 2$.将这两个不等式相加并利用毕氏定理即得结论.

B-2　试证:任何十个连续整数中至少有一个数与其它各数都互素.

解　任何十个连续整数,它们两两之差的绝对值小于等于 9.因此,从中任取二数 a,b 若不互素,则 a,b 的公因数 d 应满足不

等式 $2 \leqslant d \leqslant 9$. 故 a,b 的公共素因数只能是 2,3,5,7.

十个连续整数必有 5 个奇数,能被 3 整除者至多有两个奇数,两个偶数. 能被 5 整除者必有一个奇数,一个偶数. 能被 7 整除者至多有一个奇数,一个偶数. 综上所述,至少有一个奇数不是 3,5,7 的倍数,它显然与其余 9 个整数互素.

B-3 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{p_n}$ 收敛($p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 为正实数),则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2} p_n$$

也收敛.

解 令 $q_n = p_1+p_2+\cdots+p_n (q_0 = 0)$. 我们需要通过 $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 去估计

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n}{q_n}\right)^2 (q_n - q_{n-1})$$

注意

$$S_N \leqslant \frac{1}{p_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{q_n q_{n-1}} (q_n - q_{n-1}) =$$

$$\frac{1}{p_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{q_{n-1}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{q_n} =$$

$$\frac{1}{p_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{q_n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{q_n} \leqslant$$

$$\frac{5}{p_1} + 2\sum_{n=2}^{N} \frac{n}{q_n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{q_n}$$

根据许瓦尔兹不等式

$$\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{n}{q_n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{q_n^2} p_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

因而

$$S_N \leqslant \frac{5}{p_1} + 2\sqrt{S_N T} + T$$

从这二次不等式便得

$$\sqrt{S_N} \leqslant \sqrt{T} + \sqrt{2T + 5/p_1}$$

B-4 设有 $mn+1$ 个整数适合关系:$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{mn+1}$. 求证:能或者从中选取 $m+1$ 个数,每个数都不能被其它 m 个数整除;或者从中选取 $n+1$ 个数,由小到大排列,每个数整除后一个数.

解 对满足 $1 \leqslant i \leqslant mn+1$ 的每个 i,由 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{mn+1}$ 中

选出一链以 a_i 为首项,且链的每一项能整除它紧接的下一项并以 n_i 表示链的最大长度.如果所有 n_i 不大于n,那么这些链条的个数将不少于 $m+1$.从这些链条中各选出其最大数,并按由小到大的顺序记为

$$a_1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_i < \cdots < b_j < \cdots < b_k \leqslant a_{mn+1}$$

其中 $k \geqslant m+1$.在 $b_1,\cdots,b_k$ 中,若存在 $b_i \mid b_j$,则 b_j 就应是b_i 所在链条中 b_i 后面的一个数.这与上述最长链条的假定矛盾,因此 $b_1,\cdots,b_k$ 中任何一个都不能被比它小的数整除.

B-5 在平面上给定 $n(n \geqslant 3)$ 个不同的点,没有三点共线,试证:存在一个以这些点为顶点的简单闭多边形.

解法 1 设这些点为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$.对于$(1,2,\cdots,n)$ 的每一个排列$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$,我们可联结成一个闭多边形,名之为 $P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}\cdots P_{\sigma_n}P_{\sigma_1}$.这样,我们可得$(n-1)$!个不同的闭多边形,其中可以有自交的.我们指出那个周长为最短的这些多边形的任何一个是简单的.事实上,由假设没有三点共线,一个自交发生于当且仅当两条线段如$\overline{P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}}$ 与$\overline{P_{\sigma_m}P_{\sigma_{m+1}}}$ 彼此相交.可是这样三来闭多边形 $P_{\sigma_1}\cdots P_{\sigma_m-1}P_{\sigma_m}P_{\sigma_1}P_{\sigma_n}P_{\sigma_n-1}\cdots P_{\sigma_m+1}P_{\sigma_2}$ 会有更短的周长.所以若 $P_{\sigma_1}\cdots P_{\sigma_n}P_{\sigma_1}$ 为最短就不能是自交的.

解法2 取某两点 P_1 与 P_2,使得所有其它点位于 P_1 与 P_2 连线的同侧.每点 $P_i(i>2)$ 确定 P_1P_2 与 P_1P_l 之间的夹角 $\theta_i(0<\theta_i<\pi)$.根据假设,若 $i \neq j$ 则 $\theta_i \neq \theta_j$.设$(i_3,i_4,\cdots,i_n)$是$(3,4,\cdots,n)$的一个排列,使得 $\theta_{i_3}<\theta_{i_4}<\cdots<\theta_{i_n}$,则 $P_1P_2P_{i_3}P_{i_4}\cdots P_{i_n}P_1$ 是一简单闭折线.

B-6 试证:微分方程 $y''+e^x y=0$ 的全体解当 $x \to \infty$ 时均保持有界.

解 以 $e^{-x}y'$ 乘方程,并从0到 T 积分,我们将项重排后得

$$y^2(T)+2\int_0^T e^{-x}y'y''\mathrm{d}x = y^2(0)$$

注意对于某个 $\xi \in [0,T]$ 必有

$$2\int_0^T e^{-x}y'y''\mathrm{d}x = 2\int_0^{\xi} y'y''\mathrm{d}x = \{y'(\xi)\}^2-\{y'(0)\}^2$$

于是得到 $\quad y^2(T)+\{y'(\zeta)\}^2 = y^2(0)+\{y'(0)\}^2$

第28届美国大学生数学竞赛

A－1 设$f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$,式中$a_1$,$a_2,\cdots,a_n$ 是实数,n 是正整数. 若对所有实数 x 有 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$,求证

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

解 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| = |f'(0)| =$

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \leqslant 1$$

A－2 定义 S_0 为1.设 S_n 为某一类$n \times n$ 矩阵的总数($n \geqslant 1$),这类矩阵的元素为非负整数且具有性质 $a_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$,以及$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1(j = 1,2,\cdots,n)$.试证

(1)$S_{n+1} = S_n + nS_{n-1}$;

(2)$\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$,这里 $\exp(x) = e^x$.

解 (1)S_n是$n \times n$对称的"置换矩阵"的数目(所谓置换矩阵就是每行每列只有一个元素为1,其余元素全为0的矩阵).设$a_{1k} = 1$.若 $k = 1$,则有 S_{n-1} 个方法去构成这 n 阶矩阵.若 $k \neq 1$,则$a_{1k} = a_{k1} = 1$,从而删去第一行第 k 行及第一列第 k 列剩下一个$(n-2) \times (n-2)$对称的置换矩阵,可见

$$S_n = S_{n-1} + (n-1)S_{n-2}$$

(2)令 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{S_n \frac{x^n}{n!}\right\}$,级数对所有 x 一致收敛,则

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (n-1)S_{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n \frac{x^n}{n!}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(S_{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}\right) =$$
$$F(x) + xF(x)$$

故
$$F'(x)/F(x) = 1 + x$$
积分并利用 $F(0) = S_0 = 1$,得
$$F(x) = \exp(x + x^2/2)$$

A－3 考虑在 $0 < x < 1$ 内有两个不同零点的整系数多项式 $ax^2 - bx + c$(式中 $a,b,c > 0$).找出并且证明满足上述条件的多项式的最小系数 a.

解 设
$$f(x) = ax^2 - bx + c = a(x-r)(x-s)$$
则
$$f(0)\cdot f(1) = a^2 r(r-1)s(s-1)$$
从 $r(r-1)$ 的图象看出当 $0 < r < 1$ 时有 $0 < |r(r-1)| \leqslant \frac{1}{4}$,式中等号当且仅当 $r = \frac{1}{2}$ 时成立.同理 $0 < |s(s-1)| \leqslant \frac{1}{4}$.由于 $r \neq s$,故 $r(r-1)s(s-1) < 1/16$.从而 $0 < f(0)\cdot f(1) < a^2/16$.又因 a,b,c 为整数,故 $1 \leqslant f(0)\cdot f(1)$.所以 $a^2 > 16$,则 $a \geqslant 5$.

考虑到 c 至少取 1,由判别式 $b^2 - 4ac > 0$ 得 b 的最小值是 5.作 $5x^2 - 5x + 1$ 发现它在 0 与 1 之间有两个不同零点,可见这种多项式是存在的.

A－4
$$u(x) = 1 + \lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)\mathrm{d}y$$
为定义在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的实值函数.证明:若 $\lambda > \frac{1}{2}$,u 就不存在.

解 假定有一个解 u,则对 x 从 0 到 1 积分得
$$\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\cdot\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1\left(\int_x^1 u(y)u(y-x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
后面的二次积分可改变积分顺序且设 $\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = \alpha$,得
$$\alpha = 1 + \lambda\int_0^1\left(u(y)\int_0^y u(y-x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

现在保持 y 不变，令 $z = y - x$ 得

$$\alpha = 1 + \lambda\int_0^1\left(u(y)\int_0^y u(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$$

设 $f(y) = \int_0^y u(z)\mathrm{d}z$，则

$$\alpha = 1 + \lambda\int_0^1 f'(y)f(y)\mathrm{d}y = 1 + \lambda\left(\frac{1}{2}\cdot f^2(1) - \frac{1}{2}f^2(0)\right) = 1 + \lambda\cdot\frac{1}{2}\alpha^2$$

即有

$$\lambda\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$$

由二次方程根的判别式可知若 $\lambda > \frac{1}{2}$，则根 α 为虚数. 可见这时不存在那样的解 $u(x)$.

A－5　试证：边界由至多为数目有限的直线段组成，而面积不小于 $\pi/4$ 的一个平面凸区域中，至少存在一对相距为 1 的点.

解　设区域的最大直径为 $2d$. 用反证法，假定 $d < \frac{1}{2}$. 取某个最大直径为 x 轴并以它的中点为原点. 该区域必被限于 $x = -d$ 和 $x = d$ 之间. 这区域的上边界与下边界都是 x 的函数. 由于凸性，可将它们记为 $f(x)$ 及 $-g(x)$，这里 f 与 g 在 $-d \leqslant x \leqslant d$ 上为非负. 我们由计算点 $(x, f(x))$ 与点 $(-x, -g(-x))$ 之间的距离可知当 $-d \leqslant x \leqslant d$ 时有 $f(x) + g(-x) < \sqrt{1-4x^2}$. 至于该区域面积则由

$$\int_{-d}^{d}[f(x) - (-g(x))]\mathrm{d}x = \int_{-d}^{d}(f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_{-d}^{d}f(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{-d}g(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_{-d}^{d}(f(x) + g(-x))\mathrm{d}x < \int_{-d}^{d}\sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x < \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

这个矛盾表明 $d \geqslant \frac{1}{2}$，即至少存在一对相距为 1 的点.

A－6　给定实数 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$，有 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. 考虑线性方程组

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0$$

的 $x_i(i=1,2,3,4)$ 全不为零的解集. 每个这样的解确定一个"正、负号的四重组"(这里正、负号指 x_1,x_2,x_3,x_4 的符号).

(1) 试确定不同四重组的最大可能数目,证明你的结论.

(2) 研究上述四重组个数达到最大时实数 $a_i,b_i(i=1,2,3,4)$ 应当满足的充要条件.

解　(1) 求解以 x_3 与 x_4 为自由未知量的方程组,得 $x_1=A_1x_3+B_1x_4,x_2=A_2x_3+B_2x_4,x_3=x_3,x_4=x_4$. 其中 $A_1=(a_2b_3-a_3b_2)/(a_1b_2-a_2b_1)$,等等. x_3,x_4 平面内的每一点对应于唯一组解 (x_1,x_2,x_3,x_4). x_1 的符号取决于点 (x_3,x_4) 相对于直线 $A_1x_3+B_1x_4=0$ 的位置,即点 (x_3,x_4) 在此直线某一侧时 x_1 为正,另一侧时 x_1 为负. 同理 x_2,x_3,x_4 的符号分别按直线 $A_2x_3+B_2x_4=0$, $x_3=0,x_4=0$ 的两侧来决定. 上述四条直线都过原点,至多能将平面分成八个区域,每个区域内的点对应于方程组的全不为零解确定的一个"正负号四重组". 所以不同四重组的最大可能个数为 8.

(2) 当且仅当确实有四条不同直线时才有最大数 8. 这等价于条件 $A_1\neq 0,A_2\neq 0,B_1\neq 0,B_2\neq 0,A_1B_2-A_2B_1\neq 0$. 它们可以简单地表为 $a_ib_j-a_jb_i\neq 0(i,j=1,2,3,4$ 且 $i<j)$.

B－1　设 $(ABCDEF)$ 是半径为 r 的圆的内接六边形. 试证:若 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=r$,则 $\overline{BC},\overline{DE},\overline{FA}$ 的中点是一等边三角形的顶点.

解　考虑复平面上中心在原点的圆,可以取 A,B,C,D,E,F 为绝对值为 r 的复数并且使 $B=A\omega,D=C\omega,F=E\omega$,其中 $\omega=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$.

因为 $\omega^3=1$ 且 $\omega\neq 1,\omega^2-\omega+1=0,BC,DE$ 和 FA 的中点是 $P=\frac{1}{2}(A\omega+C)Q=\frac{1}{2}(C\omega+E)$,以及 $R=\frac{1}{2}(E\omega+A)$,如果从 Q 到 R 的线段被围绕 Q 旋转 $\pi/3$,则 R 被变换 $Q+\omega(R-Q)$,而它等于 P,因此 P,Q,R 是一个等边三角形的顶点.

B－2 设 $0 \leqslant p \leqslant 1, 0 \leqslant r \leqslant 1$，考虑恒等式

(1) $(px+(1-p)y)^2 = Ax^2 + Bxy + Cy^2$;

(2) $(px+(1-p)y)(rx+(1-r)y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$.

求证(就题设范围内的 p 与 r)：

(1) $\max\{A, B, C\} \geqslant 4/9$;

(2) $\max\{\alpha, \beta, \gamma\} \geqslant 4/9$.

解 对于(1)，可以直接得到 $A = p^2, B = 2p(1-p)$，而 $C = (1-p)^2$，这可以通过考查 A, B, C 在 $0 \leqslant p \leqslant 1$ 上的图形看到.

对于(2)，$\alpha = pr, \beta = p(1-r) + r(1-p), \gamma = (1-p)(1-r)$，考虑由 $0 \leqslant p \leqslant 1$ 及 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 定义的 p, r－平面上的区域 R，我们将表明不存在 R 中的点满足 $\alpha < 4/9, \beta < 4/9$ 且 $p < 4/9$，若 $\alpha < 4/9$ 且 $\gamma < 4/9$，则 (p, r) 位于双曲线 $pr = 4/9$ 和 $(1-p)(1-r) = 4/9$ 之间，这些双曲线在 R 中分别有顶点 $(2/3, 2/3)$，$(1/3, 1/3)$，并于 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的对称性提示我们令 $p' = p - \frac{1}{2}$ 和 $r' = r - \frac{1}{2}$，这样 $\beta = \frac{1}{2} - 2p'r'$，因此 $\beta < 4/9$ 当且仅当 $p'r' > 1/36$，注意到双曲线 $p'r' = \frac{1}{36}$ 的顶点是 $(p, r) = (1/3, 1/3)$ 和 $(2/3, 2/3)$. 借助于渐近时，我们可以通过图形看到区域 $\beta < 4/9$ 在 $\alpha < 4/9$ 及 $\gamma < 4/9$ 确定的区域 R 中并不重合.

B－3 设连续实函数 f 与 g 都是周期为 1 的周期函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

解 上面第一项等于

$$\sum_{m=0}^{n-1}(1/n)f(m/n)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

当 $n \to \infty$ 时成为 $\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)$

又

$$\left|\int_{m/n}^{(m+1)/n}\{f(x) - f(m/n)\}g(nx)\,\mathrm{d}x\right| <$$

$$\int_{m/n}^{(m+1)/n}|f(x) - f(m/n)||g(nx)|\,\mathrm{d}x <$$

$$\int_{m/n}^{(m+1)/n}\varepsilon|g(nx)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{n}\int_0^1|g(t)|\,\mathrm{d}t$$

于是前面第二项的绝对值小于或等于 $\varepsilon\int_0^1|g(t)|\,\mathrm{d}t$，当 $\varepsilon \to 0$ 时

趋于 0.

B - 4 (1) 在保险室内放着编号为 $1,2,3,\cdots,n$ 的 n 个保验柜,原来都锁着.一个职员进行一系列名之为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的操作.这里 $T_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是指对所有那些而且仅仅那些编号为 k 的倍数的保险柜进行一次由上锁变开锁或由开锁变上锁的操作.完成这 n 步骤作之后发现,现在是且只是那些编号为完全平方数的保险柜的锁开着.请对此给予数学证明.

(2) 研究出几种在数学上有意义的操作程序,使得能分别打开编号为完全立方数的柜,或形如 $2m^2$ 的数的柜,或形如 m^2+1 的数的柜,或你自选的非平凡的类似数的保险柜.

解 (1) 在 n 步操作都执行后,第 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 号保险柜当且仅当 m 有奇数个因子时成为开锁.设 $m=p^\alpha q^\beta\cdots r^\gamma$,则 m 的因子的数目是 $(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\gamma+1)$,当且仅当 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 都是偶数时它为奇数.这等价于 m 是一个完全平方数的条件.

(2) 记 T_k 为对号码是 $2k$ 的倍数的保险柜进行一次开锁或上锁的操作,则可得号码为 $2m^2$ 的柜锁都开着.而编号 m^2+1 的柜的开锁,有赖于将 T_k 改为对柜号 i(这里 $i-1$ 是 k 的倍数)操作并且约定 1 号柜只被 T_1 所作用.

B - 5 试证:$(2-1)^{-n}$ 的二项展开式的前 n 项的和是 $1/2$,式中 n 为正整数.

解 设 $(2-1)^{-n}$ 的二项展开式的前 n 项和为 A_n,则

$$A_n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}2^{-n-i}=$$

$$2^{-n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\binom{n+i-2}{i}+\binom{n+i-2}{i-1}\right\}2^{-n-i}=$$

$$2^{-n}+\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n+i-2}{i}2^{-n-i}+\binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1}-2^{-n}\right\}+$$

$$\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n+j-1}{j}2^{-n-j-1}=2^{-n}+\frac{1}{2}A_{n-1}+\binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1}-$$

$$2^{-n}+\frac{1}{2}A_n-\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n}=$$

$$\frac{1}{2}A_{n-1}+\frac{1}{2}A_n+$$

$$2^{-2n}\left\{2\binom{2n-3}{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}A_{n-1}+\frac{1}{2}A_n$$

得 $A_n=A_{n-1}$,但 $A_1=2^{-1}=\frac{1}{2}$,所以对于所有正整数 n 都有 $A_n=\frac{1}{2}$.

B－6　设 f 是定义在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上且具有偏导数的实函数,$|f(x,y)|\leqslant 1$.求证:在这单位圆内有一点 (x_0,y_0) 可使

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16$$

解　考虑一个函数 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$.在单位圆周上,显然 $g(x,y)\geqslant 1$,而在原点 $g(0,0)\leqslant 1$.所以,或者 $g(x,y)=$ 常数,从而 $f(x,y)=$ 常数 $-2(x^2+y^2)$,或者 $g(x,y)$ 在某个内点有一个极小值.当 $g(x,y)=$ 常数时,不难找到那样的内点满足题目的要求.而在第二种情形,令 (x_0,y_0) 是 $g(x,y)$ 的极小点,则在 (x_0,y_0) 有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

因而　$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leqslant 4|x_0|,\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leqslant 4|y_0|$

也可得到题目的结论.

第 29 届美国大学生数学竞赛

A－1　证明

$$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解　应用初等微积分标准解法．通过除法，把被积函数改写成多项式加上分子的次数小于 2 的有理函数．其解很容易求得．

A－2　给定整数 a,b,e,c,d 和 f，且 $ad\neq bc$，又给定实数 $\varepsilon>0$，证明：存在有理数 r 和 s，使得

$$0<|ra+sb-e|<\varepsilon$$
$$0<|rc+sd-f|<\varepsilon$$

解　容易的解答是通过选择具有条件 $0<\rho<\varepsilon$ 的有理数 ρ 和解线性方程组

$$ar+bs=e+\rho$$
$$cr+ds=f+\rho$$

而得到．因为 $ad\neq bc$，因此解 r 和 s 存在而且是满足给定不等式的有理数．

个别学生寻求接近于两条直线 $ax+by=e$，和 $cx+dy=f$ 的交点是具有有理坐标的点．这是一种普遍的但是笨拙的方法，而且有时学生没有证明此点不在这两条直线的任何一条上．

A－3　证明有限集的所有子集的表能按下列方法作出：

(1) 空集放在表的第一位；

(2) 每个子集恰好出现一次；

(3) 表中的每一个子集或者是通过前面的一个子集上加上一个元素或者是删去前面子集中的一个元素而得到．

解　用归纳法证明．对于单元素集 $\{1\}$，所有子集的表是 $\varnothing$，$\{1\}$．因此结论对于单元素集是真的．假设对含有 $n-1$ 个元素的集合结论是真的．令 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 和 $T=\{1,2,3,\cdots,n-1\}$．设 $T_0,T_1,\cdots,T_t(t=2^{n-1}-1)$ 是满足需要的 T 的子集的表，则所需要的 S 的子集的表是 $S_0,S_1,\cdots,S_s(s=2^n-1)$，此处 $S_i=T_i(0\leqslant i\leqslant t)$ 且 $S_{t+1}=T_t\cup\{n\},S_{t+2}=T_{t-1}\cup\{n\},\cdots,S_s=\{n\}$．

此问题等价于在 n 维立方体中求 Hamilton 回路．

David Bloom 注意到 S_k 从 S_{k-1} 通过加上或删去 $j+1$ 而得到，此处 2^j 是能除尽 k 的 2 的最高次幂．

A－4 在球面$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$上给出 n 个点，证明：它们之间的距离平方和不超过 n^2.

解 这 n 个点可以用具有 $|\boldsymbol{v}_i|=1$ 的向量 $\boldsymbol{v}_i(i=1,\cdots,n)$ 来表示.在 $n=3$ 的情况展开"它们之间的距离平方和"给我们启示了下列的一般恒等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)=$$
$$(n-1)\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=$$
$$n\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i-\left(\begin{array}{l}\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i+\\ 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j\end{array}\right)=$$
$$n^2-\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\Big)\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i\Big)$$

于是结论推得，此外等号当且仅当 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{v}_i=0$ 时才成立.

A－5 设 V 是实系数的，对闭区间$[0,1]$上的所有 x 满足 $|P(x)|\leqslant 1$ 的一切二次多项式的集合，确定

$$\sup\{|P'(0)|\mid P\in V\}$$

此解答属于 W. G. Hammere.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是任意二次多项式，则 $f(0)=c$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$，和 $f(1)=a+b+c$，$f'(0)=b=4f(\frac{1}{2})-3f(0)-f(1)$.应用给定的条件

$$|p'(0)|\leqslant 4\left|p\left(\frac{1}{2}\right)\right|+3|p(0)|+|p(1)|\leqslant 8$$

而且
$$p(x)=8x^2-8x+1$$
满足给定的条件且有 $|p'(0)|=8$.

A－6 确定具有 $a_i=\pm 1(0\leqslant i\leqslant n,1\leqslant n<+\infty)$ 的形为 $\sum\limits_0^n a_ix^{n-i}$ 的所有多项式，使得每个这样的多项式只有实零点.

解 具有 $a_0=-1$ 的所需的多项式是具有 $a_0=1$ 的那些多项式的负多项式，因此只须考虑 $a_0=1$ 的多项式.$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 零点的平方和是 $a_1^2-2a_2$，这些零点的平方的乘

积是 a_n^2. 如果所有的零点是实的,我们应用算术几何平均值不等式得

$$\frac{a_1^2-2a_2}{n} \geqslant (a_n^2)^{\frac{1}{n}}$$

而且等号仅当零点数值相等时才成立. 在我们的情形此不等式成为$(1 \pm 2)/n \geqslant 3$. 注意 $n \leqslant 3$,注意 $n > 1$ 蕴含 $a_2 = -1$,和 $n = 3$ 蕴含所有零点都是 ± 1. 于是多项式的一览表是

$$\pm(x-1),\ \pm(x+1),\ \pm(x^2+x-1)$$
$$\pm(x^2-x-1),\ \pm(x^3+x^2-x-1)$$
$$\pm(x^3-x^2-x+1)$$

B-1 芝加哥和底特律的温度分别是 $x°$ 和 $y°$,这些温度假定不是独立的,即我们给出

(1) $P(x° = 70°)$,芝加哥温度是 70° 的概率;

(2) $P(y° = 70°)$,和

(3) $P(\max(x°, y°) = 70°)$.

确定 $P(\min(x°, y°) = 70°)$.

在这一问题中有许多方法可以应用,但不是所有的方法都是有效的. 许多学生对 $P(\min(x°, y°) = 70°)$ 有正确的公式,但在他们的推导中假定 x 和 y 是独立的. 对于这种情形所得正确公式只获得较少的荣誉.

解 四个事件 $x° = 70°$, $y° = 70°$, $\max(x°, y°) = 70°$, $\min(x°, y°) = 70°$ 分别用 A, B, C, D 表示,则 $A \cup B = C \cup D$ 并且 $A \cap B = C \cap D$. 因此

$$\begin{aligned} P(A)+P(B) &= P(A\cup B)+P(A\cap B) = \\ & P(C\cup D)+P(C\cap D) = \\ & P(C)+P(D) \end{aligned}$$

并且 $$P(\min(x°, y°) = 70°) = P(x° = 70°) + P(y° = 70°) - P(\max(x°, y°) = 70°)$$

B-2 A 是一个有限群 G 的子集(具有群的称为乘法的运算),而且 A 包含 G 的一大半元素. 证明: G 的每个元素是 A 的两个元素的乘积.

解法 1 设 g 是 G 的任何一个元素,则集合 $\{ga^{-1} \mid a \in A\}$ 有与 A 相同个数的元素. 如果这两个集合是不相交的,则它们的并集将包含比 G 更多的元素. 于是存在 $a_1, a_2 \in A$ 使得 $a_1 = ga_2^{-1}$,因此 $g = a_1a_2$.

解法 2 设 G 有 n 个元素,A 有 m 个元素,而且考虑 G 的乘法表. G 中的元素 g 必定在乘法表的每行每列中恰好出现一次. 它在 A 的表外最多出现 $2(n-m)$ 次,在 G 的表内出现 n 次. 因此它在

A 的表内最少出现 $n-2(n-m)=2m-n$ 次,又我们已知 $2m>n$,所以 G 的每个元素必在 A 的乘法表中出现.

B-3 假定 $60°$ 的角不能单用直尺和圆规三等分.证明:如果 n 是 3 的正倍数,则 $360°/n$ 的角中没有一个能单用直尺和圆规三等分.

解 我们需要应用关于域和作图可能性的下列事实:

(1) 如果 $\mathbf{Q}$ 是有理数域,则 $\mathbf{Q}$ 的通过 $\cos(360°/k)$ 的扩展度是 $\phi(k)$,此处 k 是正整数,而 $\phi(k)$ 是 Euler 函数.

(2) 如果 K,L,M 是具有 $K\subset L\subset M$ 的域而且 $[L:K]<\infty$, $[M:L]<\infty$,则 $[M:K]=[M:L]\cdot[L:K]$.

(3) 给定 $\cos(360°/k)$,则 $\cos(360°/3k)$ 是可作图的当且仅当

$$\left[Q\left(\cos\frac{360°}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360°}{k}\right)\right]$$

是 2 的乘幂.因此

$$\left[Q\left(\cos\frac{360°}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360°}{k}\right)\right]\cdot\phi(k)=\phi(3k)$$

现在

$$\phi(3^{\alpha})=3^{\alpha-1}\cdot 2=\begin{cases}3\phi(3^{\alpha-1}),\text{当 }\alpha>1\text{ 时}\\2,\text{当 }\alpha=1\text{ 时}\end{cases}$$

且由 Euler 函数乘法性质知

$$\phi(3k)=\begin{cases}3\phi(k),\text{当 }3\mid k\text{ 时}\\2\phi(k),\text{当 }3\nmid k\text{ 时}\end{cases}$$

因此 $360°/k$ 大小的角能三等分当且仅当 $3\nmid k$.

一个普遍的错误方法如下:"如果 $360°/3k$ 能三等分,则我们能够构造 $40°/k$,重复此角 k 次得到 $40°$,再从 $60°$ 中减去它得到 $20°$.但是 $60°$ 的角是不能三等分的,因此 $20°$ 不能作出."这一议论的错误在于人们给出了试图三等分的角 $360°/3k$,而且借助于此可加的图形,$60°$ 或许可以三等分(例如 $k=6$ 的情形).

B-4 证明:如果 f 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的实值连续函数,而且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

解 $y=x-1/x$ 的图形启示我们把积分分裂成形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-1/x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1}f(x-1/x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to0^-}\int_{-1}^{b}f(x-1/x)\mathrm{d}x+\lim_{c\to0^+}\int_{c}^{1}f(x-1/x)\mathrm{d}x+\lim_{d\to+\infty}\int_{1}^{d}f(x-1/x)\mathrm{d}x$$

在前面两个积分中,作变量代换 $x = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 + 4})$;在后面两个积分中,作变量代换 $x = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4})$.因为这两个 y 的函数在所包含的区间中都有连续的一阶导数,因此变量代换是有效的.经过变换后,我们有四个广义积分.这些积分中每一个的收敛性由狄利克雷判别法的推论所建立(R.C.Buck,McGraw Hill.高等微积分.143 页).于是通过把被积函数相加允许把这些广义积分中的第一个和第三个重新写成一个积分,因为它们有相同的从 $-\infty$ 到0的积分限.其结果是$\int_{-\infty}^{0} f(y)\mathrm{d}y$.类似地另外两个积分联合起来给出$\int_{0}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$.在此联合中,有一包含 $y/\sqrt{y^2 + 4}$ 的项的相消,因为它一次出现正号,一次出现负号.我们已经证明了$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - 1/x)\mathrm{d}x$ 的收敛性和所需要的等式.

B-5 设 p 是素数,又设 J 是所有 2×2 阶矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的集合,这些矩阵的元素我们选自$\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,而且满足条件 $a + d \equiv 1 \pmod p$,$ad - bc \equiv 0 \pmod p$.确定 J 有多少个元素.

解 如果 $a = 0$,则 $d = 1$,又如果 $a = 1$ 则 $d = 0$.不论何种情形 $bc \equiv 0$,因此 b 或c 为零,另一个任意.对 $bc = 0$ 有 $2p - 1$ 种不同的解,因此在 $a = 0$ 或 $a = 1$ 的情形,解的总数是 $4p - 2$ 种.如果 $a \neq 0$ 或 1,则 d 唯一地被确定,而且因为 mod p 的整数形成一个域,$bc \equiv ad \not\equiv 0 \pmod p$ 蕴含对每个 $b \neq 0$,存在唯一的 c.因此在这种情形,对每个 a 有 $p - 1$ 种解.解的总数是

$$4p - 2 + (p - 2)(p - 1) = p^2 + p$$

B-6 一个实数集称为紧的,如果它是闭且有界的.证明:不存在一个有理数的紧集序列$\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$,使得有理数的每个紧集至少包含在一个 K_n 中.

解 设$\{K_n\}$是有理数紧集的任何序列,对于每个 n,存在一个有理数 $r_n \notin K_n$,且$0 \leqslant r_n < 1/n$.否则,K_n 将包含$[0,1/n]$中的一切有理数,因此包含了某些无理数(因为 K_n 是闭的).令 $S = \{0, r_1, r_2, \cdots\}$,则 S 是紧的而且不包含在任何 K_n 中.

第 30 届美国大学生数学竞赛

A－1 设 $f(x,y)$ 是定义在整个 $x-y$ 平面上的实变数 x 和 y 的具有实系数的多项式，对于 $f(x,y)$ 的值域的可能性是什么？

解 $f(x,y)$ 的连续性蕴含值域是连通的（即若 a,b 在值域中，且 $a<c<b$，则 c 也在值域中）. 如果值域是上、下有界的，则多项式 $f(x,kx)$ 对于每个 k 值是常数，因此 $f(x,y)$ 是常数 $f(0,0)$. 于是仅有的可能性是(1) 一个点；(2) 具有端点的半无限区间；(3) 无端点的半无限区间；和(4) 所有的实数.

关于(1)，(2) 和(4) 的例子容易给出. 关于(3) 的例子较难找. 一种方式是使曲面的每个截口（对固定的 y）是具有极小值的抛物线，当 y 趋向 $\pm\infty$ 时，此极小值递减渐近趋向于某一常数. 一个适当的例子为 $(xy-1)^2+x^2$.

当试卷付印时，发现(3) 是不可能的. 所用的结论是错误的. 此额外的复杂性是很少高分的基本理由.

A－2 设 D_n 是 n 阶行列式，它在第 i 行第 j 列的元素是 i 和 j 的差的绝对值. 证明：D_n 等于

$$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

解法 1 从其它的各列，减去第一列，然后将第一行加到另外的各行上. 现在最后一行除在第一列中的为 $(n-1)$ 外其余皆为零. D_n 是从变换后的行列式中划去第一列和最后一行的子式的 $(-1)^{n-1}(n-1)$ 倍. 此子式在主对角线以下仅有零，因此它等于主对角线元素的乘积. 所以此子式有值 2^{n-2}，因此

$$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

解法 2 从 D_{n+1} 的最底下一行减去 $1/(n-1)$ 倍的第一行和 $n/(n-1)$ 倍的第 n 行. 如此，对于 $n>1$ 证明了 $D_{n+1}=-(2n/(n-1))D_n$. 结论容易通过迭代并注意到 $D_2=-1$ 而得到.

A－3　设 P 是具有 n 条边的不自交的封闭的多边形.设它的顶点是 $P_1,P_2,\cdots,P_n$.又设在 P 的内部给出另外的 m 个点 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$.再设此图形是可三角剖分的,这意味着 $(n+m)$ 个点 $P_1,\cdots,Q_m$ 的某些点对被直线段联结,使得

(1) 所得的图形仅仅由三角形的集合 T 组成;

(2) 如果在 T 中的两个不同的三角形有一个以上的公共顶点则它们刚好有一条公共边;

(3) 在 T 中三角形顶点的集合刚好是 $(n+m)$ 个点 $P_1,\cdots,Q_m$.问在 T 中有多少个三角形?

解法1　设 t 是三角形的数目,则一切角的和是 πt(因为每个三角形的内角和是 π),而且它也是 $2\pi m+(n-2)\pi$.

在问题中所述的是在多边形内部可三角形剖分.如果加上的直线段在多边形的外部,则答案是不同的.

解法2　设 t 是三角形的数目.在欧拉公式 $V-E+F=2$ 中,$F=t+1$,和 $V=n+m$.因为每一边在两个面上,$2E=3t+n$.代入直接导致答案 $t=2m+n-2$.

A－4　证明

$$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}$$

(被积函数在 $x=0$ 点取值为1).

解　一个合理的获得级数的方法(不是用黎曼和,它明显地做不出来)是把被积函数写成e的幂并利用e的级数展开,则一致收敛能用来交换积分与求和的次序,而且证明了

$$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m(\ln x)^m\mathrm{d}x$$

设

$$F(m,k)=\int_0^1 x^m(\ln x)^k\mathrm{d}x$$

如果将分部积分应用到求和中的典型项,则说明我们为什么有兴趣于 $F(m,k)$ 以及证明了以 $m\geqslant 0$ 和 $k\geqslant 1$ 有

$$F(m,k)=-k/(m+1)F(m,k-1)$$

作为一个结果

$$F(m,m)=(-1)^m m!(m+1)^{-m}F(m,0)=(-1)^m m!(m+1)^{-m-1}$$

为了得到问题中给定的公式,用 n 代替 $m+1$ 并相应地调整求和中的界限.

A－5 设在微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-2y+u(t),\frac{dy}{dt}=-2x+u(t)$$

中的 $u(t)$ 是连续函数.证明:不管 $u(t)$ 的选择如何,方程组在 $t=0$ 时满足 $x=x_0,y=y_0$ 的解将永远不通过(0,0),除非 $x_0=y_0$.当 $x_0=y_0$ 时,证明:对任何 t 的正值 t_0,皆可选取 $u(t)$,使得当 $t=t_0$ 时解在(0,0).

解 二方程相减消去 $u(t)$ 而且提供了最简单的方程

$$d(x-y)/dt=2(x-y)$$

它有解

$$x-y=(x_0-y_0)e^{2t}$$

如果 $x_0\neq y_0$,右端永远不等于零,因此 $x=y=0$ 永远不可能发生.

对于第二部分,$x_0=y_0$.在此情形 $x(t)=y(t)$,因此每个解都是直线 $x=y$ 的参数式.我们可以试图得到形式 $x=x_0-at$,$y=y_0-at$ 的解.如果 $u(t)=2(x_0-at)-a$,则它将是一个解.通过取 $a=x_0/t_0$,则在 $t=t_0$ 时 $x=y=0$.

A－6 设序列 $\{x_n\}$ 是给定的,且设 $y_n=x_{n-1}+2x_n,n=2,3,4,\cdots$,假定序列 $\{y_n\}$ 收敛.证明:序列 $\{x_n\}$ 也收敛.

解 设 $\overline{y}=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 并且令 $\overline{x}=\overline{y}/3$.我们将证明 $\overline{x}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.对于任何 $\varepsilon>0$,存在 N,使得对于一切 $n>N$

$$|y_n-\overline{y}|<\varepsilon/2$$

$$\varepsilon/2>|y_n-\overline{y}|=|x_{n-1}+2x_n-3\overline{x}|=$$
$$|2(x_n-\overline{x})+(x_{n-1}-\overline{x})|\geqslant$$
$$2|x_n-\overline{x}|-|x_{n-1}-\overline{x}|$$

此式可改写为 $|x_n-\overline{x}|<\varepsilon/4+\frac{1}{2}|x_{n-1}-\overline{x}|$

它可用来迭代,从而给出

$$|X_{n+m}-\overline{x}|<\varepsilon/4(\sum_{i=0}^{m}2^{-i})+2^{-(m+1)}|X_{n-1}-\overline{x}|<$$
$$\varepsilon/2+2^{-(m+1)}|x_{n-1}-\overline{x}|$$

取 m 充分大使 $2^{-(m+1)}|x_{n-1}-\overline{x}|<\varepsilon/2$

于是对于一切充分大的 k,$|x_k-\overline{x}|<\varepsilon$.

B－1　设 n 是正整数使得 $n+1$ 能被 24 除尽. 证明：n 的所有因子的和能被 24 除尽.

解　条件 $24 \mid n+1$ 等价于 $n \equiv -1 \pmod 3$ 和 $n \equiv -1 \pmod 8$. 设 d 是 n 的因子，则 $d \equiv 1$ 或 $2 \pmod 3$ 和 $d \equiv 1,3,5$ 或 $7 \pmod 8$. 因为 $d(n/d) = n \equiv -1 \pmod 3$ 或 $(\bmod 8)$. 仅有的可能性是

$$d \equiv 1, n/d \equiv 2 \pmod 3) \text{ 或相反}$$
$$d \equiv 1, n/d \equiv 7 \pmod 8 \text{ 或相反}$$
$$d \equiv 3, n/d \equiv 5 \pmod 8 \text{ 或相反}$$

在每一种情形，$d + n/d \equiv 0 \pmod 3$ 和 $(\bmod 8)$. 因此 $d + n/d$ 是 24 的倍数. 注意 $d \neq n/d^{*}$，因此在每一配对中没有一个因子是用过两次的，因此所有因子的和是 24 的倍数.

B－2　证明：有限群不能是它的两个真子群的并集. 如果"两"代之以"三"，所述结论是否保留为真？

解法 1　在子群中元素的数目是群的阶数的因子. 因此真子群含元素的个数不能超过所有元素的半数. 两个子群有共同的恒等元，因此它们的并集不能是整个群.

作为问题第二部分的一个例子是 Klein 群，它有恒等元和二阶的三个元素 x,y,z. 来自 $\{x,y,z\}$ 的任何两个不同元素的乘积是第三个元素. 此群是三个真子群的并集.

解法 2　设 $G = H \cup K$，其中 H 和 K 的真子群. 存在 $k \in K$ 且 $k \notin H$. 在 kH 中的元素没有一个是在 H 中，因此 $kH \subset K$，所以 $H \subset k^{-1}K = K$ 而且 $K = H \cup K = G$，矛盾.

B－3　序列 T_n 的项满足

$$T_nT_{n+1} = n\ (n = 1,2,3,\cdots), \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{T_{n+1}} = 1$$

证明：$\pi T_1^2 = 2$.

解　第一个关系推出

$$T_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3}{(n-2)(n-4)\cdots 2} \cdot \frac{1}{T_1}，\text{当 } n \text{ 是偶数时}$$

$$T_n=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{(n-2)(n-4)\cdots 1}\cdot T_1,当 n 是奇数时$$

如果 n 是奇数

$$\frac{T_n}{T_{n+1}}=(T_1)^2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)}{(n-2)}\cdot\frac{(n-1)}{n}$$

Wallis 乘积是 $\pi/2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots$.经过偶数个因子，部分积小于 $\pi/2$,经过奇数个因子,部分积大于 $\pi/2$.于是对于 n 是奇数的情形,$T_n/T_{n+1}<\frac{1}{2}\pi T_1^2$.类似的计算证明:当 n 是偶数时,$T_n/T_{n+1}<2/\pi T_1^2$.因为 T_n/T_{n+1} 的极限等于1,1小于或等于$\frac{1}{2}\pi T_1^2$ 和它的倒数.这就推出 $\pi T_1^2=2$.

B－4　证明:单位长的任何曲线能够被面积为1/4的闭矩形所覆盖.

解　放置曲线使它的两个端点皆位于 x 轴上.然后取各边平行于坐标轴且覆盖曲线的最小矩形.设它的水平与垂直的尺寸分别是 a 和 b.设 P_0 和 P_5 是曲线的端点.又设 P_1,P_2,P_3 和 P_4 是曲线上的点,它们按命名的次序分别位于矩形的四条边上.画折线 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$,此折线的长度最多为1.这折线的各线段的水平分量加起来至少为 a,因为折线的顶点之一位于矩形的左端,另一位于矩形的右端.垂直线段加在一起至少是 $2b$,因此我们从 x 轴开始而且在 x 轴结束,既经过顶边也到达底边.由此推出折线总长度至少是 $(a^2+4b^2)^{\frac{1}{2}}$.

我们现在有 a 和 b 两者皆位于0与1之间而 $a^2+4b^2\leqslant 1$.在这些条件下,乘积 ab 当 $a=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,$b=\frac{1}{4}\sqrt{2}$ 时取极大值,因此 ab 的极大值是$\frac{1}{4}$.于是我们构造的矩形的面积最多是$\frac{1}{4}$.

B－5　设 $a_1<a_2<a_3<\cdots$ 是正整数的增加序列,设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}1/a_n$$

收敛.对任何数 x,设 $k(x)$ 是其值不超过 x 的 a_n 的数目.证明:$\lim\limits_{x\to\infty}k(x)/x=0$.

解　下面的证明表明规定 a_n 是整数不是必要的.假定对某

些 $\varepsilon > 0$,存在 $x_j \to \infty$ 且 $k(x_j)/x_j \geqslant \varepsilon$.注意:如果 $1 \leqslant n \leqslant k(x_j)$,则(因 a_n 增加)$a_n \leqslant a_k(x_j) \leqslant x_j$ 和 $1/a_n \geqslant 1x_j$.现在对于任何正整数 N

$$\sum_{n=N}^{\infty} 1/a_n \geqslant \sup_j \sum_{n=N}^{k(x_j)} 1/a_n \geqslant \sup_j \frac{k(x_j) - N}{x_j} \geqslant$$
$$\sup j(\varepsilon - N/x_j) = \varepsilon$$

但这与 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 的收敛性矛盾,此矛盾推出

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} 1/a_n = 0$$

上述解答在学生解答基础上由评分的人作出.

B-6 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 3×2 和 2×3 阶矩阵.假定在 $\boldsymbol{AB}$ 的次序下它们的乘积由

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

给定.证明:乘积 $\boldsymbol{BA}$ 由

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

给定.

解法 1 注意 $\boldsymbol{ABAB} = 9\boldsymbol{AB}$.$\boldsymbol{AB}$ 的秩为 2,因此 $\boldsymbol{A}$ 是到上的而 $\boldsymbol{B}$ 是一对一的.因此存在矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 使得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{BB}'$,此处 $\boldsymbol{I}$ 是 2×2 阶的恒等矩阵,则 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{ABAB})\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{BA} = 9\boldsymbol{I}$.

解法 2 $(\boldsymbol{AB})^2 = 9\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$ 的秩大于或等于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}$ 的秩,而后者的秩为 2.于是 $\boldsymbol{BA}$ 是非奇异的.但 $(\boldsymbol{BA})^3 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}(9\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A} = 9(\boldsymbol{BA})^2$,由此得出所需要的结论,因为 $\boldsymbol{BA}$ 有它的逆.

第31届美国大学生数学竞赛

A－1 证明:对于函数

$$e^{ax}\cos bx \quad ,a>0,b>0$$

的幂级数关于 x 的乘幂或者没有零系数,或者有无限多个零系数.

解 注意 $e^{ax}\cos bx$ 是 $e^{(a+ib)x}$ 的实数.于是幂级数是

$$e^{ax}\cos bx=\sum_{n=0}\text{Re}\{(a+ib)^n\}\frac{x^n}{n!}$$

在此形式中,容易看出:如果 x^n 有零系数,则 x^{kn} 对每个奇数 k 皆有零系数.

A－2 研究由实多项式方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx^3+Ex^2y+Fxy^2+Gy^3=0$$

所给定的轨迹,此处 $B^2-4AC<0$.证明:存在正数 δ 使得在有孔的圆盘

$$0<x^2+y^2<\delta^2$$

内不存在轨迹上的点.

解法1 设 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta),r>0$,是轨迹上的点,则

$$r=\frac{|A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta|}{|D\cos^2\theta+E\cos^2\theta\sin\theta+F\cos\theta\sin^2\theta+G\sin^3\theta|} \quad ①$$

① 的分母小于或等于 $|D|+|E|+|F|+|G|$,而分子有正的最小值

$$N=\frac{|A+C|-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}$$

因为 $B^2<4AC$,因此

$$r\geqslant\frac{N}{|D|+|E|+|F|+|G|}=\delta$$

而且在 $0<r<\delta$ 内没有轨迹上的点.

解法2 令 $H(x,y)$ 等于所给方程左端的多项式.关于两个变量函数的极大或极小的标准理论可以与条件 $B^2 < 4AC$ 一起使用来证明 $H(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有局部极大值或局部极小值.

A－3 求由相同的非零数字组成的,能够作为一个整数平方的结尾的(十进制)最长序列的长度,并求用此序列结尾的最小平方数.

解 如果 x 是整数,则 $x^2 \equiv 0,1,4,6,9 \pmod{10}$.情形 $x^2 \equiv 0 \pmod{10}$ 由问题的叙述应除去.如果 $x^2 \equiv 11,55$ 或 $99 \pmod{100}$ 则 $x^2 \equiv 3 \pmod 4$,这是不可能的.类似地 $x^2 \equiv 66 \pmod{100}$ 蕴含 $x^2 \equiv 2 \pmod 4$,它也是不可能的.因此 $x^2 \equiv 44 \pmod{100}$.如果 $x^2 \equiv 4\ 444 \pmod{10\ 000}$,则 $x^2 \equiv 12 \pmod{16}$,但简单的检验表明这是不可能的.最后注意 $38^2 = 1\ 444$.

A－4 给定序列 $\{x_n\}$,$n = 1,2,\cdots$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n - x_{n-2}\} = 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

解 对于 $\varepsilon > 0$,设 N 充分大使得对于一切 $n \geqslant N$ 皆有 $|x_n - x_{n-2}| < \varepsilon$.注意对于任意 $n > N$

$$x_n - x_{n-1} = (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (X_{n-2} - x_{n-4}) - \cdots \pm (X_{N+1} - X_{N-1}) \mp (X_N - X_{N-1})$$

因此

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant (n-N)\varepsilon + |x_N - x_{N-1}|$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/n = 0$$

A－5 确定能够位于椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ,a > b > c$$

上的最大圆的半径.

解 因为椭球体的平行截口总是相似的椭圆,任何圆截口通过取经过中心的平行切割平面能增加尺寸,经过 $(0,0,0)$ 的每个作出圆截口的平面必与 yz 平面相交.但这意味着圆截口的直径必定是椭圆 $x = 0, y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ 的直径.因此,圆的半径至多是 b.对 xy 平面应用同样的理由证明圆的半径至少是 b,因此,任何

由经过(0,0,0)的平面所形成的圆截口必有半径 b,而且这将是所需要的最大半径.为了证明半径为 b 的圆截口实际存在,考虑通过 y 轴的所有平面,可以检验由 $a^2(b^2-c^2)z^2=c^2(a^2-b^2)x^2$ 给定的两个平面给出了半径为 b 的圆截口.

A-6 三个数中的每一个独立地随机地选自三个区间 $[0,L_i](i=1,2,3)$ 中的某一个.如果每个随机数的分布关于它所选的区间的长度是均匀的,确定三个被选择的数的最小期望值.

第一个解答由 Robert Oliver 提供,另一解答由 Jockum Aniansson 提供.

解法1 设 x 选自 $[0,L_1]$,y 选自 $[0,L_2]$,z 选自 $[0,L_3]$ 而且假定 $L_3\geqslant L_2\geqslant L_1$,设 $X=\min(x,y,z)$.

$$L_1L_2L_3E[X]=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\int_0^{L_3}X\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left(\int_0^{\mu}z\mathrm{d}z+\int_{\mu}^{L_3}\mu\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x(\text{此处 }\mu=\min(x,y))=$$
$$\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}(L_3\mu-\frac{1}{2}\mu^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^{L_1}\left(\int_0^{x}(L_3y-\frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}y+\right.$$
$$\left.\int_x^{L_2}(L_3x-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\cdots=$$
$$\frac{1}{2}L_1^2L_2L_3-\frac{1}{6}L_1^3(L_2+L_3)+\frac{1}{12}L_1^4$$
(此处 $\mu=\min(x,y)$)

解法2 对于 $0\leqslant a\leqslant L$

$$P(X\leqslant a)=P(x\leqslant a)+P(y\leqslant a)+P(z\leqslant a)-$$
$$P(x\leqslant a)P(y\leqslant a)-P(x\leqslant a)P(z\leqslant a)-$$
$$P(y\leqslant a)P(z\leqslant a)+$$
$$P(x\leqslant a)P(y\leqslant a)P(z\leqslant a)=$$
$$\frac{a}{L_1}+\frac{a}{L_2}+\frac{a}{L_3}-\left(\frac{a^2}{L_1L_2}+\frac{a^2}{L_2L_3}+\frac{a^2}{L_3L_1}\right)+\frac{a^3}{L_1L_2L_3}$$

答案容易从公式

$$E[X]=\int_0^{L_1}a\frac{\mathrm{d}P(X\leqslant a)}{\mathrm{d}a}\mathrm{d}a$$

得到.

B－1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}$$

解 设

$$a_n=\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}$$

则
$$\ln a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})$$

而且
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=2\ln 5-4+2\arctan 2$$

B－2 某一物体随时间变化的温度由时间的最多为三次的多项式所给定.证明:此物体在上午 9 时与下午 3 时之间的平均温度常能通过取两个固定时刻的平均值而求得,且此两个固定时刻与所出现的多项式无关.其次证明这两个近似到分的时刻是上午 10 点 16 分和下午 1 点 44 分.

解 设 $P(t)=at^3+bt^2+ct+d$,方程

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(P(t_1)+P(t_2))$$

对所有 a,b,c 和 d 被满足当且仅当 $t_2=-t_1=\pm T/\sqrt{3}$.如果 $T=3$ 小时,则 $T/\sqrt{3}\approx 1$ 小时 43.92 分.因此,在所考察的情形,临界时间为中午前后各 1 小时 44 分.

B－3 一个在 $a<x<b$ 中的 $\mathbf{R}^2$ 的闭子集 S,证明:它在 y 轴上的投影是闭的.

解 设 $y_n\to y$,这里,对所有 n,$(x_n,y_n)\in S$.波尔查诺－魏尔斯特拉斯定理推出子序列 $X_{k(n)}\to x$,则 $Y_{k(n)}\to y$,而且因为 S 是闭的,所以$(x,y)\in S$.于是 y 在 S 在 y 轴上的投影中.

B－4 一辆汽车从静止开始到静止结束,沿着直道在 1 min 内走过 1 英里(1 英里 ＝ 1.609 3 km)的距离.如果管理人员禁止车速超过每小时 90 英里,证明:在运行的某一时刻车的加速度或减速度至少是 6.6/ 英尺秒^2(1 英尺 ＝ 0.304 8 m).

解 变换单位到尺和秒,对于所有 $t\in[0,60]$,我们有 $0\leqslant v(t)\leqslant 132$.假定对所有 $t\in[0,60]$ 有 $|v'(t)|<6.6$,则 $v(t)=\int_0^t v'<6.6t$,而且对所有 $t\in[0,60]$, $v(t)=\int_t^{60}-v'<6.6(60-t)$.因此

$$5\ 280=\int_0^{60}v(t)\mathrm{d}(t)<\int_0^{60}\min\{6.6t,6.6(60-t),132\}\mathrm{d}t$$

此最后的积分是梯形下的面积且等于 5 280,这是一个矛盾.

个别的学生作了暗中的假定:对于 $v(t)$ 的最佳的图形是上文提到的梯形,但没有给出明确的证明.

B - 5 设 u_n 表示"倾斜"函数

$$u_n(x)=\begin{cases}-n & ,x\leqslant -n\\ x & ,-n<x\leqslant n\\ n & ,x>n\end{cases}$$

又设 F 表示实变数的实函数. 证明:F 是连续的当且仅当 $u_n\circ F$ 对所有的 n 是连续的(注意:$(u_n\circ F)(x)=u_n[F(x)]$).

解 显然 u_n 是连续的.因此,如果 F 是连续的,则 $u_n\circ F$ 是连续函数的复合函数,所以也是连续的.反之,假定 $u_n\circ F$ 对所有 n 皆连续. 为了证明 F 是连续的,只要证明对每个有界区间 (a,b), $F^{-1}((a,b))$ 是开的就足够了.设 $n>\max(|a|,|b|)$,则 $u_n^{-1}((a,b))=(a,b)$,因此

$$F^{-1}((a,b))=F^{-1}(u_n^{-1}((a,b)))=(u_n\circ F)^{-1}((a,b))$$

由于 $u_n\circ F$ 的连续性,它是一个开集.

B - 6 一个可以内接于圆的四边形称为可内接的或可圆化的.一个可以外切于圆的四边形称为可外切的.证明:如果一个边为 a,b,c,d 的可外切的四边形有面积 $A=\sqrt{abcd}$,则它也是可内接的.

解 四为四边形是外切的,所以 $a+c=b+d$.设 k 是对角线长且选择角 α 和 β 使得

$$k^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$$

如果减去 $(a-b)^2=(c-d)^2$,我们得到

$$2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta) \quad ①$$

从

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta=\sqrt{abcd}$$

得

$$4A^2 = 4abcd = a^2b^2(1-\cos^2\alpha) + c^2d^2(1-\cos^2\beta) + 2abcd\sin\alpha\sin\beta$$

在右边应用 ① 两次

$$4abcd = ab(1+\cos\alpha)cd(1-\cos\beta) + cd(1+\cos\beta)ab(1-\cos\alpha) + 2abcd\sin\alpha\sin\beta$$

化简得

$$4 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

此式得出 $\alpha + \beta = \pi$，因此四边形是可圆化的.

第32届美国大学生数学竞赛

A－1 假设在三维欧氏空间中给出九个格点(具有整数坐标的点).证明:存在一个格点位于联结这些点的两点间的某一线段的内部.

解 根据坐标的类似性,即(奇,奇,奇)、(奇,奇,偶)等,格点的集合可以分成八类.九个格点中有两个(例如 P 和 Q)属于同一类.线段 PQ 的中点是一个格点.

A－2 确定满足 $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$ 和 $P(0)=0$ 的所有多项式.

解 $P(0)=0, P(1)=(P(0))^2+1=1, P(2)=(P(1))^2+1=2, P(5)=(P(2))^2+1=5, P(5^2+1)=(P(5))^2+1=26$ 等.于是多项式 $P(x)$ 与 x 相同的值的个数大于 $P(x)$ 的次数,因此 $P(x)\equiv x$.

A－3 边为 a,b,c 的三角形的三个顶点是格点且位于半径为 R 的圆上.证明:$abc\geqslant 2R$.(格点是欧氏空间中具有整数坐标的点)

解 对于边为 a,b,c,面积为 A 和外接圆半径为 R 的三角形我们有 $abc=4RA$.但若顶点是格点,则面积的行列式公式(Pick 定理或直接计算)表明 $2A$ 是整数.因此 $2A\geqslant 1$,所以 $abc\geqslant 2R$.为了得到公式 $abc=4RA$,注意:如果 α 是 a 边的对角,则 a 边所对中心角为 2α,而且 $a=2R\sin\alpha, A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

A－4 证明:对于 $0<\varepsilon<1$ 和充分大的整数 n,表示式 $(x+y)^n(x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2)$ 是具有正系数的多项式,对于 $\varepsilon=0.02$ 求出最小的允许值 n.

解 在$(x+y)^n(x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2)$的展开式中，$x^{k+1}y^{n+1-k}$的系数是

$$\binom{n}{k-1}-(2-\varepsilon)\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=$$
$$\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1}-(2-\varepsilon)\right)$$

现在对固定的n研究表示式

$$\phi(k)=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1}-(2-\varepsilon)$$

如果k取连续的正的变数

$$\phi'(k)=\frac{(n+1)((k+1)^2-(n-k+1)^2)}{(n-k+1)^2(k+1)^2}$$

因此在$k=n/2$时，$\phi'(k)=0$而且容易推得$\phi(k)$在$k=n/2$时取极小值. 我们不需要研究端点的最小值，因为容易推出对于$n>2$，多项式的最先两项和最后两项有正的系数. 我们还可以注意到，对于给定的奇数n，如果在展开式中的中间两项是非正的，则对于n的下一个较大的值，中间项仍然非正. 因此，如果中间系数变成正，则发生此种情形的第一个n是奇数. 现在如果n是奇数而且$k=\frac{1}{2}(n+1)$，则$\phi(k)=\frac{n-1}{n+3}-1+\varepsilon$，并且对于$n>\frac{4}{\varepsilon}-3$有$\phi(k)>0$. 如果$\varepsilon=0.002$，则$n>1\ 997$而且$n$是奇数. 因此使所有项为正的最小的$n$是1 999.

A－5 一种纸牌游戏玩法如下：每场比赛后，根据结果，参加游戏者或者接受a点或者接受b点(a和b是正整数且a大于b)，而且他们的点数一场一场累积起来. 注意到有35个不能到达的点数，这些数中的一个是58，求a和b.

解 可以达到的点数是那些可以表示为形如$xa+yb$的非负整数，其中x和y是非负整数. 如果a和b不互素则存在无限多个不能达到的点数，因此$(a,b)=1$. 下面将要证明不可达到的点数是$\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

如果m是可达到的点数，则直线$ax+by=m$至少通过闭的第一象限①中的格点. 因为a和b互素，所以在直线$ax+by=m$上的格点是在b的水平距离上②. $ax+by=m$的第一象限的线段有m/a的水平投影，因此每个$m\geqslant ab$的点数是可达到的. 每个不

① 意指包括横轴、纵轴的正半轴及原点在内.
② 意指相邻两格点的水平距离为b.

可达到的点数必定满足 $0 \leqslant m < ab$. 如果 $0 \leqslant m < ab$, 直线 $ax + by = m$ 的第一象限的线段有小于 b 的水平投影. 因此至多包含一个格点. 于是在第一象限中具有 $0 \leqslant ax + by < ab$ 的格点 (x, y) 与具有 $0 \leqslant m < ab$ 的可达到的点数之间存在一一对应. 闭矩形 $0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant a$ 包含 $(a+1)(b+1)$ 个格点. 因此在第一象限中具有 $0 \leqslant ax + by < ab$ 的格点数是 $\frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1$. 这是具有 $0 \leqslant m < ab$ 的可达到的点数的数目. 因此在此范围内(这是它们的全体)不可达到的点数的数目是

$$ab - \frac{1}{2}(a+1)(b+1) + 1 = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

在我们给定的例题中

$$70 = (a-1)(b-1) = 1(70) = 2(35) = 5(14) = 7(10)$$

条件 $a > b, (a, b) = 1$ 产生了两种可能性: $a = 71, b = 2$ 和 $a = 11, b = 8$. 因为 $58 = 71(0) + 2(29)$, 这两种可能中的第一种应除去. 直线 $11x + 8y = 58$ 经过 $(6, -1)$ 和 $(-2, 10)$, 因此不经过第一象限的格点. 唯一的解是 $a = 11, b = 8$.

A - 6　设 c 是使 n^c 对于每一个正整数 n 皆为整数的实数. 证明: c 是一个非负的整数.

解　$n = 2$ 的情形表明 c 是非负的. 如果把通常的中值定理应用到区间 $[u, u+1]$ 上的函数 x^c, 则存在满足 $u < \xi < u+1$ 的 ξ 使能 $c\xi^{c-1} = (u+1)^c - u^c$. 对于任何正整数 u, 右端是正整数. 现在, 在 $0 < c < 1$ 的情形, u 能取得足够大, 使得 $\xi^{c-1} < 1/c$, 因此 $c\xi^{c-1} < 1$. 于是一阶导数的中值定理排除了满足 $0 < c < 1$ 的一切 c 值.

有一个中值的扩张定理, 此定理说: 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是 k 次可微的, 则存在一个 $\xi(a < \xi < b)$, 使得 $h^k f^{(k)}(\xi) = \triangle^k f(a)$, 此处 $h = \frac{b-a}{k}$ 而且 $\triangle^k$ 是区间跨度为 h 的 k 阶差分. 取 k 作为满足 $k - 1 \leqslant c < k$ 的唯一的整数而且在区间 $[u, u+k]$ 上应用此中值的扩张定理, 存在满足 $u < \xi < u + k$ 的 ξ, 使得

$$c(c-1)(c-2)\cdots(c-k+1)\xi^{c-k} = \triangle^k f(u)$$

右端是整数, 而且通过取 u 足够大, ξ^{c-k} 变成足够小, 使左边虽然非负但小于 1. 因此 $c(c-1)(c-2)\cdots(c-k-1) = 0$, 因此 $c = k - 1$.

B－1 设 S 是一个集合，又设 $\circ$ 是在 S 上的二元运算，它满足两条规律：

$$x \circ x = x, \text{对 } S \text{ 中的一切 } x$$

$$(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x, \text{对 } S \text{ 中的一切 } x, y, z$$

证明：$\circ$ 是结合的与交换的.

解 利用给定的规律，我们有

$$\begin{aligned} x \circ y &= (x \circ y) \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ x) \circ y = \\ &((y \circ x) \circ x) \circ y = \\ &((x \circ x) \circ y) \circ y = (x \circ y) \circ y = (y \circ y) \circ x = y \circ x \end{aligned}$$

从这一交换律我们得到

$$(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x = x \circ (y \circ z)$$

B－2 设 $F(x)$ 是对除 $x = 0$ 和 $x = 1$ 外的所有实数皆有定义的且满足函数方程 $F(x) + F((x-1)/x) = 1 + x$ 的实值函数，求所有满足这些条件的函数 $F(x)$.

解 在给定的函数方程

$$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad ①$$

中，我们用 $\frac{x-1}{x}$ 代替 x，得到

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{2x-1}{x} \qquad ②$$

再在 ① 中，我们用 $\frac{-1}{x-1}$ 代替 x 得

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right) + F(x) = \frac{x-2}{x-1} \qquad ③$$

① 加 ③ 并减去 ② 给出

$$2F(x) = 1 + x + \frac{x-2}{x-1} - \frac{2x-1}{x} = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x(x-1)}$$

$$F(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)} \qquad ④$$

④ 式所定义的 $F(x)$ 满足给定的函数方程是容易检验的. 因此 ④ 是问题的唯一解.

B - 3 两辆汽车以相等的常数速度环绕着一条道路行驶，每辆车子在一个小时内走完一圈. 两辆车子从共同点出发，第一辆车子在时刻 $t = 0$ 出发，而第二辆车子在以后的任何时刻 $t = T > 0$ 出发. 证明：在运动中间存在精确到一小时的一段时间，在此时间内第一辆车子比第二辆车子多走完了一倍的圈子.

解 在时间 t 中，第一辆车子完成 $[t]$ 圈而第二辆车子完成 $[t - T]$ 圈，问题是求满足 $[t] = 2[t - T]$ 的值 $t \geqslant T$.

设 $T = k + \delta$，此处 $0 \leqslant \delta < 1$，k 为整数. 研究任何整数区间 $[m, m + 1]$ 且设 $m \leqslant t < m + 1$，则 $t = m + \varepsilon$，此处 $0 \leqslant \varepsilon < 1$. 因此要解的方程变为

$$[t] = m = 2[t - T] = 2[m + \varepsilon - (k + \delta)] = 2[m - k + \varepsilon - \delta]$$

于是若 $\varepsilon \geqslant \delta$ 则 $m = 2(m - k)$，又若 $\varepsilon < \delta$ 则 $m = 2(m - k - 1)$. 如果 $1 > \varepsilon \geqslant \delta$ 则 $m = 2k$ 而且方程在长度为 $1 - \delta$ 的区间 $[2k + \delta, 2k + 1]$ 中得到满足.

如果 $0 \leqslant \varepsilon < \delta$，则 $m = 2k + 2$ 而且方程在长度为 δ 的区间 $[2k + 2, 2k + 2 + \delta]$ 中得到满足，因此总的长度是 $1 - \delta + \delta = 1$.

如果“在运动中”代之以“在第二辆汽车出发后”，则问题应该更明显. 在此解释下，如果 $t < T$，则 $[t - T]$ 是负的，第二辆车子将完成零圈，解答仍被给出.

B - 4 在球面上满足条件 $\widehat{PA} + \widehat{PB} =$ 常数的所有点的集合定义为在给定的球面上具有焦点 A 和 B 的球面椭圆. 此地 $\widehat{PA}$ 表示在球面上 P 和 A 之间的最短距离. 确定是圆的实球面椭圆的整个类.

解 我们取球的半径为 1 单位，而且用 $2a$ 表示常数和 $\widehat{PA} + \widehat{PB}$. 为了避免平凡的与退化的情形，我们假定 $0 < \widehat{AB} < \pi$ 和 $\widehat{AB} < 2a < 2\pi - \widehat{AB}$.

$2a > \pi$ 的情形可化为 $2a < \pi$ 的情形. 因为如果 A' 和 B' 是与 A 和 B 径点相对的点，则 $\widehat{PA} + \widehat{PB} = 2a$ 当且仅当 $\widehat{PA'} + \widehat{PB'} = 2\pi - 2a$，也即球面椭圆 $\widehat{PA} + \widehat{PB} = 2a$ 和 $\widehat{PA'} + \widehat{PB'} = 2\pi - 2a$ 是相同的. 因为 $\min(2a, 2\pi - 2a) \leqslant \pi$，不失普遍性，我们可以假定 $2a \leqslant \pi$.

设 A 和 B 位于赤道上. 在赤道上有位于球面椭圆上的两点 V_1 和 V_2（顶点），显然 $\widehat{V_1V_2} = 2a$. 球面椭圆的“中心”（弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{V_1V_2}$ 的

共同中点）将用 C 表示.

我们首先处理 $2a<\pi$ 的情形，而且证明在此情形球面椭圆不能是圆.假定它是一个圆，并称它为 Γ（图 1）.Γ 必将关于赤道平面对称，于是位于垂直于赤道平面的平面上，Γ 也将通过顶点.因此它的球面直径将是 $\widehat{V_1V_2}=2a$，而且它的球面半径将等于 a.Γ 的球面中心将是椭圆的中心 C.设 M 是在 Γ 上位于两顶点中间的两点之一，则因为假定 M 是球面椭圆上的点，$2a=\widehat{MA}+\widehat{MB}>2\widehat{MC}=2a$（注意 MAC 是直角在点 C 的直角球面三角形，而且边 $\widehat{MC}=a<\frac{1}{2}\pi$）.矛盾证明了球面椭圆是圆的唯一可能必定在 $2a=\pi$ 时发生.

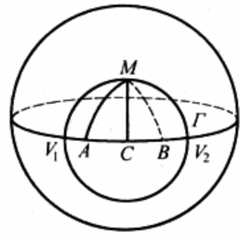


图 1

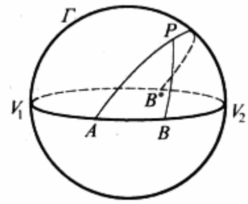


图 2

在 $2a=\pi$ 的情形，V_1 和 V_2 是在赤道上径点相对的点.我们将证明通过顶点且垂直于赤道平面的大圆 Γ 与球面椭圆 $\widehat{PA}+\widehat{PB}=\pi$ 一致.为了明白这一点，设 B^* 是 B 的关于 Γ 的平面的反射.B^* 在赤道上径点相对于 A（图 2）.设 P 是球面上的一个任意点，并且作通过 A,P 和 B^* 的大圆，则 $\widehat{PA}+\widehat{PB^*}=\pi$.因此 $\widehat{PA}+\widehat{PB}=\pi$ 当且仅当 $\widehat{PB}=\widehat{PB^*}$ 即当且仅当 P 在 Γ 上.这就证明了 Γ 是如上所说的球面椭圆 $\widehat{PA}+\widehat{PB}=\pi$.

于是在球面上唯一的是球面椭圆的圆是大圆.对于任意给定的大圆 Γ，焦点可以是位于垂直于 Γ 的同一个大圆上的任何两点 A 和 B，它们在 Γ 的同一侧而且与 Γ 的距离相等.任何这样的球面椭圆的方程是 $\widehat{PA}+\widehat{PB}=\pi$.

B－5　证明：微分方程组

$$x''+y'+6x=0,y''-x'+6y=0\left('=\mathrm{d}/\mathrm{d}t\right)$$

满足 $x'(0)=y'(0)=0$ 的所有解在 xy 平面上的图形都是内摆线，而且对每个这样的解求出固定圆半径和滚动圆半径的两个可能值.（内摆线是一个圆在给定的固定圆内滚动时，此圆的圆周上一固定点所描出的轨迹）

解　我们置 $z=x+\mathrm{i}y$，则两个微分方程可组合成一个，即

$$z''-\mathrm{i}z'+6z=0 \qquad ①$$

这是标准的具有常系数的二阶线性方程而且有通解

$$z(t)=c_1\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}+c_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$$

初始条件推出 $z'(0)=0$ 或 $3\mathrm{i}c_1-2\mathrm{i}c_2=0$.我们可以令 $c_1=2A$ 和 $c_2=3A$，此处 A 是任何复数.给定方程组的通解是

$$z(t)=2Ae^{3it}+3Ae^{-2it} \qquad ②$$

如果 $A=Re^{i\alpha}$，则通过角度为 α 的坐标轴旋转可得

$$Z(t)=2Re^{3it}+3Re^{-2it} \qquad ③$$

或用直角坐标的形式

$$X(t)=2R\cos(3t)+3R\cos(2t)$$
$$Y(t)=2R\sin(3t)-3R\sin(2t) \qquad ④$$

这是当滚动圆的半径为 $3R$ 而固定圆的半径为 $5R$ 的内摆线的标准形式.关于时间逆转，它变成滚动圆的半径为 $2R$ 而固定圆的半径为 $5R$ 的内摆线的标准方程.

B－6　设 $\delta(x)$ 是正整数 x 的最大的奇因子，证明：对一切正整数 x 有

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\delta(n)/n-2x/3\right|<1$$

解　令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}$$

注意：$\delta(2m+1)=2m+1$，$\delta(2m)=\delta(m)$ 和 $S(2x+1)=S(2x)+1$.对 $S(2x)$ 的求和分成指标的偶数值和奇数值产生下列关系

$$S(2x)=\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(x)+x$$

如果我们用 $F(x)$ 表示 $S(x)-\frac{2}{3}x$，上述关系转化为

$$F(2x)=\frac{1}{2}F(x)$$

而且
$$F(2x+1)=F(2x)+\frac{1}{3}$$

现在可以应用数学归纳法证明对于所有正整数 x 有 $0<F(x)<\frac{2}{3}$.这一结果比所要求的要精密得多.

第 33 届美国大学生数学竞赛

A－1　证明：不存在组成算术级数的四个连续的二项式系数 $\binom{n}{r},\binom{n}{r+1},\binom{n}{r+2},\binom{n}{r+3}$（$n,r$ 为大于零的整数，而且 $r+3\leqslant n$）.

解　对于给定的 n 和 r，为了使前三个二项式系数成为算术级数，我们必定有

$$2\binom{n}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+2} \quad ①$$

或等价地

$$2=\frac{r+1}{n-r}+\frac{n-r-1}{r+2} \quad ②$$

后三个给定的二项式系数成为算术级数的条件从 ① 中将 r 代以 $r+1$ 而求得. 因此如果四项成算术级数，则 r 和 $r+1$ 两者都满足方程 ②.

注意：如果在方程 ② 中 r 代之以 $n-r-2$，则它的两项互相交换. 于是二次方程 ② 有根

$$r,r+1;n-r-3,n-r-2$$

因为 ② 只能有两个根，因此 $r=n-r-3$，所以 $n=2r+3$. 四个二项式系数必定是

$$\binom{2r+3}{r},\binom{2r+3}{r+1},\binom{2r+3}{r+2},\binom{2r+3}{r+3}$$

它们是四个中间项，它们不可能是算术级数，因为二项式系数增加到中间项后减少.

A－2　设 S 是一个集合，而 $*$ 是在集合 S 上的满足规律

$$x*(x*y)=y\text{，对 } S \text{ 中的一切 } x,y$$

$$(y*x)*x=y\text{，对 } S \text{ 中的一切 } x,y$$

的二元运算. 证明：$*$ 是交换的但不必是结合的.

解法 1 给定的规律分别标志为(1)和(2).

i 我们首先证明

$$(x*y)*x=y \tag{3}$$

此结论来自 $(x*y)*x=(x*y)((x*y)*y)=y$.(首先应用(2)且交换 x 和 y;然后应用(1)且 x 代之以 $x*y$)

现在我们得到

$$y*x=((x*y)*x)*x=x*y \tag{4}$$

(首先应用(3),然后用 $x*y$ 代替 y 应用(2)),这证明了 $*$ 是交换的.

ii 设 S 是所有整数的集合.定义 $x*y=-x-y$,则

$$x*(y*z)=-x+y+z,(x*y)*z=x+y-z \tag{5}$$

从(5)首先推得(1)和(2)成立,其次推得 $*$ 不是结合的:仅需在(5)中任取 $x\neq z$.

解法 2 第一部分(由 Martin Davis 提供):

记方程 $x*y=z$ 为 $P(x,y,z)$,则规律(1)可以写成"如果 $x*y=z$,则 $x*z=y$"或

$$P(x,y,z)\text{ 蕴含 }P(x,z,y) \tag{6}$$

类似地,规律(2)可以写成

$$P(y,x,z)\text{ 蕴含 }P(z,x,y) \tag{7}$$

这两个蕴含关系(6)和(7)说明在 $P(x,y,z)$ 中变元的位置上置换(23)和(13)是允许的①.因为(13),(23)产生对称群 S_3,因此我们发现(12)也是允许的.

于是 $P(x,y,z)$ 蕴含 $P(y,x,z)$ 或 $x*y=z$ 蕴含 $y*x=z$,这意味着 $x*y=y*x$.

> A-3 如果对于一个序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 来说 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ 存在,则称此极限为这个序列的 C 极限.一个从[0,1]到实数的函数称为在区间[0,1]上的超连续函数.如果一旦序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 的 C 极限存在,则序列 $f(x_1),f(x_2),f(x_3),\cdots$ 的 C 极限也存在.求[0,1]上的所有超连续函数.

解 一个函数是超连续的当且仅当它是仿射变换 $f(x)=Ax+B$.充分性是平凡的(在评分中为1分).对于必要性:首先我们注意没有假定 $f(C-\text{limit})=C-\text{limit}(f)$(否则解答能大大地简化).本质的步骤在于证明:如果 f 是超连续的,则(1) f 是连续的

许多有趣的函数类提供作为此问题的解答,最普通的选择是一切有界函数类和连续函数类(正确的选择占到三分之一).Riemann 和 Lebegue 可积函数也被提及.

David Cohoon 教授曾提供下列问题:是否存在实直线上的拓扑,通过此拓扑连续函数类与超连续函数类重合?(此处函数是从 **R** 到 **R**

① (7)说明置换(13)被允许是在 $P(x,y,z)$ 中以 x 与 y 互换(即把规则(2):$(y*x)*x=y$ 改成 $(x*y)*y=x$)而得,即 $P(x,y,z)$ 蕴含 $P(z,y,x)$,故(13)被允许.

和(2)对一切 a,b 有 $f((a+b)/2)=(f(a)+f(b))/2$.这两点结论蕴含 f 是仿射的.(1)和(2)的证明是类似的,我们给出(2)(这是较难的).置 $c=(a+b)/2$,而且假定 $f(c)\neq(f(a)+f(b))/2$.想像"增长得很迅速"的整数 N_i 的任何序列,例如设 N_{i+1} 超过 2^iN^i,然后构造点的序列 $\{x_n\}$ 如下:把此序列裂分为区组,它们交替在

$$\{x_n\}=a,b,a,b,a,b,\cdots$$

和

$$\{x_n\}=c,c,c,c,c,c,\cdots$$

之间,ab 型对 $N_{2i-1}\leqslant n<N_{2i}$ 成立,而 c 型对 $N_{2i}\leqslant n<N_{2i+1}$ 成立,则 $\{x_n\}$ 有 C 极限 c,但 $\{f(x_n)\}$ 的平均值是摆动的(因为区组 $N_i\leqslant n<N_{i+1}$ 的长度增加很快,而且 $f(c)\neq f(a)$ 和 $f(b)$ 的平均值).于是 $\{f(x_n)\}$ 的 C 极限不存在,矛盾.

而且同样的拓扑置于作为象空间和定义域的 $\mathbf{R}$ 上)

A-4 在所有内切于正方形的椭圆中,证明:圆有最大的周长.

解 设边长为 $2R$ 的正方形有顶点 $(\pm R\sqrt{2},0)$ 和 $(0,\pm R\sqrt{2})$.具有条件 $0\leqslant b\leqslant a\leqslant R\sqrt{2}$ 的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

有直线 $x+y=R\sqrt{2}$ 作为切线当且仅当二次方程 $x^2/a^2+(R\sqrt{2}-x)^2/b^2=1$ 有重根.可以检验判别式等于零当且仅当 $a^2+b^2=2R^2$.当 a 从 R 变到 $R\sqrt{2}$ 和 b 从 R 变到 0 时,曲线①从半径为 R 的圆经过所有的内切于正方形的非圆形的椭圆变到退化的位于 x 轴上的扁平的椭圆.

设 $4L$ 表示椭圆 $x=a\cos t,y=b\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长,则

$$L=\int_0^{\pi/2}(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{1/2}\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}a^2(1-\cos 2t)+\frac{1}{2}b^2(1+\cos 2t)\right)^{1/2}\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\pi/2}\left(R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t\right)^{1/2}\mathrm{d}t$$

此处 $c^2=a^2-b^2$.最后的积分我们裂分成两个:一个从 0 到 $\pi/4$,而另一个从 $\pi/4$ 到 $\pi/2$.对后面的积分我们作变量代换 $t=\pi/2-t'$,得

$$L=\int_0^{\pi/4}\left(\left(R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t\right)^{1/2}+\left(R^2+\frac{1}{2}c^2\cos 2t\right)^{1/2}\right)\mathrm{d}t \qquad ②$$

注意对于 $0\leqslant t<\pi/4$ 有 $\cos 2t>0$.

现在函数 $f(u)=(p-u)^2+(p+u)^2$ 在区间 $0\leqslant u\leqslant p$ 上

递减,因为在 $0 < u < p$ 内

$$2f'(u) = -(p-u)^{-\frac{1}{2}} + (p+u)^{-\frac{1}{2}} < 0$$

因此作为 c 的函数的式 ② 的积分当 $c = 0$ 时,即对于内切圆有最大值.

为了证明内切于正方形的椭圆必有沿此正方形对角线的轴,我们选取有边 $u = \pm R$ 和 $v = \pm R$ 的正方形和有方程

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0$$

的椭圆,此处

$$4AC - B^2 > 0 \quad ③$$

取椭圆上最高、最低、最右、最左的点,我们看出正方形的四个边必定与椭圆相切.

直线 $u = R$ 是切线当且仅当方程

$$Cv^2 + (BR + E)v + (AR^2 + DR + F) = 0$$

有重根或

$$(BR + E)^2 - 4C(AR^2 + DR + F) = 0 \quad ④$$

对于 $u = -R, v = R$ 和 $v = -R$ 的相应条件分别是

$$(-BR + E)^2 - 4C(AR^2 - DR + F) = 0 \quad ⑤$$

$$(BR + D)^2 - 4A(CR^2 + ER + F) = 0 \quad ⑥$$

$$(-BR + D)^2 - 4A(CR^2 - ER + F) = 0 \quad ⑦$$

从 ⑤ 式减去 ④ 式并除以 $4R$ 得

$$2CD - BE = 0 \quad ⑧$$

类似地从 ⑥ 和 ⑦ 式得

$$-BD + 2AE = 0 \quad ⑨$$

由于 ⑧、⑨ 和 ③,$D = E = 0$,因此 ④ 和 ⑤ 分别变成

$$B^2R^2 - 4ACR^2 - 4CF = 0$$

$$B^2R^2 - 4ACR^2 - 4AF = 0$$

因为 $F \neq 0$,我们有 $A = C$,这意味着椭圆有沿着直线 $u \pm v = 0$ 的轴.

> A - 5 证明:如果 n 是大于 1 的整数,则 n 不能整除 $2^n - 1$.

解 假定对某个 $n > 1$,n 整除 $2^n - 1$.因为 $2^n - 1$ 是奇数,所以 n 是奇数.设 p 是 n 的最小素因子,因为 p 是奇数,则由欧拉定理得 $2^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod p$.如果 λ 是使得 $2^\lambda \equiv 1 \pmod p$ 的最小正整数,则 λ 整除 $\phi(p) = p - 1$.因此 λ 有比 p 较小的素因子.但 $2^n \equiv 1 \pmod p$,因此 λ 也整除 n.这意味着 n 有比 p 小的素因子,矛盾.

A－6　设 $f(x)$ 是在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的可积函数而且假定 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0,\cdots,\int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x=0$ 和 $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：在正测度集内有 $|f(x)|\geqslant 2^n(n+1)$.

解　给定的条件蕴含

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x=1$$

假定除一个零测度集合外

$$|f(x)|<2^n(n+1)$$

则 $1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=1$

矛盾.

B－1　证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n(x-1)^{2n})/n!$ 的幂级数表示不能有三个连续的零系数.

解法 1　对于所提议的解，问题能以更一般的形式陈述：如果 $P(x)$ 是三次多项式，则对于 $\exp(P(x))$ 关于任何点的级数展开将没有三个连续的零系数.

如果 $f(x)=\exp(P(x))$，此处 $P(x)$ 是三次多项式，则 $f'=f\cdot P'$ 且 $f''=f'\cdot P'+f\cdot P''$，一般地对于 $k\geqslant 2$ 有

$$f^{(k+1)}=f^{(k)}P'+\binom{k}{1}f^{(k-1)}P''+\binom{k}{2}f^{(k-2)}P''' \qquad ①$$

从 ① 推得：如果在某个(实或复的)点 x_0

$$f^{(k-2)}(x_0)=f^{(k-1)}(x_0)=f^{(k)}(x_1)=0$$

则也有 $f^{(k+1)}(x_0)=0$ 应用同样的论证，对于 $\mu=k+2,k+3,\cdots$，都有 $f^{(\mu)}(x_0)=0$，因此 $f(x)$ 将简化为多项式. 这显然是不可能的.

解法 2　在问题的给定形式中，可以证明没有一个 x^k 的系数为零. 如果 $0\leqslant k-n\leqslant 2n$ 或等价地 $k/3\leqslant n\leqslant k$，则乘积 $x^n(1-x)^{2n}$ 中 x^k 有非零系数. 此系数是整数

$$(-1)^{k-n}\binom{2n}{n-k}$$

我们把它表示为 $a(n,k)$. 在给定的级数中 x^k 的系数是

$$C_k = \sum_{n=[k/3]+1}^{k} \frac{a(n,k)}{n!}$$

以$(k-1)!$遍乘此和式，除最后一项外每一项将变为一个整数，最后一项变为$1/k$.因为对于$k>1$来说$(k-1)!$乘以C_k不是整数，而$C_1=C_0=1$，因此在给定的x的幂级数展开式中不存在零系数.

B－2 一质点从静止开始在直线上运动，而且在越过一段距离s_0后达到速度v_0.如果运动使加速度永远不增加，求横越的最大时间.

解 我们取v_0为正数(见边注)而且考察作为t的函数v的图形(图1).从给定的资料我们知道曲线从原点出发而且向下凹，因为加速度$a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$不增加，设$t_0$是横越的时间，则$v(t_0)=v_0$.距离$s_0$由曲线$v=v(t)$，$t$轴和直线$t=t_0$所界的面积来表示.顶点在$(0,0)$，$(t_0,0)$和$(t_0,v_0)$的直角三角形有小于或等于$s_0$的面积，于是$\frac{1}{2}v_0t_0\leqslant s_0$或$t_0\leqslant\frac{2s_0}{v_0}$.

当$v(t)$的图形是直线$v(t)=(v_0/t_0)t=(v_0^2/2s_0)t$时，等号是可能的而且给出$t_0$的最大值(对给定的$s_0$和$v_0$).

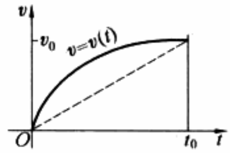


图1

如果v_0是零或负数，对于横越不存在最大时间t_0.在$v_0=0$的情形，运动方程

$$S=s_0(3(t/t_0)^2-3(t/t_0)^3)$$

$$0\leqslant t\leqslant t_0$$

对于任何$t_0>0$都满足问题的条件.

B－3 设A和B是一个群中的两个元素，使得$ABA=BA^2B$，$A^3=1$和对某个正整数n，$B^{2n-1}=1$.证明：$B=1$.

解法1 从$ABA=BA^2B=BA^{-1}B$，我们有

$$AB^2=ABA\cdot A^{-1}B=BA^{-1}BA^{-1}B=$$
$$BA^{-1}ABA=B^2A$$

应用归纳法得$AB^{2r}=B^{2r}A$，因此$AB=AB^{2n}=B^{2n}A=BA$.因为A和B可交换，所以$ABA=BA^2B$蕴含$A^2B=A^2B^2$，或$B=B^2$，或$B=1$.

解法2 通过把A，B表示为同一个群元素的幂可以证明A和B是可交换的.因为$A^3=1$，它引起在$ABA=BA^2B$中右乘A^2然后左乘BA^2得到$B^2=(BA^2)^3$.置$X=BA^2$并利用$B^{2n}=B$得到

$$B=X^{3n} \quad ①$$

从$X=BA^2$，我们得到$XA=B$，$A=X^{-1}B$或$A=X^{3n-1}B=1$的结论和前面一样.

B-4 设 n 是大于1的整数.证明:存在具有整系数的多项式 $P(x,y,z)$,使得 $x\equiv P(x^n,x^{n+1},x+x^{n+2})$.

解 设 $x=t^n,y=t^{n+1},z=t+t^{n+2}$,我们构造一个具有整系数的多项式 $P(x,y,z)$ 使得 $P(x,y,z)=t$.我们有

$$z=t+t^{n+2}$$
$$zy=t^{n+2}+t^{2n+3}$$
$$zy^2=t^{2n+3}+t^{3n+4}$$
$$\vdots$$
$$zy^{n-2}=t^{n^2-n-1}+t^{n^2}$$

以上方程交替地乘以 +1 和 -1 并相加

$$z(1-y+y^2-\cdots(-1)^{n-2}y^{n-2})=$$
$$t+(-1)^{n-2}t^{n^2}=t+(-1)^nx^n$$

因此,如果我们定义

$$P(x,y,z)=z\left(\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^iy^i\right)+(-1)^{n-1}x^n$$

则
$$P(t^n,t^{n+1},t+t^{n+2})=t$$

B-5 如果(非平面的)挠四边形的对角成对相等,证明:对边也成对相等.

解法1 对于挠四边形 $ABCD$,设 $AB=a,BC=b,CD=c$,$DA=d,AC=x,BD=y$.这些长度中没有一个为零.按照余弦定理

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{ab}=\frac{c^2+d^2-x^2}{cd}$$

或
$$(ab-cd)x^2=(bc-ad)(ac-bd)$$

类似地
$$(ad-bc)y^2=(cd-ab)(ac-bd)$$

i $(ab-cd)=0$.

则 $ad-bc=0$ 而且 $a=c,b=d$.

ii $ab-cd\neq 0$.

则 $bc-ad\neq 0,ac-bd\neq 0$ 而且 $x^2y^2=(ac-bd)^2$.

因此 $ac=xy+bd$ 或 $bd=ac+xy$.

由托勒密定理(空间的),$ABCD$ 必定共圆,这违反挠四边形的条件.

解法 2 如果 $AC = BC$ 和 $AD = BD$,则结论 $AC = BD$ 和 $BC = AD$ 是显然的(图 1),因此假定 $AC \neq BC$.由于这一假定,我们先证明 $BD = AC$.如果 $BD \neq AC$,则在 $\triangle ADB$ 的平面内存在唯一的点 D^*,具有条件 $BD^* = AC, AD^* = CB, \angle AD^*B = \angle ACB = \theta$.从 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BD^*E$ 推得 $\angle DAE = \angle D^*BE$.

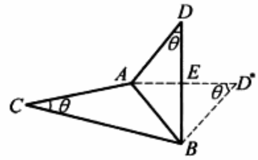


图 1

从 $\triangle CD^*A$ 和 $\triangle CD^*B$ 的全等推得 $\angle CAD^* = \angle CBD^*$.这些角度的相等证明了三面角 $A - CDD^*$ 和 $B - CDD^*$ 是全等的.因此由 $\overrightarrow{CA}$ 与平面 ADD^* 所组成的角度等于 $\overrightarrow{CB}$ 与平面 BDD^*(它是平面 ADD^*)所组成的角度.如果 H 是从 C 到此平面的垂足,则 $\triangle CHA$ 和 $\triangle CHB$ 是全等的直角三角形,即 $AC = CB$.这是一个矛盾,因此 $BD = AC$.

在上面的证明中交换 B 与 A 的角色可以证明 $AD = BC$.

B－6 设 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ 是正整数的集合.证明:多项式 $1 + z^{n_1} + z^{n_2} + \cdots + z^{n_k}$ 在圆 $|z| < (\sqrt{5} - 1)/2$ 内没有根.

解 设 $P(z)$ 表示给定的多项式.$1/(1-z) - 2P(z)$ 的幂级数展开式有系数 ± 1,而且首项系数为 -1,因此

$$\left|1 + \frac{1}{1-z} - 2P(z)\right| \leqslant |z| + |z|^2 + \cdots = \frac{|z|}{1-|z|}$$

又
$$|2P(z)| \geqslant \left|1 + \frac{1}{1-z}\right| - \left|1 + \frac{1}{1-z} - 2P(z)\right| \geqslant$$
$$1 + \frac{1}{1+|z|} - \frac{|z|}{1-|z|} = 2\,\frac{1-|z|-|z|^2}{1-|z|^2}$$

对于 $|z| < (\sqrt{5} - 1)/2$ 来说后面的项是正的.

第34届美国大学生数学竞赛

A－1 (1) 设 $\triangle ABC$ 是任意三角形，又设 X,Y,Z 分别是 BC，CA，AB 边上的点. 假定距离 $\overline{BX}\leqslant\overline{XC}$，$\overline{CY}\leqslant\overline{YA}$，$\overline{AZ}\leqslant\overline{ZB}$（图1）. 证明：$\triangle XYZ$ 的面积大于等于(1/4)($\triangle ABC$ 的面积).

(2) 设 $\triangle ABC$ 是任意三角形，又设 X,Y,Z 分别是 BC，CA，AB 边上的点(但没有任何关于距离比例 $\overline{BX}/\overline{XC}$ 等的假定，见图1和图2). 应用(1)或任何另外的方法，证明：三个角落的 $\triangle AZY$，$\triangle BXZ$，$\triangle CYX$ 中有一个的面积小于等于 $\triangle XYZ$ 的面积.

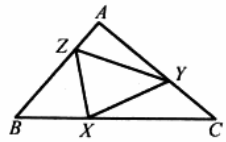


图 1

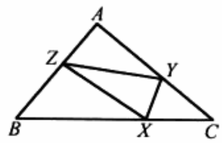


图 2

解 (1) 如果 X,Y,Z 是各边的中点，则 $\triangle XYZ$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的四分之一. 只要 $\overline{BX}\leqslant\overline{XC}$，$\overline{CY}\leqslant\overline{YA}$ 和 $\overline{AZ}\leqslant\overline{ZB}$，移动 X,Y,Z 之一到它所在边的中点，而另外两点固定则不增加 $\triangle XYZ$ 的面积. 因为 $\triangle XYZ$ 固定底上的高减少或保留为常数.

(2) 在(1)的假定下，三个角落的三角形的面积不超过总面积的四分之三. 因此它们中的某一个必有小于 $\triangle XYZ$ 的面积，所有另外的情形类似于 $\overline{XC}<\overline{BX}$ 和 $\overline{CY}<\overline{YA}$ 的情形，底 XY 上高的研究表明 $\triangle CYX$ 有比 $\triangle XYZ$ 较小的面积.

A－2 研究一个无穷级数，它的第 n 项是 $\pm(1/n)$，$\pm$ 符号根据八个符号为一组周期地重复的模型所决定. 有 2^8 种可能的模型，它们中的两个例子是

$$++----++$$

$$+---+---$$

第一个例子产生级数

$$1+(1/2)-(1/3)-(1/4)-(1/5)-(1/6)+(1/7)+(1/8)+(1/9)+(1/10)-(1/11)-(1/12)-\cdots$$

(1) 证明：此级数为条件收敛的充分条件是在八个符号的组中存在四个“+”号和四个“-”号.

(2) 此充分条件是否也是必要条件？

(此地“收敛”意味着“收敛到有限极限”)

解 两部分的思想是类似的,而且(2)的答案为"是的".设 u_n 是第 n 项 $\pm 1/n$, $S_n = u_1 + \cdots + u_n$,因为 $n \to \infty$ 时 $u_n \to 0$, $\{S_n\}$ 收敛当且仅当 $\{S_{8m}\}$ 收敛.应用

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{k}{n(n+k)}$$

$\sum(1/n^2)$ 收敛和 $\sum(1/n)$ 发散的事实.可以证明:在每个符号组中具有四个"+"号和四个"-"号的 $\{S_{8m}\}$ 作为四个收敛序列逐项求和而收敛.而符号的不对称性使 $\{S_{8m}\}$ 作为收敛与发散序列的和而发散.

A-3 设 n 是一个固定的正整数,又设 $b(n)$ 是

$$k + \frac{n}{k}$$

当 k 跑遍所有正整数时的最小值.证明:$b(n)$ 与 $\sqrt{4n+1}$ 有相同的整数部分(实数的整数部分是不超过它的最大整数,例如 π 的整数部分是3,$\sqrt{21}$ 的整数部分是4,而5的整数部分是5等).

解 设 $c(n) = \sqrt{4n+1}$,又设 $[x]$ 表示 x 的最大整数,则我们希望证明 $[b(n)] = [c(n)]$.设 $k(n)$ 是使 $k + n/k$ 最小的 k 的值,则

$$\begin{aligned} b(n-1) \leqslant k(n) + \{n - 1/k(n)\} < \\ k(n) + \{n/k(n)\} = b(n) \end{aligned}$$

即 $b(n-1) < b(n)$.设 m 是正整数,则

$$b(m^2) = 2m, b(m^2+m) = 2m+1 \qquad ①$$

从公式①和 $b(n)$ 的严格增加性推得

$$\begin{aligned} [b(n)] &= 2m, m^2 \leqslant n < m^2 + m \\ [b(n)] &= 2m+1, m^2 + m \leqslant n < (m+1)^2 \end{aligned} \qquad ②$$

另一方面,$c(n)$ 也是增加函数而且

$$c(m^2-1) = \sqrt{4m^2-3} < 2m$$

$$c(m^2) = \sqrt{4m^2+1} > 2m$$

$$c(m^2+m) = \sqrt{4m^2+4m+1} = 2m+1$$

这些事实表明 $[c(n)]$ 代替 $[b(n)]$ 时式②仍为真.

A-4 在实直线上函数 $f(x) = 2^x - 1 - x^2$ 有多少个零点(所谓函数 f 的零点我们指的是在函数 f 的定义域中(此地为所有实数的集合)使 $f(x_0) = 0$ 的值 x_0)?

解 三个,在 0,1 和某个 $x > 1$. 前面两点是明显的,另外一点从 $f(4) < 0$ 和 $f(5) > 0$ 或从 $f'(1) < 0$ 且 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to +\infty$ 而推得,没有更多的零点,因为应用扩张的 Rolle 定理,f 的四个零点将推出 f''' 的一个零点;但对于一切 x,$f'''(x) = (\ln 2)^3 2^x \neq 0$.

> A-5 一质点在三维空间中根据方程
> $$\frac{dx}{dt} = yz, \frac{dy}{dt} = zx, \frac{dz}{dt} = xy$$
> 运动(此地 $x(t), y(t), z(t)$ 是实变数 t 的实值函数). 证明:
>
> (1) 如果 $x(0), y(0), z(0)$ 中的两个等于零,则质点永远不运动.
>
> (2) 如果 $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0$,则解是
> $$x = \sec t, y = \sec t, z = \tan t$$
> 但若 $x(0) = y(0) = 1, z(0) = -1$,则
> $$x = 1/(t+1), y = 1/(t+1), z = -1/(t+1)$$
>
> (3) 如果 $x(0), y(0), z(0)$ 中至少有两个值不等于零,那么或者在未来的某有限时间内移至无穷远,或者在过去的某有限时间内来自无穷远(如果三维空间中一点与原点的距离趋向于无穷,则说此点运动至无穷远).
>
> (4) 证明下列事实不可能:对于位于欧氏平面中的七条不同的直线,至少有六点使得在每个点上恰有这些直线中的三条相交,而且至少有四 点使得在每个点上恰有这些直线中的两条相交.

解 (1) 如果 $x(0), y(0), z(0)$ 中的两个等于零,则 $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ 而且唯一性定理适用(方程显然满足 Lipschitz 条件).

(2) 显然(这一点打算作为(3) 的提示).

(3) 现在写下对称形式的方程
$$xx' = yy' = zz' = xyz$$
于是
$$x^2 - c_1 = y^2 - c_2 = z^2 - c_3$$
其中 c_i 为常数,不失普遍性,设 $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3$ 于是可置 $c_3 = 0$. 因此 $z^2 \leqslant y^2 \leqslant x^2$,而且
$$z^2 = x^2 - c_1 = y^2 - c_2, c_i \geqslant 0$$
$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$$
现在设 t 在使 $|z|$ 增加的方向运动(这依赖于 z 的符号和平方根的 $\pm$ 符号).

为了简化,假定 $z(0) \geqslant 0$,而且假定平方根的符号取 +,则设时间正向地运动.因为

$$t = \int dz / \sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$$

而且 z 积分收敛,因此有限时间足够把 z 推向无穷远.

A - 6 试证:对于欧氏平面上的七条不同的直线,不可能其中的三条恰好至少交于六个点,而其中的两条恰好至少交于四个点.

解 在平面内任何两条不同的直线至多交于一点.共有 $\binom{7}{2} = 21$ 对直线.三重交点占这些直线对的三对,而简单的交点占一对.

最后,$6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 22 > 21$.

B - 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 是整数的集合,它满足条件:如果去掉它们中的任何一个数,留下的数可以分成具有相等和数的 n 个整数的两个集合.证明:$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$.

解 因为不论哪个 a_i 移去,留下的 $2n$ 个整数的和总是偶数,因此所有的 a_i 必有相同的奇偶性.类似的议论可以证明它们都是(mod 4)同余的;因为对于 a_i 成立的性质(按照 a_i 都是偶数或奇数)也对整数 $a_i/2$ 或 $(a_i - 1)/2$ 成立.继续这种方法,对于每个 k,所有 a_i 都(mod 2^k)同余.对于整数来说,这种情况仅当它们都相等时才有可能.

B - 2 设 $z = x + iy$ 是复数,其中 x 和 y 是有理数且 $|z| = 1$.证明:对每个整数 n 来说,数 $|z^{2n} - 1|$ 是有理的.

解 设 $z = e^{\theta i}$ 和 $z^n = w = u + iv$(其中 u 和 v 是实数).用利 $u^2 + v^2 = 1$,则

$$|z^{2n} - 1| = |w^2 - 1| = ((u^2 - v^2 - 1)^2 + (2uv)^2)^{\frac{1}{2}} = 2|v|$$

(利用等腰三角形也容易几何地证明 $|z^{2n} - 1| = 2|\sin n\theta|$).因此只须证明当 $x = \cos\theta$ 和 $y = \sin\theta$ 是有理数时 $v = \sin n\theta$ 也是有理数.对于 $n \geqslant 0$,它从 $(x + iy)^n = u + iv$ 推得,或利用正弦与余弦的加法公式通过数学归纳法加以证明.$n < 0$ 的情形则利用 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 推得.

B－3 研究整数 $p>1$，它具有性质：对于满足 $0\leqslant x<p$ 的一切整数 x，多项式 x^2-x+p 取素数（例如 $p=5$ 和 $p=41$ 具有这一性质）．证明：恰好存在一组整数 a,b,c 满足

$$b^2-4ac=1-4p$$
$$0<a\leqslant c$$
$$-a\leqslant b<a$$

解 满足条件的一个三数组 (a,b,c) 是 $(1,-1,p)$，还需要证明这是唯一的解答．显然 b 必定是奇数，因为 $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$．又 $b^2=(-b)^2$，因此记 $|b|=2x-1$，则 $b^2-4ac=1-4p$ 给出

$$x^2-x+p=ac$$

如果 $0\leqslant x<p$，则假设告诉我们 ac 是素数，因此从条件 $0<a\leqslant c$ 推得 $a=1$．从 $-a\leqslant b<a$ 和 b 的奇性推出 $b=-1$，又 $1-4p=b^2-4ac=1-4c$ 给出 $c=p$．因为 $x=(|b|+1)/2\geqslant 0$，因此只须证明 $x<p$ 即可．因为 $|b|\leqslant a\leqslant c$，$b^2-4ac=1-4p$ 和 $p\geqslant 2$，因此我们应用

$$3a^2=4a^2-a^2\leqslant 4ac-b^2=4p-1$$
$$|b|\leqslant a\leqslant\sqrt{(4p-1)/3}$$
$$x=(|b|+1)/2<\sqrt{p/3}+(1/2)<p$$

可以明白 $x<p$．

B－4 (1) 在 $[0,1]$ 上，设 f 有满足 $0<f'(x)\leqslant 1$ 的连续导数，而且假定 $f(0)=0$．证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1(f(x))^3\mathrm{d}x$$

（提示：用包含 f 的反函数的不等式来代替此不等式）

(2) 给出一个出现等式的例子．

解 我们给出两种解法：第一种不用提示而第二种则用提示．由 Amherst 大学 J. G. Mauldon 教授提出的下述定理和证明提供了第一种解法．（这种解法与此题解答者中除一人外的其他所有人提供的解法是类似的）

定理 如果 f 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$ 且在 $(0,1)$ 内有 $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$，则

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1(f(x))^3\mathrm{d}x$$

除非在 $[0,1]$ 上恒等地有 $f(x)=x$ 或 $f(x)=0$．

定理的证明 对于 $t\in[0,1]$ 定义 $G(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-(f(t))^2$，则 $G(0)=0$ 和 $G'(t)=2f(t)(1-f'(t))\geqslant 0$，因此 $G(t)\geqslant 0$，于是 $f(t)G(t)\geqslant 0$.

现在对于 $t\in[0,1]$ 定义

$$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)-\int_0^t (f(x))^3\mathrm{d}x$$

则 $F(0)=0$ 和 $F'(t)=f(t)G(t)\geqslant 0$，因此 $F(t)\geqslant 0$，特别 $F(1)\geqslant 0$.

仅当对一切 t，$f(t)G(t)=F'(t)=0$ 时等式成为可能. 由此推出：对某个 k，在 $[0,k]$ 上 $f=0$ 且在 $(k,1)$ 内 $f>0$，同时 $G'=0$，然后在 $(k,1)$ 上有 $f'=1$. 这仅当 $k=0$ 或 $k=1$ 才行，因为否则 $f'(k)$ 同时既确定又非确定.

对(2)的唯一的答案是 $f(x)=x$. 下面是应用提示证明(1)的一个大纲. 设 $f(1)=c$，由题设推出 f 有反函数 g 且在 $0\leqslant y\leqslant c$ 上有 $g'(y)\geqslant 1$，设

$$A=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,B=\int_0^1 (f(x))^3\mathrm{d}x$$

则利用被积函数关于直线 $y=z$ 的对称性有

$$A=\left(\int_0^C yg'(y)\mathrm{d}y\right)^2=\int_0^C\int_0^C yg'(y)zg'(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$2\int_0^C\int_0^z yg'(y)zg'(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

现在由 $g'(y)\geqslant 1$ 推出

$$A\geqslant\int_0^C zg'(z)\left(\int_0^z 2y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^C z^3g'(z)\mathrm{d}z=B$$

B－5 (1) 设 z 是二次方程

$$az^2+bz+c=0$$

的解，又设 n 是正整数. 证明：z 能表示为 z^n,a,b,c 的有理函数.

(2) 应用(1)或用任何另外的方法，把 x 表示为 x^3 和 $x+(1/x)$ 的有理函数(把你的解答列成清楚的直观的显式).

(所谓几个变量的有理函数我们指的是那些变量的多项式的商，这些多项式以有理数作为系数而且分母不恒等于零. 于是为了得到 x 作为 $u=x^2$ 和 $v=x+(1/x)$ 的有理函数，我们可以写成 $x=(u+1)/v$)

解 (1) 设 $r=-b/a$ 和 $s=-c/a$，设 p_n 和 q_n 是由初始条件 $p_0=0,p_1=1,q_0=1,q_1=0$ 和对于 $n>1$ 的循环公式 $p_n=$

$rp_{n-1}+sp_{n-2}, q_n = rq_{n-1}+sq_{n-2}$ 所确定的 r 和 s 的多项式.应用 $z^n = rz^{n-1}+sz^{n-2}$ 和数学归纳法,人们可以证明 $z^n = p_nz+q_n$ 和 $p_n(r,s)$ 的所有系数都是正的.对 $z=(z^n-q_n(-b/a,-c/a))/p_n(-b/a,-c/a)$ 的右端的分子分母乘以 a 的适当的幂次引导到 $z=F(z^n,a,b,c)/G(a,b,c)$,此处 F 和 G 是具有整数系数的多项式.因为 $p_n(r,s)$ 的所有系数都是正的,所以结论对于 $G(a,b,c)$ 同样为真,因此 $G(a,b,c)$ 不恒等于零而且 F/G 是所需要的有理函数.

(2) 设 $v=x+(1/x)$,则 $x^2-vx+1=0$.应用(1)并以 x 代替 z,人们求得 $x^3=p_3x+q_3$,其中 $p_3=v^2-1, q_3=-v$,因此

$$x=(x^3-q_3)/p_3=(x^3+v)/(v^2-1)$$

B－6　在区域 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上:

(1) 证明:$\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta$ 在 $\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 处取它的最大值(因此在 $2\pi/3$ 和 $5\pi/3$ 处取它的最小值).

(2) 证明

$$|\sin^2\theta\{\sin^3(2\theta)\cdot\sin^3(4\theta)\cdot\cdots\cdot\sin^3(2^{n-1}\theta)\}\sin(2^n\theta)|$$

在 $\theta=\pi/3$ 处取它的最大值(最大值也可以在另外的点达到).

(3) 导出不等式:

$$\sin^2\theta\cdot\sin^2(2\theta)\cdot\sin^2(4\theta)\cdot\cdots\cdot\sin^2(2^n\theta)\leqslant(3/4)^n$$

解　(1) 简单的计算.

(2) 用归纳法.$n=1$ 的情形刚好是(1).现在 $n+1$ 的表达式对 n 的表达式的比等于

$$|\sin^2 2^n\theta\cdot\sin 2^{n+1}\theta|$$

因为 $\theta=\pi/3$ 给出 $2^n\theta\equiv 2\pi/3$ 或 $4\pi/3(\mathrm{mod}\ 2\pi)$,所以这一比值在 $\theta=\pi/3$ 时达到最大,因此由归纳法知整个表达式在 $\theta=\pi/3$ 时达最大值.

(3) 令 $\theta=\pi/3$ 并且注意到(2)部分的表达式严格地等于 $(3/4)^{3n/2}$,它的 $2/3$ 次幂等于 $(3/4)^n$,那是最大值,在(2)中的表达式的 $2/3$ 次幂一般是小于等于 $(3/4)^n$.为了从它那里得到(3)中的表达式,我们将增加两端因子 $\sin 2^n\theta$ 和 $\sin^n\theta$ 的幂次,这只会减少其乘积,因为 $|\sin\theta|\leqslant 1$.

第35届美国大学生数学竞赛

A-1　称正整数集为共谋的(conspiratorial),如果它们中没有三个数两两互素(一个整数集是两两互素的,如果它们中没有一对数有大于1的公因子).在整数1到16的任何共谋的子集内元素的最大个数是什么?

解　$\{1,2,\cdots,16\}$ 的一个共谋子集从两两互素的集合 $\{1,2,3,5,7,11,13\}$ 中至多取两个数,因此至多有 $16-(7-2)=11$ 个数.但

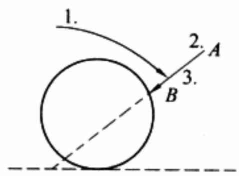
$$\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$$

是具有11个元素的共谋子集,因此答案是11.

A-2　如图1,一个圆位于垂直于地面的平面内,一点 A 位于此平面内且在此圆的外部并高出圆的底部.一质点从静止状态开始由 A 点无摩擦地沿一倾斜直线滑下直至它到达圆,哪一条直线允许在最短时间内降落?(假定地球引力在整个所包含的区域内是常数,没有相对的影响等)

出发点 A 和圆是固定的,终止点 B 允许在圆上改变.

注意:答案可以用指出下降道路的毫不含糊的任何形式给出,不需要求出 B 点的坐标.



1.下降路线
2.出发
3.停止

图1

解　设 C 是直线 AB 与圆的另一交点,又设 θ 是 AB 的倾斜角.设 $\overline{AB}=b$ 和 $\overline{AC}=c$,下降时间的平方与 $b/\sin\theta$ 成比例,因此与 $1/(c\sin\theta)$ 成比例,因为大家熟知 bc 关于 θ 是常数.通过最大化 $c\sin\theta$,使时间最小,选 C 作为圆的底,此事能够做到.

A－3　一个熟知的定理断言：一个大于 2 的素数 p 能够写成两个完全平方数的和（$p = m^2 + n^2$，m 和 n 是整数）当且仅当 $p \equiv 1 \pmod 4$. 使用这一结果，问什么样的素数 $p > 2$ 能够利用（不必正的）整数 x 和 y 写成下列形式中的每一种：

(1) $x^2 + 16y^2$；

(2) $4x^2 + 4xy + 5y^2$.

解　如果 $p \equiv 1 \pmod 4$，则(A)：$p \equiv 1 \pmod 8$ 或(B)：$p \equiv 5 \pmod 8$. 我们证明(A) 和(B) 分别是(1) 和(2) 的必要和充分条件. 如果 $p = m^2 + n^2$ 而且 p 是奇数，我们可以设 m 是奇数而 n 是偶数，则 $p = m^2 + 4v^2$ 且 $m^2 \equiv 1 \pmod 8$. 由于(A)，v 是偶数，因此 $p = m^2 + 16w^2$. 反之，$p = m^2 + 16w^2$ 推出 $p \equiv m^2 \equiv 1 \pmod 8$. 由于(B)，$v$ 是奇数，对某个整数 u，$m = 2u + v$ 且 $p = (2u + v)^2 + 4v^2 = 4u^2 + 4uv + 5v^2$. 反之，$p = 4u^2 + 4uv + 5v^2$ 和 p 是奇数推出 $p = (2u + v)^2 + 4v^2$ 和 v 是奇数，因此 $p \equiv 5 \pmod 8$.

A－4　一个无偏的硬币投掷 n 次：$|H - T|$ 的期望值是什么？此处 H 是正面数而 T 是反面数. 换句话说，用封闭形式计算

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k<n/2}(n-2k)\binom{n}{k}$$

（在此问题中“封闭形式”意味着不包含级数的形式，给定的级数能够简化为只包含二项式系数，n 和 2^n 的有理函数和最大整数函数 $[x]$ 的单项式）

解　答案是

$$\frac{n}{2^{n-1}}\binom{n-1}{[(n-1)/2]}$$

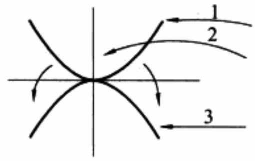
因为

$$\sum_{k<n/2}[n-2k]\binom{n}{k} = \sum_{k<n/2}\left((n-k)\binom{n}{k} - k\binom{n}{k}\right) =$$

$$\sum_{k<n/2}\left(n\binom{n-1}{k} - n\binom{n-1}{k-1}\right) =$$

$$n\sum_{k<n/2}\left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right) =$$

$$n\binom{n-1}{[(n-1)/2]}$$



1. 滚动抛物线
2. (0,1/4),移动焦点的原来位置
3. 固定抛物线

图 1

A – 5 研究两条互切的抛物线 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$(图 1)(这些抛物线分别有焦点$\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\left(0,-\frac{1}{4}\right)$以及准线 $y = -1/4$ 和 $y = 1/4$).上面的抛物线环绕着下面的固定的抛物线无滑动地滚动.求移动抛物线的焦点的轨迹.

解 设 F 是固定的焦点,M 是移动的焦点,而 T 是(变动的)互切点.抛物线的反射性质告诉我们:在 T 的切线与 FT 和与垂直线作成相等的角度.此性质和两条抛物线的全等性推出 MT 是垂直的而且线段$\overline{FT}$ 和$\overline{MT}$ 相等.现在按照抛物线的焦点 – 准线的定义,M 必在水平的固定的准线 $y = 1/4$ 上.

A – 6 众所周知,对每个整数 x,多项式$(x+1)\cdot(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)$刚好被 n 除尽.给定 n,设 $k = k(n)$是使得任意首项系数为 1 的整多项式(具有整数系数的且首项系数为 1 的多项式)

$$f(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

对每个整数 x,$f(x)$的值刚好被 n 除尽的最小次数.

求 n 和 $k = k(n)$ 之间的关系.特别地,求与 $n = 1\ 000\ 000$ 对应的 k 的值.

解 设 $p(k,x)$ 是首项系数为 1 的多项式 $(x+1)\cdot(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+k)$,又设 m 是整数,则 $p(k,m)$ 刚好被 $k!$ 除尽,因为商的绝对值是二项式系数(甚至 m 是负数时也是如此).因此,如果 $n \mid k!$,则存在次数为 k 的首项系数为 1 的整多项式 $f(x)$,使得对所有整数 m 都有 $n \mid f(m)$.反之,条件 $n \mid k!$ 是必要的,因为次数为 k 的首项系数为 1 的整多项式的 k 阶差分 $k!$ 被所有 $f(m)$ 值的公因子除尽.

特别,$k(10^6) = k(5^6 2^6) = 25$,因为具有条件 $5^6 \mid s!$ 的最小的 s 值是 $s = 25$.

B – 1 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的五个点 $p_1, p_2, \cdots, p_5$(不必相异)应怎样分布才能使得 10 个距离的和

$$\sum_{i<l} d(p_i, p_l)$$

最大(这里 $d(p,q)$ 表示 p 和 q 之间的直线距离)?

解 因为 p_i 不必相异,这个和是在紧集 $C \times C \times C \times C \times C$

上的连续函数,此处 C 是圆,因此最大值存在.我们证明最大值在 p_j 为正五边形顶点时发生,方法是通过证明这一构形同时使两个和

$$S = d(p_1,p_2)+d(p_2,p_3)+d(p_3,p_4)+d(p_4,p_5)+d(p_5,p_1)$$

$$T = d(p_1,p_3)+d(p_2,p_4)+d(p_3,p_5)+d(p_4,p_1)+d(p_5,p_2)$$

有最大值.对于 S 或 T,可以固定四点,则和的变动部分是

$$D = d(p,a)+d(p,b)$$

的形式,其中 a 和 b 固定.利用正弦定律,证明 D 是常数乘以 $\sin\alpha+\sin\beta$,此处 $\alpha=\angle pab$,$\beta=\angle pab$ 且 $\alpha+\beta$ 是常数.然后容易证明:如果 p 关于 a 和 b 不处于对称地位,则 D 不是最大值.

B-2　设 $y(x)$ 是实变数 x 的连续可微的实值函数.证明:如果当 $x\to+\infty$ 时,$y'^2+y^3\to0$,则当 $x\to+\infty$ 时,$y(x)$ 和 $y'(x)\to0$.

解　如果对于趋向于 $+\infty$ 的序列 $\{x_n\}$ 有 $y'(x_n)=0$,则题设保证了 $y(x_n)\to0$.因为这些 x_n 可以包括任何的相对极大与极小,因此在这种情形,当 $x\to+\infty$ 时必有 $y(x)\to0$.从而当 $x\to+\infty$,也有 $y'(x)\to0$.

在其余情形,存在 x_0 使得当 $x>x_0$ 时,有 $y'\neq0$,因此 $(y')^2>0$.我们限制在 $x>x_0$ 的情形,并且研究两种再细分的情形.

(1)$y'>0$.如果 y 是上方无界的,则 y^3 和 $(y')^2+y^3$ 也如此,这与假设当 $x\to+\infty$ 时 $y'^2+y^3\to0$ 矛盾.如果 y 是上方有界的,则它趋向于有限的极限.于是 y^3,$(y')^2$ 和 y' 趋向于极限.因为 y 是有界的,因此 y' 的极限必为零,从而 y 也以零作为它的极限.

(2)$y'<0$.如果 y 不是下方无界则不存在问题.因此我们可以假定 $y<0$,而且将 y 与微分方程

$$y' = -(1/2)\mid y\mid^{3/2},y<0$$

的解进行比较.每个解在有限区间内发散到 $-\infty$,因此 $y(x)$ 也是如此.这与对一切大的 x,y 有定义且光滑的假设矛盾.

B-3　证明:如果 α 的满足

$$\cos\pi\alpha = 1/3$$

的实数,则 α 的无理数.(角 $\pi\alpha$ 是弧度)

解 如果 $\alpha = r/s$,其中 r 和 s 是整数且 $s > 0$,则 $\cos(n\pi\alpha)$ 由于 n 只选整数而最多取 $2s$ 个不同的值.当 $\cos\pi\alpha = 1/3$ 时,公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 和数学归纳法可以用来证明①

$$\cos(2^m\pi\alpha) = t/3^{2^{m-1}}, m = 1,2,3,\cdots$$

且 t 是一个不能被 3 除尽的整数,因此这些余弦形成了无限集合.于是 α 是无理数.

B－4 在标准定义中,两个实变数的实值函数 $g: R^2 \to R^1$ 是连续的,如果对于每一点 $(x_0, y_0) \in R^2$ 和每个 $\varepsilon > 0$,存在对应的 $\delta > 0$,使得 $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2} < \delta$ 蕴含 $|g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

相反,$f: R^2 \to R^1$ 称为对每个变量分别连续,如果对 y 的每个固定值 y_0,函数 $f(x, y_0)$ 作为 x 的函数按照通常意义是连续的,类似地 $f(x_0, y)$ 对每个固定的 x_0 作为 y 的函数是连续的.

设 $f: R^2 \to R^1$ 对每个变量分别是连续的.证明:存在一个连续函数序列 $g_n: R^2 \to R^1$ 使得对于一切的 $(x,y) \in R^2$ 都有

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} g_n(x,y)$$

解 对每个 n,我们构造函数 $g_n(x,y)$ 如下:首先由直线 $\{x = m/n\}$(m 为整数)分 xy 平面为宽度为 $1/n$ 的垂直长条.现在沿着每条垂直线 $x = m/n$,令 $g_n(x,y) = f(x,y)$,而且在各垂直线之间线性插值(保持 y 固定而让 x 变动),那么由于 $f(x_0,y)$ 关于 y 连续,故 $g_n(x,y)$ 连续;由于 $f(x,y_0)$ 关于 x 连续,故 $g_n(x,y) \to f(x,y)$.

注 此结果对每个变量分别连续的函数有两个有趣的结果:

(1) 这样的函数是 Borel 可测的;

(2) 除了第一类 Baire 点集外,它们是连续的(按通常意义).(特别,不存在对每个变量分别连续而在每一点是不连续的函数)

---

① 此式应为 $\cos(2^m\pi\alpha) = t_m/3^{2^m}$,这里 t_m 是一个与 m 有关的,不能被 3 整除的整数.

B－5　证明：对于每个整数 $n \geqslant 0$ 都有

$$1 + (n/1!) + (n^2/2!) + \cdots + (n^n/n!) > e^n/2$$

注：你可假定通常称为 Taylor 余项的公式

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

以及

$$n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

解　我们要证明

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = e^n - \frac{1}{n!}\int_0^n (n-t)^n e^t dt > \frac{e^n}{2}$$

或等价地证明

$$n! > 2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$$

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt > 2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$$

令 $u = n - t$，此式可变换为

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt > 2\int_0^n u^n e^{-n} du$$

它等价于

$$\int_0^{\infty} u^n e^{-u} du > \int_0^n u^n e^{-u} du$$

令 $f(u) = u^n e^{-u}$，则只须证明：对于 $0 \leqslant h \leqslant n$ 有

$$f(n+h) \geqslant f(n-h)$$

就可以了．这等价于

$$(n+h)^n e^{-h} \geqslant (n-h)^n e^h$$

$$n\ln(n+h) - h \geqslant n\ln(n-h) + h$$

令

$$g(h) = n\ln(n+h) - n\ln(n-h) - 2h$$

则 $g(0) = 0$，而且对于 $0 < h < n$ 有

$$\frac{dg}{dn} = \frac{n}{n+h} + \frac{n}{n-h} - 2 = \frac{2n^2}{n^2-h^2} - 2 > 0$$

因此，对于 $0 < h < n$ 有 $g(h) > 0$，即得所需要的结果．

B－6 对于具有 n 个元素的集合，有多少个子集它的基数（在子集中元素的个数）分别 $\equiv 0 \pmod 3$，$\equiv 1 \pmod 3$，$\equiv 2 \pmod 3$？换句话说，计算

$$s_{i,n} = \sum_{k \equiv i \pmod 3} \binom{n}{k} \quad , i = 0,1,2$$

你的结果应该是足够强的，它允许直接计算 $s_{i,n}$ 和对一切正整数清楚地说明 $s_{0,n}$ 和 $s_{1,n}$ 及 $s_{2,n}$ 彼此间的关系. 特别地，对于 $n = 1\ 000$ 说明这三个和之间的关系.（$s_{i,n}$ 定义的一个说明是 $s_{0,6} = \binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 22$）

解 设 $n \equiv r \pmod 6$，r 在 $\{0,1,2,3,4,5\}$ 中，则模型是

r	0	1	2	3	4	5
$S_{0,n}$	$a+1$	b	c	$d-1$	e	f
$S_{1,n}$	a	b	$c+1$	d	e	$f-1$
$S_{2,n}$	a	$b-1$	c	d	$e+1$	f

利用公式

$$S_{i,n} = S_{i-1,n-1} + S_{i,n-1} (\text{此地 } 0 - 1 = 2 \pmod 3)$$

并用数学归纳法此结果容易证明，而这些公式可从规则

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

立即推得. 利用上述模型和公式

$$S_{0,n} + S_{1,n} + S_{2,n} = 2^n$$

和数可以很快地计算出来. 对于 $n = 1\ 000$ 来说，$r = 4$，且

$$S_{0,1\,000} = S_{1,1\,000} = S_{2,1\,000} - 1 = (2^{1\,000} - 1)/3$$

第 36 届美国大学生数学竞赛

A - 1 假定一个整数 n 是两个三角形数的和

$$n = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2}$$

把 $4n + 1$ 写为两个平方数之和,$4n + 1 = x^2 + y^2$,证明:x 和 y 能够利用 a 和 b 来表达.

相反地说明:假如 $4n + 1 = x^2 + y^2$,则 n 是两个三角形数之和.

解 设 $n = [(a^2 + a)/2] + [(b^2 + b)/2]$,$a$ 和 b 为整数,则

$$4n + 1 = 2a^2 + 2a + 2b^2 + 2b + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$$

相反地,设 $4n + 1 = x^2 + y^2$,其中 x 和 y 是整数,则 x 和 y 中刚好有一个是奇数,从而 $a = (x + y - 1)/2$ 和 $b = (x - y - 1)/2$ 是整数.容易验证

$$[(a^2 + a)/2] + [(b^2 + b)/2] = (x^2 + y^2 - 1)/4 = n$$

A - 2 对于怎样的有序实数对 b, c,二次方程

$$z^2 + bz + c = 0$$

的根在复平面上都落在单位圆$\{|z| < 1\}$的内部?

在实 bc— 平面上画出一个适当精确的区域图形(即“图象”),使得以上条件成立.明确地指出这个区域的边界曲线.

解 所要求的区域是以$(0, -1)$,$(2,1)$,$(-2,1)$为顶点的一个三角形的内部,其边界线段落在以下直线上

$$L_1: c = 1, L_2: c - b + 1 = 0, L_3: c + b + 1 = 0$$

为了看出这点,我们设 $f(z) = z^2 + bz + c$ 并用 r 和 s 记它的零点,则 $-b = r + s$ 和 $c = rs$,还有

$$(r + 1)(s + 1) = rs + r + s + 1 = c - b + 1 = f(-1)$$

$$(r - 1)(s - 1) = rs - r - s + 1 = c + b + 1 = f(1)$$

在 L_2 上或在 L_2 的下面,至少一个零点是不超过 -1 的实数,这是从$(r + 1)(s + 1) \leqslant 0$ 或从 $f(-1) \leqslant 0$ 是 x 是实数时 $y = f(x)$ 的

图象是一条向上开口的抛物线这个事实而得到的.类似地,在 L_3 上或在 L_3 的下面,一个零点是至少为1的实数.在 L_1 上或在 L_1 的上面,至少一个零点其绝对值大于或等于 1. 因此所要求的点 (b,c) 必须是在所描绘的三角形的内部.

反之,假如 (b,c) 在此三角形的内部,则 $|c|<1$ 从而有 $|r|<1$ 或 $|s|<1$,或 $|r|<1$ 同时 $|s|<1$.假如零点是复数,它们共轭且 $|r|=|s|$;则从 $|c|<1$ 得到 $|r|=|s|<1$.假如零点是实数,由 $|c|<1$ 导出至少一个零点是在 $(-1,1)$ 之中.然后由 $(r+1)(s+1)=f(-1)>0$ 和 $(r-1)(s-1)=f(1)>0$ 导出另一个零点还是在 $(-1,1)$ 之中.

完全确信,所求区域就是已经描绘出的.

A-3 设 a,b,c 是常数且 $0<a<b<c$,在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中,集合

$$\{x^b+y^b+z^b=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$$

的怎样的点使得函数 $f(x,y,z)=x^a+y^b+z^c$ 具有最大值和最小值?

解 设 $h(x)=x^a-x^b$ 和 $k(z)=z^c-z^b$,所要求的点还要使得函数

$$g(x,z)=(x^a+y^b+z^c)-(x^b+y^b+z^b)=h(x)+k(z)$$

在用立体定义域在 xz— 平面上的射影所得到的定义域上也要给出最大值和最小值.对于在考虑之下的所有点,x 和 z 皆是在 $[0,1]$ 中.考察它的导数,我们看到 $h(x)$ 是在 $x=0$ 处为0递增到在 $x_0=(a/b)^{1/(b-a)}$ 处为一个最大值,然后递减到在 $x=1$ 处为 0(这应用了假设 $0<a<b$).类似地,$k(z)$ 是从 $z=0$ 处为0到在 $z_0=(b/c)^{1/(c-b)}$ 处为一个最小值,然后递增到在 $z=1$ 处为0.因为 $(1,z_0)$ 和 $(x_0,1)$ 不在 $g(x,z)$ 的定义域之中,函数 f 只是在 $(x,y,z)=(x_0,[1-x_0^b]^{1/b},0)$ 处达到最大值和只是在 $(0,[1-z_0^b]^{1/b},z_0)$ 处达到最小值.

A-4 设 $n=2m$,其中 m 是一个大于1的奇整数.设 $\theta=e^{2\pi i/n}$.把 $(1-\theta)^{-1}$ 明确地表示为 θ 的具有整系数 a_i 的多项式

$$a_k\theta^k+a_{k-1}\theta^{k-1}+\cdots+a_1\theta+a_0$$

(注意到 θ 是一个 n 次单位元根,于是它满足这些根成立的所有恒等式).

解 设 $n=4k+2$,且 $k>0$,则

$$0 = \theta^n - 1 = \theta^{4k+2} - 1 = (\theta^{2k+1} - 1)(\theta^{2k+1} + 1)$$

$$0 = (\theta^{2k+1} - 1)(\theta + 1)(\theta^{2k} - \theta^{2k-1} + \theta^{2k-2} - \cdots - \theta + 1)$$

因为 θ 是一个 n 次单位元根且 $n > 2k + 1$ 和 $n > 2$

$$(\theta^{2k+1} - 1)(\theta + 1) \neq 0$$

因此

$$\theta^{2k} - \theta^{2k-1} + \theta^{2k-2} - \cdots + \theta^2 - \theta + 1 = 0 \qquad ①$$

$$1 = \theta - \theta^2 + \theta^3 - \cdots - \theta^{2k} = (1 - \theta)(\theta + \theta^3 + \theta^5 + \cdots + \theta^{2k-1})$$

$$(1 - \theta)^{-1} = \theta + \theta^3 + \cdots + \theta^{2k-1}(\text{其中 } 2k - 1 = (n - 4)/2)$$

正如我们从 ① 中看到的那样另一个解是

$$(1 - \theta)^{-1} = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots + \theta^{2k}$$

A－5　在实直线的某个区间 I 上，设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是微分方程

$$y'' = f(x)y$$

的线性独立的解，其中 $f(x)$ 是一个连续的实函数. 假设在 I 上 $y_1(x) > 0$ 和 $y_2(x) > 0$. 证明：在 I 上，存在一个正常数 c，使得函数

$$z(x) = c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$$

满足方程

$$z'' + \frac{1}{z^3} = f(x)z$$

并明确地说出 c 对于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的依赖关系.

解　对于 c 的解答是 $\sqrt{2/W}$，其中 W 是朗斯基行列式(Wronskian) $y_1y'_2 - y_2y'_1$（将在下面看到是常数）.

设 $c^2 = 2k$，则 $z^2/2 = ky_1y_2$. 求导二次，有

$$zz' = k(y_1y'_2 + y_2y'_1)$$

$$zz'' + (z')^2 = k(y_1y''_2 + y_2y''_1 + 2y'_1y'_2)$$

因为 $y''_1 = fy_1$ 和 $y''_2 = fy_2$，这就导出

$$zz'' + (z')^2 = 2k(fy_1y_2 + y'_1y'_2) =$$

$$f(2ky_1y_2) + 2ky'_1y'_2 = fz^2 + 2ky'_1y'_2$$

现在

$$z^3z'' + (zz')^2 = fz^4 + 2kz^2y'_1y'_2$$

$$z^3z'' + k^2(y_1y'_2 + y_2y'_1)^2 = fz^4 + 4k^2(y'_1y'_2)^2$$

$$z^3z'' + k^2(y_1y'_2 - y_2y'_1)^2 = fz^4$$

$$z^3z'' - fz^4 = -k^2(y_1y'_2 - y_2y'_1) = -k^2w^2 = -c^4w^2/4 \qquad ①$$

因为

$$w' = (y_1y'_2 - y_2y'_1)' = y_1y''_2 - y_2y''_1 =$$

$$y_1(fy_2) - y_2(fy_1) = 0$$

w 是一个常数. 对于 c 解 $c^4w^2/4 = 1$ 得到 $c = \sqrt{2/w}$；对于这个 c，

① 推导出 $z'' - fz = -z^{-3}$ 或 $z'' + z^{-3} = fz$.

A-6 设 p_1, p_2, p_3 是三维空间中一个锐角三角形的顶点.证明:通常在以下要求下可能找到两个添加进去的点 p_4 和 p_5,使得这些点中没有三点是共线的,且使得通过五点中的任意两点的直线垂直于另外三个点所决定的平面.在写出你的解答时,要清楚地指明所找出的 p_4 和 p_5 的位置.

解 设 λ 记通过所要求的点 p_4 和 p_5 的直线.设 π 是 p_1p_2 和 p_3 所决定的平面并设 H 是 λ 与 π 的交点.

设 $\boldsymbol{V}_u$ 是向量 $\boldsymbol{HP}_u$ 和 $|\boldsymbol{V}_u|$ 是它的模.我们希望去得到点积

$$d = \boldsymbol{P}_h\boldsymbol{P}_k \cdot \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = (\boldsymbol{V}_k - \boldsymbol{V}_h)\cdot(\boldsymbol{V}_j - \boldsymbol{V}_i) = \boldsymbol{V}_k\cdot\boldsymbol{V}_j - \boldsymbol{V}_k\cdot\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_h\cdot\boldsymbol{V}_j + \boldsymbol{V}_h\cdot\boldsymbol{V}_i \quad ①$$

对于指标 h,k,i,j 在 $\{1,2,3,4,5\}$ 中作不同的选择时都为 0.

由于 λ 是垂直于 π,我们必须有

$$\boldsymbol{V}_h\cdot\boldsymbol{V}_i = 0,\quad h\in\{4,5\} \text{ 和 } i\in\{1,2,3\} \quad ②$$

假如 $h,k\in\{4,5\}$ 和 $i,j\in\{1,2,3\}$,② 导出 ① 的点积是 0.假如 $h\in\{4,5\}$ 和 $k,i,j\in\{1,2,3\}$,② 导出 ① 的 d 变为

$$d = \boldsymbol{V}_k\cdot\boldsymbol{V}_j - \boldsymbol{V}_k\cdot\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_k\cdot(\boldsymbol{V}_j - \boldsymbol{V}_i) = \boldsymbol{HP}_k\cdot\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j \quad ③$$

显然,当且仅当 H 是 $\triangle p_1p_2p_3$ 的垂心(即高的交点)时 ③ 的 d 同时是 0.选取这样的 H,③ 的 d 为 0 导出

$$\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2 \quad ④$$

现在设 $h,i\in\{4,5\}$ 和 $k,j\in\{1,2,3\}$,则 ② 导出

$$d = \boldsymbol{V}_k\cdot\boldsymbol{V}_i + \boldsymbol{V}_4\cdot\boldsymbol{V}_5 \quad ⑤$$

假设 ④,如果 $\boldsymbol{V}_4\cdot\boldsymbol{V}_5 = -\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2$ 就看出 ⑤ 的所有的 d 将是 0.假设 $\triangle P_1P_2P_3$ 是锐角三角形告诉我们 H 是在三角形的内部,则角 $\angle P_1HP_2, \angle P_2HP_3, \angle P_3HP_1$ 中至少一个(实际上是所有的)必须是钝角,这样 ④ 的点积必须等于负的,因此 $\boldsymbol{V}_4\cdot\boldsymbol{V}_5$ 必须是正的;这意味着 P_4 和 P_5 必须是在 λ 的由 H 所决定的相同的半直线上.

现在 P_4 和 P_5 的定位法给出来了设 H 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的垂心和 μ 是过点 H 且垂直于平面 $P_1P_2P_3$ 的两条半直线之一,则 P_4 能够是在 μ 上的任一点而使得 $|\boldsymbol{V}_4|$ 既不是 0 也不是 $(-\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2)^{1/2}$,且 P_5 必须是 μ 上的满足 $|\boldsymbol{V}_5| = -\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2/|\boldsymbol{V}_4|$ 的唯一点.则 ① 的每一个 d 是 0 而且 P_j 没有三点是共线的.

B－1　在整数的有序对(m,n)的可加群中(加法由分量定义为:$(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$),考虑用以下三个元素所生成的子群 H

$$(3,8),(4,-1),(5,4)$$

则 H 有另外的形如

$$(1,b),(0,a)$$

的生成元集合,a,b 为整数且 $a>0$,找出 a.

(称元素 $g_1,\cdots,g_k$ 生成一个子群 H,假如(1) 每个 $g_i\in H$,和(2) 任一个 $h\in H$ 能够写成和 $h=n_1g_1+\cdots+n_kg_k$,其中 n_i 是整数(这里,作为例子,$3g_1-2g_2$ 的意义为 $g_1+g_1+g_1-g_2-g_2$))

解　此解答是 $a=7$,另一个必须为 $b\equiv 5(\bmod 7)$.

子群 H 必须含有 $4(3,8)-3(4,-1)=(0,35)$,$4(5,4)-5(4,-1)=(0,21)$,因此含有 $2(0,21)-(0,35)=(0,7)$,$(0,7)$ 和$(1,b)$生成 H 当且仅当$(1,b)$是在 H 中且存在整数 u,v 和 w 使得

$$(3,8)=3(1,b)+u(0,7)$$
$$(4,-1)=4(1,b)+v(0,7)$$
$$(5,4)=5(1,b)+w(0,7)$$

这些成立当且仅当 $8=3b+7u$,$-1=4b+7v$ 和 $4=5b+7w$.取 $b=5+7k$,k 为任意整数,所期望的系数 u,v 和 w 具有形式 $u=-1-3k$,$v=-3-4k$,$w=-3-5k$.现在只要设 $k=0$ 和注意到$(1,5)=(4,-1)-(3,8)+2(0,7)$是在 H 中就够了.

B－2　在三维欧氏空间中,定义一个平板是落在两个平行平面之间的点的开集.两个平行平面之间的距离称为平板的厚度.给出一个厚度分别为 $d_1,d_2,\cdots$ 的平板的无限序列 $S_1,S_2,\cdots$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}d_i$ 收敛,证明:在空间中存在一个点不被包含在任一平板之中.

解　设 $\sum d_i=d$ 且 S 是半径为 $r>d/2$ 的球.含于平板 S_i 中的 S 的表面积至多是 $2\pi d_ir$.由此可见 S 含于所有平板 S_i 之并中的表面积至多是 $2\pi dr<4\pi r^2=(S$ 的面积).因此存在 S 的一些点不在任何平板之中.

B-3 设 $S_k(a_1,\cdots,a_n)$ 表示 $a_1,\cdots,a_n$ 的第 k 个初等对称函数.当 k 保持固定,对于任意的 $n\geqslant k$ 和任意的 n 重的正实数 $a_1,\cdots,a_n$,找出 $\dfrac{S_k(a_1,\cdots,a_n)}{(S_1(a_1,\cdots,a_n))^k}$ 的上确界(或最小上界) M_k.

(对称函数 $S_k(a_1,\cdots,a_n)$ 是变量 $a_1,\cdots,a_n$ 的 k 重积的和.于是,例如

$$S_1(a_1,\cdots,a_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$S_3(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4$$

注意到上确界 M_k 是决不会达到的,对于固定的 k,当变量的个数 n 无限止增加和值 $a_i>0$ 选取适当时,可任意充分地趋近于 M_k)

解 在 $S_1^k=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k$ 的展开式中,S_k 的每一项以 $k!$ 作为系数出现而另外的系数非负,因此 $S_k/S_1^k\leqslant 1/k!$.

假如我们设每个 $a_i=1$

$$\frac{S_k}{S_1^k}=\binom{n}{k}/n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k}=$$

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

当 k 保持固定和 n 趋向无穷时它趋向 $1/k!$.这些事实证明了此上确界 M_k 是 $1/k!$.

B-4 是否存在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的一个子集 B 使得(1) B 是拓扑闭的,和(2) B 恰好包含圆上的每对对径点中的一个点?

(集合 B 称为拓扑闭的,如果它包含 B 中每个收敛点列的极限)

解 不存在.因为由 $(x,y)\rightarrow(-x,-y)$ 的映射是单位圆到自身的一个同胚,如此的一个子集 B 的补 $-B$ 也将是闭的.于是这样的一个 B 的存在性将使圆 C 成为不相交的非空闭子集之并 $-B\cup B$;这与 C 是连通的事实相矛盾.

B－5　设 $f_0(x) = e^x$ 和对于 $n = 0,1,2,\cdots$ 有 $f_{n+1}(x) = xf'_n(x)$. 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e$$

解　因为 $f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$,我们应用数学归纳法容易证明 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k^n x^k/k!)$,则由于所有项是正的,就得结论.

B－6　证明:假设

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

则:(1) 对于 $n > 1, n(n+1)^{1/n} < n + S_n$;

(2) 对于 $n > 2, (n-1)n^{-1/(n-1)} < n - S_n$.

解　两部分都是应用平均值的不等式容易证明的. 对于(1),我们有

$$\frac{n+S_n}{n} = \frac{(1+1)+(1+\frac{1}{2})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}{n} >$$

$$\sqrt[n]{(1+1)(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{n})} =$$

$$\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot(n+1)/n} = (n+1)^{1/n}$$

所以

$$n + S_n > n(n+1)^{1/n}$$

对于(2),我们有

$$\frac{n-S_n}{n-1} = \frac{(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+\cdots+(1-\frac{1}{n})}{n-1} >$$

$$\sqrt[n-1]{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})} =$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots(n-1)/n} = n^{-1/(n-1)}$$

所以

$$n - S_n > (n-1)n^{-1/(n-1)}$$

第 37 届美国大学生数学竞赛

A－1 P 是以射线 OA 和 OB 为边的角的一个内点.在 OA 上找 X 和在 OB 上找 Y 使得直线段$\overline{XY}$包含 P 且使得距离之积 $(PX)(PY)$ 为最小.

解 设 μ 是 $\angle AOB$ 的角平分线和 λ 是过 P 垂直于 μ 的直线,则 λ 与 OA 和 OB 的交点可分别选作 X 和 Y.

这一作法使得 $OX = OY$ 且存在一个圆 Γ 切 OA 于 X,切 OB 于 Y.设$\overline{X_1Y_1}$是包含点 P 和在 OA 上的点 X_1、OB 上的点 Y_1 的任一其他线段.设 X_2 和 Y_2 是$\overline{X_1Y_1}$与 Γ 的交点.欧氏几何的一个定理说 $(PX)(PY) = (PX_2)(PY_2)$,显然 $(PX_2)(PY_2)$ 小于 $(PX_1)(PY_1)$,因此 $(PX)(PY)$ 是最小值.

我们还能够用另外的方法,比如说选 $(\pi - \angle AOB)/2$ 作为 $\angle OXP$ 或 $\angle OYP$ 的度量来确定 X 和 Y.

A－2 设 $P(x,y) = x^2y + xy^2$ 和 $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$.对于 $n = 1,2,3,\cdots$,令 $F_n(x,y) = (x+y)^n - x^n - y^n$ 和 $G_n(x,y) = (x+y)^n + x^n + y^n$.我们看到 $G_2 = 2Q$,$F_3 = 3P$,$G_4 = 2Q^2$,$F_5 = 5PQ$,$G_6 = 2Q^3 + 3P^2$.证明:事实上,对于每个 n,F_n 或者 G_n 是可以表达为具有整系数的 P 和 Q 的一个多项式.

解 我们容易验证

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-2}Q + (x+y)^{n-3}P$$

$$x^n + y^n = (x^{n-2} + y^{n-2})Q - (x^{n-3} + y^{n-3})P$$

对应的两端相减或相加得到

$$F_n = QF_{n-2} + PG_{n-3},G_n = QG_{n-2} + PF_{n-3} \quad ①$$

对 G_2,F_3,G_4,F_5 和 G_6 和①应用所给出的结果用强数学归纳法现在就得到所要求的结论.

A－3　找出方程 $|p^r - q^s| = 1$ 的所有整数解，其中 p 和 q 是素数，r 和 s 是大于 1 的正整数，证明：没有其它的解.

解　我们证明只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 所给出的解，即 $(p,r,q,s) = (3,2,2,3)$ 或 $(2,3,3,2)$.

明显地或 p 或 q 是 2. 假如 $q = 2$，则 p 是一个适合 $p^r \pm 1 = 2^s$ 的奇素数. 假如 r 是奇数，$(p^r \pm 1)/(p \pm 1)$ 是奇整数 $p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp p^{r-4} + \cdots + 1$，因为 $r > 1$ 故它大于 1，这就与 2^s 没有这样的因子这个事实相矛盾.

现在我们尝试 r 是一个偶数 $2t$，则 $p^r + 1 = 2^s$ 导出

$$2^s = (p^t)^2 + 1 = (2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2$$

这是不可能的，因为对于 $S > 1$ 有 $4 \mid 2^s$，而 $4 \nmid (4n^2 + 4n + 2)$.

还有 $r = 2t$ 和 $p^r - 1 = 2^s$ 导出

$$(p^t)^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n + 1) = 2^s$$

因为或者 n 或者 $n + 1$ 是奇数，所以仅对于 $n = 1, S = 3, p = 3$ 与 $r = 2$ 这才是可能的.

A－4　设 r 是 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ 的一个根和 $r + 1$ 是 $y^3 + cy^2 + dy + 1 = 0$ 的一个根，其中 a, b, c 和 d 是整数. 还令 $P(x)$ 在有理数上是不可约的. 把 $P(x) = 0$ 的另外一根 s 表达为不明显包含 a, b, c 和 d 的 r 的一个函数.

解　我们证明一个解是 $S = -1/(r + 1)$ 和另一个解是 $S = -(r + 1)/r = -1 - (1/r)$. 因为 $p(x)$ 是不可约的，所以 $M(x) = p(x - 1)$ 也是不可约的. 因此 $M(x)$ 仅是在有理数上首项系数为 1 的三次多项式且以 $r + 1$ 作为一个零点，即

$$M(x) = x^3 + cx^2 + dx + 1$$

假如 p 的零点是 r, s 和 t，M 的零点就是 $r + 1, s + 1$ 和 $t + 1$. 现在在 p 和 M 中 x^0 的系数分别是 -1 和 1，这就告诉我们 $rst = 1$ 和 $(r + 1)(s + 1)(t + 1) = -1$，则

$$st = \frac{1}{r}$$

$$s + t = (s + 1)(t + 1) - st - 1 = -\frac{1}{r + 1} - \frac{1}{r} - 1 = -\frac{r^2 + 3r + 1}{r(r + 1)}$$

因此 S 是

$$x^2+\frac{r^2+3r+1}{r(r+1)}x+\frac{1}{r}=0$$

的两个根中的一个.

应用二次公式,我们求得 $s=\frac{-1}{r+1}$ 或 $-(r+1)/r$.

A-5 在 (x,y) 平面上,设 R 是一个凸多边形的内点和边上的点组成的集,令 $D(x,y)$ 是从 (x,y) 到 R 的最近点的距离.

(1) 证明:存在与 R 无关的常数 a,b 和 c,使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-D(x,y)}dxdy=a+bL+cA$$

其中,L 是 R 的周长和 A 是 R 的面积.

(2) 求出 a,b 和 c 的值.

解 以下证明 $a=2\pi,b=1$ 和 $c=1$. 我们用 $I[S]$ 记 $e^{-D(x,y)}$ 在一个区域 S 上的积分. 因为在 R 上 $D(x,y)=0$,所以 $I[R]=A$. 现在令 σ 是 R 的一条边,s 是 σ 的长,$S(\sigma)$ 是由这样的点组成的半带形,这些点到 R 的最近的点位于 σ 上. 化为 (u,v)—坐标,u 按平行于 σ 的方向度量,v 按垂直于 σ 的方向度量. 我们得到

$$I[S(\sigma)]=\int_0^S\int_0^{\infty}e^{-v}dvdu=s$$

对于 R 的所有边这些积分的和 $\sum_1$ 是 L.

假如 v 是 R 的一个顶点,以 v 作为 R 的最近点的所有点落在一个角的内部 $T(v)$,这个角的两条边是从 v 出发且分别地垂直于在 v 相交的凸多边形两条边的射线;令 $\alpha=\alpha(v)$ 是这个角的度量. 应用极坐标,我们有

$$I[T(v)]=\int_0^{\alpha}\int_0^{\infty}re^{-r}drd\theta=\alpha$$

对于 R 的所有顶点 v,$I[T(v)]$ 的和 $\sum_2$ 是 2π. 现在知道原来的二重积分等于 $\sum_2+\sum_1+A=2\pi+L+A$,因此 $a=2\pi$ 和 $b=1=c$.

A-6 假设 $f(x)$ 是定义有所有实数 x 上的一个二次连续可微的实值函数,且对于所有 x 满足 $|f(x)|\leqslant 1$,及 $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$. 证明:存在一个实数 x_0 使得 $f(x_0)+f''(x_0)=0$.

解 设 $G(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$ 和 $H(x)=f(x)+$

$f'(x)$. 因为 H 是连续的,只要去证明 H 改变符号就够了. 我们假设或者对于所有 x 有 $H(x)>0$,或者对于所有的 x 有 $H(x)<0$,得到一个矛盾.

因为 $|f(0)|\leqslant 1$ 和 $G(0)=4$,或 $f'(0)\geqslant\sqrt{3}$ 或 $f'(0)\leqslant-\sqrt{3}$. 我们讨论对于所有 x 有 $H(x)>0$ 且 $f'(0)\geqslant\sqrt{3}$ 的情况,另外的情况是类似的.

假设使 $f'(x)<1$ 的正数 x 的集合 S 是非空的,并设 g 是 S 的最大的下界. 则由 $f'(x)$ 的连续性和 $f'(0)\geqslant\sqrt{3}$ 导出 $g>0$. 现在对于 $0\leqslant x\leqslant g$ 由 $f'(x)\geqslant 0$ 及 $H(x)\geqslant 0$ 导出

$$G(g)=4+\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^g f'(x)(f(x)+f''(x))\mathrm{d}x\geqslant 4$$

由于 $|f(g)|\leqslant 1$,这就推出 $f'(g)\geqslant\sqrt{3}$,则 $f'(x)$ 的连续性告诉我们存在一个 $a>0$ 使得对于 $0\leqslant x<g+a$, $f'(x)\geqslant 1$. 这就与 g 的定义相矛盾,因此 S 是空集. 现在对于所有 x 有 $f'(x)\geqslant 1$,这就推得 $f(x)$ 是无界的,与 $|f(x)|\leqslant 1$ 相矛盾. 这个矛盾意味着 $H(x)$ 必须改变符号和对于某个实数 x_0 有 $H(x_0)=0$.

作为另一个证明,我们应用中值定理推演出存在 a 和 b, $-2<a<0<b<2$ 且

$$|f'(a)|=\frac{|f(0)-f(-2)|}{2}\leqslant\frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\leqslant\frac{1+1}{2}=1$$

类似地有 $|f'(b)|\leqslant 1$,则

$$G(a)=(f(a))^2+(f'(a))^2\leqslant 1+1=2,\ G(b)\leqslant 2$$

因为 $G(0)=4$, $G(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一个内点 x_0 处达到它的极大值,因此 $G'(x_0)=f'(x_0)H(x_0)=0$. 但是 $f'(x_0)\neq 0$,否则 $(f(x_0))^2=G(x_0)\geqslant 4$ 和 $|f(x_0)|>1$. 于是 $H(x_0)=0$.

B-1 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$$

的值. 且用形式 $\ln a-b$ 来表达你的解答,其中 a 和 b 是正整数.

此处 $[x]$ 定义为满足 $[x]\leqslant x\leqslant[x]+1$ 的整数,而 $\ln x$ 是底为 e 的 x 对数.

解 以下证明 $a=4$ 和 $b=1$. 令 $f(x)=[2/x]-2[1/x]$,则我们要求的极限 L 等于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 对于 $n=1,2,\cdots$,在 $2/(2n+1)<x\leqslant 1/n$ 上 $f(x)=0$ 和在 $1/(n+1)<x\leqslant$

$2/(2n+1)$ 上 $f(x)=1$，因此

$$L=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\cdots=-1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)=$$

$$-1+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=-1+2\ln 2=\ln 4-1$$

B－2 假设 G 是元素 A 和 B 所生成的一个群，即 G 的每个元素能够写为有限的"字" $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}\cdots B^{n_k}$，其中 $n_1,\cdots,n_k$ 是任何整数，且如通常一样 $A^0=B^0=1$. 还有，假设 $A^4=B^7=ABA^{-1}B=1, A^2\neq 1$ 和 $B\neq 1$.

(1) 在 G 中形如 C^2 的元素有多少个？C 在 G 中.

(2) 写出用 A 和 B 作为字的每个二次幂.

解 此解答是(1)8；(2)$1,A^2,B,B^2,B^3,B^4,B^5,B^6$. 因为 $B=(B^4)^2, B^3=(B^5)^2, B^5=(B^6)^2$，就回答了(2)，元素是在 G 中的所有二次幂. 因为 B 有 7 阶和 A 有 4 阶，它们是不同的. 为了证明没有另外的二次幂，我们首先注意到 $ABA^{-1}B=1$ 推得 $AB=B^{-1}A$，则

$$AB^2=(B^{-1}A)B=B^{-1}(AB)=$$
$$B^{-1}(B^{-1}A)=B^{-2}A$$

类似地对于在 $\{0,1,\cdots,6\}$ 中的另外的 n 和直至对于所有的整数 n，有 $AB^n=B^{-n}A$. 与此一样，我们得到

$$(B^iA^j)(B^hA^k)=B^uA^v \quad ①$$

其中 $$u=i+(-1)^jh, v=j+k$$

于是形如 B^iA^j 的元素的集合 S 在乘法下是封闭的. 由于 i 和 j 能够限定为 $0\leqslant i\leqslant 6$ 和 $0\leqslant j\leqslant 3$，S 是有限的. 因此 S 是一个群，于是 $S=G$. 则从 ① 可见，在 G 中的二次幂 B^uA^v，其中 $u=i[1+(-1)^j]$ 和 $v=2j$，假如 j 是奇数，$u=0$ 和 $v\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$. 如果 j 是偶数 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$. 于是除了以上所列的，再没有另外的二次幂.

B－3 假设我们有 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，它们中任何一个出现的概率至少为 $1-a$，其中 $a<\frac{1}{4}$. 进一步假设如果 $|i-j|>1$，则 A_i 和 A_j 是相互独立的，然而 A_i 和 A_{i+1} 可以是相关的. 按通常假设，以递推关系 $u_{k+1}=u_k-au_{k-1}, u_0=1, u_1=1-a$，对于 $k=0,1,\cdots$，定义正实数 u_k. 证明：$A_1,\cdots,A_n$ 同时出现的概率至少是 u_n.

解　已经证明:结论对于 $n \geqslant 5$ 时是不成立的,除非对于 $3 \leqslant i \leqslant n$ 将假设强化为 A_i 与 $A_1, A_2, \cdots, A_{i-2}$ 的合并无关.

以下的当 $n = 5$ 时的反例是由 Brooklyn 学院的 D.M.Bloom 教授所提供的.设 $h = 33/37$ 和 $k = 1/(64 + h)$ 设 $p(A_i)$ 是下表的第二行中的那些顶头上出现 A_i 的数目的和

$A_1A_2A_4A_5$	A_4	$A_1A_3A_4A_5$
$12k$	$3k$	$6k$

$A_1A_2A_3A_4A_5$	$A_1A_2A_3A_4$	$A_2A_3A_4A_5$
$7k$	$12k$	$6k$

$A_1A_3A_5$	$A_1A_2A_3A_5$	$A_2A_3A_5$	$A_3A_4A_5$
$3k$	$9k$	$3k$	$3k$

则每个 $p(A_i)$ 是 $49k$ 且对于满足 $|i - j| > 1$ 的所有的 i, j, $p(A_i \wedge A_j) = 37k$.因为 $(49k)^2 = 37k$,原来的独立的假定成立.还有,$p(A_i) = 1 - a$,其中 $a = (15 + h)k < 1/4$.然而,对于任何的 $a \leqslant 1/4$,我们有 $u_5 \geqslant 7/64$ 和 $p(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) = 7k < 7/64$.

B-4　对于在椭圆上的一点 P,设 d 是从椭圆中心到椭圆在 P 点处切线的距离.证明:当 P 在椭圆上变动时,$(PF_1)(PF_2)d^2$ 是一个常数,其中 PF_1, PF_2 是 P 到椭圆两焦点 F_1, F_2 的距离.

解　我们令 $p = (x, y)$ 和椭圆的方程为

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

且 $a > b > 0$,则 $F_1 = (-c, 0)$ 和 $F_2 = (c, 0)$,有 $c^2 = a^2 - b^2$.设 $r_1 = pF_1$ 和 $r_2 = pF_2$,则 $r_1 + r_2 = 2a$ 且

$$r_1r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(4a^2 - (x + c)^2 - y^2 - (x - c)^2 - y^2) =$$

$$2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 = a^2 + b^2 - x^2 - y^2$$

在椭圆于 p 点处的切线上一点 (u, v) 满足

$$\frac{xu}{a^2} + \frac{yv}{b^2} = 1$$

把此写为形式

$$u\cos\theta + v\sin\theta = d$$

$$d^2 = \frac{1}{(x/a^2)^2 + (y/b^2)^2} = \frac{a^4b^4}{b^4x^2 + a^4y^2}$$

但是 $b^4x^2 + a^4y^2 = b^2(a^2b^2 - a^2y^2) + a^2(a^2b^2 - b^2x^2) =$

$$a^2b^2(a^2+b^2-x^2-y^2)=a^2b^2r_1r_2$$

因此 $d^2r_1r_2=a^4b^4r_1r_2/a^2b^2r_1r_2=a^2b^2$,为一个常数.

B－5 求值

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n$$

解 其和是 $n!$,因为它是首项系数为1的 n 次多项式 x^n 的 n 阶差分.

B－6 通常,令 $\sigma(N)$ 记 N 的所有(正整数)因子的和(1和 N 本身是包含在这些因子中的).例如,如果 p 是一个素数,则 $\sigma(p)=p+1$.由"完全"数的概念诱导出的,一个正整数 N 称为是"拟完全的",如果 $\sigma(N)=2N+1$.证明:任意一个拟完全数是一个奇数的平方.

解 令 $N=2^{\alpha}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$,其中,$\alpha$ 和 β 是非负整数和 p_i 是不同的奇素数,则

$$\sigma(N)=\sigma(2^{\alpha})\sigma(p_1^{\beta_1})\cdots\sigma(p_k^{\beta_k})$$

因为 $\sigma(N)=2N+1$ 是奇数,可见 $\sigma(p_i^{\beta_i})$ 是奇数,$1\leqslant i\leqslant k$,但是

$$\sigma(p_i^{\beta_i})=1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\beta_i}$$

是奇数的充要条件是 β_i 为偶数;因为假如 β_i 是奇数,右边部分将是偶数个奇数之和,因此是偶数.可见 N 的奇数部分必须是一个二次幂,这样一来,我们能够写为

$$N=2^{\alpha}M^2,\alpha\geqslant 0 \quad ①$$

这里 M 是奇数,以下只须证明 $\alpha=0$.

因为 N 是拟完全的,$\sigma(N)=2^{\alpha+1}M^2+1$,而由 ① 我们推得

$$\sigma(N)=\sigma(2^{\alpha})\sigma(M^2)=(2^{\alpha+1}-1)\sigma(M^2)$$

因此

$$2^{d+1}M^2+1=(2^{d+1}-1)\sigma(M^2)$$

于是

$$M^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}(2^{\alpha+1}-1)) \quad ②$$

如果 $\alpha>0$,则 $2^{\alpha+1}-1\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$,从而 $2^{\alpha+1}-1$ 有一个素数因子 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.方程 ② 推得

$$M^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p) \quad ③$$

但是当 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ 时,-1 是模 p 的一个二次非剩余,③ 是不可能的,于是 $\alpha=0$.

第 38 届美国大学生数学竞赛

A－1　考虑所有与 $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ 的图形交于四个不同点的直线，设交点为 (x_i, y_i)，$i = 1,2,3,4$. 证明

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

与直线无关且求出它的值.

解　令直线方程为 $y = mx + b$，与图形交于四个点，于是 x_i 是

$$2x^4 + 7x^3 + (3 - m)x - (5 + b) = 0$$

的根，它们的和是 $-7/2$，它们的算术平均 $(\sum x_i)/4$ 是 $-7/8$，与直线无关.

A－2　求出组

$$x + y + z = w$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$$

的所有实数解 x, y, z, w.

解　我们证明 W 必须等于 x, y, z 之一，剩下的另两个未知数必须相差一个负号. 令 $s = x + y$ 和 $p = xy$，则由所给出的方程推得 $w - z = s$ 和

$$\frac{s}{p} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{w} - \frac{1}{z} = \frac{z-w}{zw} = -\frac{s}{zw}$$

由 $s/p = s/(-zw)$ 导出 $s = 0$ 或 $-zw = p$. 假如 $s = 0$，则 $y = -x$ 和 $w = z$. 假如 $-zw = p = xy$，则 $-z$ 和 w 是以 x 和 y 为根的二次方程 $T^2 - sT + p = 0$ 的根，于是这种情况导致 $w = x$ 和 $-z = y$ 或 $w = y$ 和 $-z = x$.

A－3 设 u,f 和 g 是定义在所有实数 x 上的函数，满足

$$\frac{u(x+1)+u(x-1)}{2}=f(x)$$

和

$$\frac{u(x+4)+u(x-4)}{2}=g(x)$$

用 f 和 g 来决定 $u(x)$.

解 我们证明 $u(x)$ 借助于 f 和 g 有无限多的表达式：较为简单的一种是

$$\begin{aligned}u(x)&=g(x)-f(x+3)+f(x+1)+f(x-1)-f(x-3)=\\&\quad -g(x+2)+f(x+5)-f(x+3)+\\&\quad f(x+1)+f(x-1)=\\&\quad g(x+4)-f(x+7)+f(x+5)-f(x+3)+f(x+1)\end{aligned}$$

设 E 是由 $EA(x)=A(x+1)$ 所定义的在函数 A 上的移位算子，则 $(E+E^{-1})u(x)=2f(x)$ 和 $(E^4+E^{-4})u(x)=2g(x)$ 是已给出的. 于是 $(E^2+1)u(x)=2Ef(x)$ 和 $(E^8+1)u(x)=2E^4g(x)$. 由此事实诱导出 E^2+1 和 E^8+1 是在 E 上互质的多项式，我们得到

$$1=\frac{1}{2}(E^8+1)-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)(E^2+1)$$

$$u(x)=\frac{1}{2}(E^8+1)u(x)-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)(E^2+1)u(x)$$

$$u(x)=E^4g(x)-(E^6-E^4+E^2-1)Ef(x)$$

$$u(x)=E^4g(x)+(-E^7+E^5-E^3+E)f(x)$$

$$u(x)=g(x+4)-f(x+7)+f(x+5)-f(x+3)+f(x+1)$$

另外的表达式是应用下式得到的

$$\begin{aligned}g(y)&=-g(y-2)+f(y+3)+f(y-5)=\\&\quad -g(y+2)+f(y+5)+f(y-3)\end{aligned}$$

A－4 对于 $0<x<1$，把

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

表为 x 的一个有理函数.

解 因为 $|x|<1$，故当 $N\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}&=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)=\\&\quad\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\to\frac{1}{1-x}-1=\end{aligned}$$

$$\frac{x}{1-x}$$

A－5 对于整数 p，a 和 b，证明

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$$

p 为一素数，$p>0$ 并且 $a \geqslant b \geqslant 0$.

注：$\binom{m}{n}$ 表示二项系数 $\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

解 如所周知，对于 $i=1,2,\cdots,p-1$ 有 $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ 或等价地在 $z_p[x]$ 中有 $(1+x)^p=1+x^p$，其中 z_p 是整数模 p 的域. 于是在 $z_p[x]$ 中

$$\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k=(1+x)^{pa}=[(1+x)^p]^a=$$
$$[1+x^p]^a=\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{jp}$$

因此在 $z_p[x]$ 中等式

$$\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k=\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{jp}$$

的相同幂的系数必须是模 p 同余的. 我们看到，对于 $b=0,1,\cdots,a$

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$$

A－6 设 $f(x,y)$ 是在正方形

$$S=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

上的一个连续函数. 对于在 S 内部的任何点 (a,b)，设 $S(a,b)$ 是中心在 (a,b)，边平行于 S 的边且含于 S 内的最大正方形. 假如在每个正方形 $S(a,b)$ 上二重积分 $\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 0，问 $f(x,y)$ 必须在 S 上恒为 0 吗？

解 对于在 S 中的 (a,b)，令 $I(a,b)$ 是在矩形 $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$ 上的 $\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 再应用 $a_1=a$，$b_1=b$，当 $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ 时设 $a_{n+1}=a_n-b_n$ 和 $b_{n+1}=b_n$，当 $0 \leqslant a_n < b_n$ 时设 $a_{n+1}=a_n$ 和 $b_{n+1}=b_n-a_n$，由 (a,b) 归纳地定义一个序列 (a_n,b_n). 则由假定推得对于所有 n 有 $I(a,b)=I(a_n,b_n)$. 因为 f 在 s

上是有界的和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,可见对于在 s 中的所有(a,b) 有 $I(a,b) = 0$.

假如不是对于所有 s 中的(x,y) 有 $f(x,y)Q$ 为 0,则 f 必在某个矩形 $R = \{(x,y) \mid c \leqslant x \leqslant d, h \leqslant y \leqslant k\}$ 内为正(或负),因此 $I = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 必须是正的(或负的),但是这矛盾于

$$I = I(h,k) - I(h,d) - I(c,k) + I(c,d) = 0$$

于是 f 在 s 上恒为 0.

B－1 求无限积

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

解
$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \cdots \cdot \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}\right) =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 13}{4 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 13} \cdot \cdots \cdot \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right) =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right) = \frac{2}{3}$$

B－2 给出一个凸四边形 $ABCD$ 和不在 $ABCD$ 平面上的一个点 0,在直线 OA 上找出点 A',在直线 OB 上找出点 B',在直线 OC 上找出点 C',在直线 OD 上找出点 D',使得 $A'B'C'D'$ 是一个平行四边形.

解 设 O' 是在平面 AOC 和 BOD 的交线上的与 O 不同的任何一点,例如 O' 可以是直线 AC 和 BD 的交点.设 A' 是直线 OA 与通过 O' 且平行于 OC 的直线的交点.设 C' 是直线 OC 与通过 O' 且平行于 OA 的直线的交点.则 $OA'O'C'$ 是一个平行四边形且它的对角线 OO' 和 $A'C'$ 在一点 M 处相互平分.在同样方式下选取 B' 和 D',得到一个平行四边形 $OB'O'D'$,其对角线 OO' 和 $B'D'$ 也在线段 OO' 的中点 M 处相互平分.因此线段 $A'C'$ 和 $B'D'$ 相互(在 M 处)平分而 $A'B'C'D'$ 是一个平行四边形(此平行四边形不是唯一的).

B－3　一个（有序的）满足 $x_1+x_2+x_3=1$ 的正无理数的三元组 (x_1,x_2,x_3) 称为"平衡的"，如果每个 $x_i<\frac{1}{2}$. 假如一个三元组不是平衡的，譬如说，假如 $x_i>1/2$，我们执行以下的"平衡行为"

$$B(x_1,x_2,x_3)=(x'_1,x'_2,x'_3)$$

其中 $x'_i=2x_i$，假如 $i\neq j$，$x_j=2x_j-1$. 如果新的三元组不是平衡的，我们在它之上再执行平衡行为. 这个过程继续下去，在执行有限次平衡行为之后常能导致一个平衡三元组吗?

解　设 $x_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}2^{-j}$（其中 $a_{ij}\in\{0,1\}$）是 x_i 的一个二进制展开式. 假如 $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$，此三元组是平衡的. 否则，正好对于一个 i 有 $a_{i1}=1$ 而平衡行为过程 $x'_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j+1}2^{-j}$. 一个不平衡的三元组在以下的任意有限次的平衡行为之后仍然是不平衡的：以选取 a_{ij} 使得恰好 a_{1j},a_{2j},a_{3j} 之一对于每个 j 等于 1，而留心序列 $a_{i1},a_{i2},\cdots$ 中没有一个在一批中重复的，即每个 x_i 是无理数. 这样的解有

$$a_{1j}=1,\quad 当且仅当\ j\in\{1,9,25,49,\cdots\}$$

$$a_{2j}=1,\quad 当且仅当\ j\in\{4,16,36,64,\cdots\}$$

$$a_{3j}=1,\quad 当且仅当\ j\in\{2,3,5,6,\cdots\}$$

B－4　设 C 是在平面上的一条连续的闭曲线且自身不相交，设 Q 是在 C 内的一个点. 证明：在 C 上存在点 p_1 和 p_2 使得 Q 是直线段 p_1p_2 的中点.

解　我们可以假设 $Q=O$ 为原点. 设 $-C$ 是在反射 $P\rightarrow -P$ 下 C 的像. $-C$ 仍是一条包围 O 的连续闭曲线，且因为它们有相同的直径和都包围 O，故 $C\cap -C\neq\varnothing$（因此两者之一都不能够在另一个的外部）. 令 $P_1\in C\cap -C$. 则存在 $P_2\in C$，使得 $P_1=-P_2$. 这就是两个所要求的点.

B－5 假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>1)$ 是实数,且

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

证明:$A<2a_ia_j$ 对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$.

解 从柯西－许瓦兹不等式中,我们有

$$((a_1+a_2)+a_3+a_4+\cdots+a_n)^2\leqslant$$
$$(1^2+1^2+\cdots+1^2)((a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)$$

或 $$\left(\sum a_i\right)^2\leqslant(n-1)\left(\left(\sum a_i^2\right)+2a_1a_2\right)$$

或 $$(1/(n-1))\left(\sum a_i\right)^2\leqslant\left(\sum a_i^2\right)+2a_1a_2$$

应用题设,则我们有

$$A<-\left(\sum a_i^2\right)+\frac{1}{n-1}\left(\sum a_i\right)^2\leqslant$$
$$-\left(\sum a_i^2\right)+\left(\sum a_i^2\right)+2a_1a_2=2a_1a_2$$

类似地,对于 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ 有 $A<2a_ia_j$.

B－6 设 H 是群 G 中一个具有 h 个元素的子群.假设 G 有一个元素 a 使得对 H 中所有的 x 总有 $(xa)^3=1$ 为恒等元.设 p 是全体积 $x_1ax_2a\cdots x_na$ 所成的子集,其中 n 为一个正整数和 x_i 在 H 中.

(1) 证明:p 是一个有限集.

(2) 证明:实际上 p 中元素不会超过 $3h^2$ 个.

解 显然 $1\in H$,还有 $x\in H$ 可导出 $x^{-1}\in H$,则由题设推知 $a^{-1}=a^2$ 和当 $x\in H$ 时 $xaxaxa=1=x^{-1}ax^{-1}ax^{-1}a$.于是我们容易证明

$$axa=x^{-1}a^2x^{-1} \quad ①$$
$$a^2xa^2=x^{-1}ax^{-1} \quad ②$$

设 $$A=\{xay\mid x,y\in H\},B=\{xa^2y\mid x,y\in H\}$$
$$C=\{xa^2ya\mid x,y\in H\},Q=A\cup B\cup C$$

A,B,C 中每个至多有 h^2 个元素,因此 Q 至多有 $3h^3$ 个元素,现在只要证明当每个 $x_i\in H$ 时,$x_1ax_2a\cdots x_na\in Q$ 就行了,我们关于 n 用归纳法证之.

对于 $n=1$,我们看到 $x_1a=x_1a\cdot1\in A\subseteq Q$.现在设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in H$;$x_1ax_2a\cdots x_ka=q,x_{k+1}=z$ 和 $qza=p$,归纳地,我们假设 $q\in Q$ 和想去证明 $p\in Q$.由假定推得 q 是在 A,B 或 C

之中.假设 $q = xay \in A$,则应用 ① 有

$$p = (xay)za = xa(yz)a = x(yz)^{-1}a^2(yz)^{-1} \in B \subsetneq Q$$

假如 $q = xa^2y \in B$,则 $p = xa^2yza \in C \subsetneq Q$,假如 $q = xa^2ya \in C$ 则应用 ① 和 ② 有

$$p = xa^2y(aza) = xa^2y(z^{-1}a^2z^{-1}) = x(a^2(yz^{-1})a^2)z^{-1} = x(yz^{-1})^{-1}a(yz^{-1})^{-1}z^{-1} \in A \subsetneq Q$$

第 39 届美国大学生数学竞赛

A－1 设 A 是从等差级数 $1,4,7,\cdots,100$ 中选出的 20 个不同整数的任意的集合. 证明:在 A 中必有两个不同的整数其和是 104.

解 A 中二十个整数中任何一个必在以下十八个不相交集合的一个之中

$$\{1\},\{52\},\{4,100\},\{7,97\},\{10,94\},\cdots,\{49,55\}$$

因此数对 $\{4,100\},\cdots,\{49,55\}$ 中的某一些(至少两个),必须有两个整数在 A 中. 但是每个这种对的两数和是 104.

A－2 设 $a,b,p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是实数, $a\neq b$. 定义 $f(x)=(p_1-x)(p_2-x)(p_3-x)\cdots(p_n-x)$. 证明

$$\det\begin{bmatrix} p_1 & a & a & a & \cdots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \cdots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \cdots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \cdots & b & p_n \end{bmatrix}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

解 设 M_t 是从已知的矩阵的每个表值中减去 t 所得到的矩阵,设 $G(t)$ 是 M_t 的行列式. 任何一行的表值减去相邻另一行的相应的表值,我们看到 $G(t)$ 关于 t 是线性的. 应用 $G(a)$, $G(b)$ 是三角形矩阵的行列式这一事实,我们注意到 $G(a)=f(a)$ 和 $G(b)=f(b)$. 则线性插值法证明了所要期望的行列式 $G(0)$ 是

$$(bG(a)-aG(b))/(b-a)=(bf(a)-af(b))/(b-a)$$

A－3　设 $p(x)=2+4x+3x^2+5x^3+3x^4+4x^5+2x^6$ 对于 $k, 0<k<5$，定义

$$I_k=\int_0^{\infty}\frac{x^k}{p(x)}\mathrm{d}x$$

对于怎样的 k，I_k 为最小？

解　对于 $-1<k<5$，因为积分收敛，我们能够考虑 I_k 是定义在这个开区间上．令 $x=1/t$，我们求出

$$I_k=\int_0^{\infty}\frac{t^{-k}}{t^{-6}p(t)}\left(\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{t^{4-k}\mathrm{d}t}{p(t)}=I_{4-k}$$

由算术平均－几何平均不等式

$$(x^k+x^{4-k})/2\geqslant\sqrt{x^k\cdot x^{4-k}}=x^2$$

则

$$I_k=(I_k+I_{4-k})/2=\int_0^{\infty}\frac{((x^k+x^{4-k})/2)\mathrm{d}x}{p(x)}\geqslant\int_0^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{p(x)}=I_2$$

于是 I_k 当 $k=2$ 时是最小的．

A－4　集合 S 上的一个“旁路”运算是具有以下性质的从 $S\times S$ 到 S 中的一个映射

$B(B(w,x),B(y,z))=B(w,z),\forall w,x,y,z\in S$

(1) 证明：当 B 是一个旁路时由 $B(a,b)=c$ 导出 $B(c,c)=c$．

(2) 当 B 是一个旁路时，对于在 S 中的任何 x，证明由 $B(a,b)=c$ 导出 $B(a,x)=B(c,x)$．

(3) 对于有限集 s 上具有以下三个性质的一个旁路运算 B 构造一个表：

i 对于所有 s 中的 x，$B(x,x)=x$．

ii 在 S 中存在 d 和 e 使得 $B(d,e)=d\neq e$．

iii 在 S 中存在 f 和 g 使得 $B(f,g)\neq f$．

解　(1) 当 $[w,x,y,z]=[a,b,a,b]$ 时，定义的性质和题设 $B(a,b)=c$ 给我们

$$B(c,c)=B(B(a,b),B(a,b))=B(a,b)=c$$

(2) 当 $[w,x,y,z]=[a,b,x,x]$ 时，定义的性质和 $B(a,b)=c$ 给出

$$B(c,B(x,x))=B(B(a,b),B(x,x))=B(a,x)$$

应用(1) 中的结果和 $[w,x,y,z]=[c,c,x,x]$ 我们有

$$B(c,B(x,x)) = B(B(c,c),B(x,x)) = B(c,x)$$

联合两式,就证明了对于 S 中的任何 x 由 $B(a,b) = c$ 导出

$$B(a,x) = B(c,x)$$

(3) 一个容易的方式去得到一个旁路具有性质 i 是去设 S 是一个笛卡儿乘积 $I \times J$ 和用

$$B((i,j),(h,k)) = (i,k)$$

去定义运算 B.

如果 I 和 J 分别有多于一个元素,性质 ii 和 iii 将成立.除了记号以外,每个旁路是这样得到的.

$S = \{a,b,c,d\}$ 和 $S = \{u,v,w,x,y,z\}$ 时的表如下:

	a 或 c	b 或 d
a 或 b	a	b
c 或 d	c	d

	u 或 x	v 或 y	w 或 z
u 或 v 或 w	u	v	w
x 或 y 或 z	x	y	z

A－5 对于 $i = 1,2,\cdots,n$,设 $0 < x_i < \pi$ 并且取

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

证明

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin x_i}{x_i} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

解 令

$$g(x) = \ln((\sin x)/x) = \ln(\sin x) - \ln x$$

则因为对于 $x > 0$ 有 $x > \sin x$,故对 $0 < x < \pi$,有

$$g''(x) = -\csc^2 x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

于是 $g(x)$ 的图象是向下凸的,因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leqslant g\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = g(x)$$

或 $\sum g(x_i) \leqslant ng(x)$.因为 e^x 是一个递增函数,这就导出

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin x_i}{x_i} = e^{\sum g(x_i)} \leqslant e^{ng(x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

A－6　设在平面上给出 n 个不同的点.证明:它们中相距是单位距离的所有点对的数目少于 $2n^{3/2}$.

解　对于平面上的一个点集 $\{p_1,\cdots,p_n\}$,设 e_i 是从 p_i 到 p_j 为一个单位的 p_j 的数目,则 $E=(e_1+\cdots+e_n)/2$,是具有单位距离的点对的数目.令 c_i 是中心在 p_i 和半径为1的圆,每对圆至多有两个交点,这样 c_i 至多在 $2\binom{n}{2}=n(n-1)$ 个点处相交.只要去处理每个 $e_i\geqslant 1$ 的情况就足够了.

点 p_i 作为 c_j 的一个交点所出现的次数为 $\binom{e_i}{2}$,因此

$$n(n-1)\geqslant \sum\binom{e_i}{2}=\sum e_i(e_i-1)/2\geqslant (1/2)\sum(e_i-1)^2 \qquad ①$$

在①中和以后的所有的和都是在 $i=1,2,\cdots,n$ 之上取的.应用柯西－许瓦兹不等式和①我们有

$$\left(\sum(e_i-1)\right)^2\leqslant\left(\sum 1\right)\left(\sum(e_i-1)^2\right)\leqslant n\cdot 2n(n-1)<2n^3$$

因此

$$\sum(e_i-1)\leqslant\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}$$

从而

$$E=\left(\sum e_i\right)/2\leqslant(n+\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}})/2<2n^{\frac{3}{2}}$$

B－1　求内接于一个圆且有相邻的四条边长为3和另外四条边长为2的一个凸八边形的面积.给出形如 $r+s\sqrt{t}$ 的解,其中 r,s 和 t 为正整数.

解法1　此面积是与内接于一个圆内部的边长间隔地为3和2的一个八边形面积是相同的.对于这样的一个八边形,所有角以 $3\pi/4$ 来度量,我们能够在每条边长为2的边上用适当地补上一个边长为 $\sqrt{2},\sqrt{2},2$ 的等腰直角三角形,把此八边形扩大为一个边长为 $3+2\sqrt{2}$ 的一个正方形,因此所要求的面积是

$$(3+2\sqrt{2})^2-(4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2)=13+12\sqrt{2}$$

解法2　设 r 是圆半径和设 α 和 β 分别是边长为3和2的弦所对中心角的一半,则 $8\alpha+8\beta=2\pi$ 因而 $\beta=(\pi/4)-\alpha$,还有

$$\frac{3}{2r}=\sin\alpha$$

$$\frac{1}{r}=\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2r}{3}\cdot\frac{1}{r}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha-1}{\sqrt{2}}$$

现有 $\cot\alpha=(3+2\sqrt{2})/3=((3+2\sqrt{2})/2)/(3/2)$,因此由圆心到边长为3的一条弦的距离是 $h_3=(3+2\sqrt{2})/2$.类似地到边长为2的一条弦的距离是 $h_2=(2+3\sqrt{2})/2$.

B－2 把

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$

表为一个有理数.

解 设 S 是所要求的和,则

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left(\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+5}\right)+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\cdot$$
$$\left(\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots\right)$$

因此

$$2S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\cdot$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\cdots-\frac{1}{k+n+1}\right)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)=$$
$$\lim_{h\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\right.$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+$$
$$\left.\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\right)=$$
$$\lim_{h\to\infty}\left(1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+2}\right)-$$

$$\frac{1}{h+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h-1}\right)-$$
$$\frac{1}{h+2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\bigg)=$$
$$\frac{6+3+2}{6}+\frac{12+6+4+3}{2\cdot 12}+$$
$$\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+$$
$$\left(\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots\right)=$$
$$\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{2}$$

于是
$$S=7/4$$

B－3　多项式序列$\{Q_n(x)\}$定义如下：$Q_1(x)=1+x$，$Q_2(x)=1+2x$，对于$m\geqslant 1$

$$Q_{2m+1}(x)=Q_{2m}(x)+(m+1)xQ_{2m-1}(x)$$
$$Q_{2m+2}(x)=Q_{2m+1}(x)+(m+1)xQ_{2m}(x)$$

设x_n是$Q_n(x)=0$的最大实数解.证明：$\{x_n\}$是一个递增序列且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

解　显然，$x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{2}$.用归纳法容易证明对于$x\geqslant 0$每个Q_n是正的.因此如果Q_n有零点，$x_n<0$.

归纳地假设$x_1<x_2<\cdots<x_{2m-1}<x_{2m}$，则对于$x>x_{2m-1}$，$Q_{2m-1}(x)>0$.特别地，$Q_{2m-1}(x_{2m})>0$，因此

$$Q_{2m+1}(x_{2m})=Q_{2m}(x_{2m})+(m+1)x_{2m}Q_{2m-1}(x_{2m})=$$
$$(m+1)x_{2m}Q_{2m-1}(x_{2m})<0$$

这推导出对于某个$x>x_{2m}$有$Q_{2m+1}(x)=0$，即$x_{2m+1}>x_{2m}$.类似地，我们证明$x_{2m+2}>x_{2m+1}$.设$a=-1/(m+1)$，应用给出的$Q_n(x)$的递归定义，我们得到

$$Q_{2m+2}(a)=Q_{2m+1}(a)-Q_{2m}(a)=-Q_{2m-1}(a)$$

因此$Q_{2m+2}(a)$和$Q_{2m-1}(a)$中至少有一个是非正的，于是或者$x_{2m+2}\geqslant a$或者$x_{2m-1}\geqslant a$.但这每一种都可导出$x_{2m+2}\geqslant -1/(m+1)$和$x_{2m+3}\geqslant -1/(m+1)$.由此可见对于所有$n$有$-2/n\leqslant x_n<0$，随之有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

B－4 证明：对于任意实数 N，方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$$

有一个 x_1,x_2,x_3,x_4 都是大于 N 的整数的解.

解 显然(1,1,1,1)是一个解.设想把 x_1,x_2,x_3 固定,方程就是关于 x_4 的二次方程,我们看到一个解的 x_4 能够以 $x'_4=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-x_4$ 来替代,当 $x'_4\neq x_4$ 时就得到一个新解.还有,x_i 是能够任意排列的,因为此方程关于 x_i 是对称的.于是我们能够假设 $x_4\leqslant m=\min(x_1,x_2,x_3)$.还假设每个 $x_i\geqslant 1$,则 $x'_4\geqslant 3m^2-m\geqslant m$.这就导出我们能够从解(1,1,1,1)开始,重复地应用以上所叙述的过程得到每个 x_i 为大于 N 的一个整数的方程的一个解.

B－5 求出一个最大的 A,对于 A 存在一个实系数多项式

$$P(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

满足 $0\leqslant P(x)\leqslant 1$,这里 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 假如我们知道 Chebyshev 多项式 $C(x)=8x^4-8x^2+1=\cos(4\arccos x)$ 是对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 满足 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的所有四次多项式 $f(x)$ 中具有最大的首项系数的,此解是十分容易的了;令 $P(x)=(C(x)+1)/2$,就有 4 作为最大的 A.

假如没有这个知识,则能够应用各种代换把此问题改变为等价于满足以上区间条件的较简单的函数的最大 A 的一个问题.取

$$Q(x)=(P(x)+P(-x))/2$$

此条件变为

$$0\leqslant Q(x)=Ax^4+Cx^2+E\leqslant 1,\text{在 }-1\leqslant x\leqslant 1\text{ 上}$$

取 $x^2=y$,这就变为 $0\leqslant R(y)=Ay^2+Cy+E\leqslant 1$ 在 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上.

取 $y=(z+1)/2$ 和 $S(z)=R((z+1)/2)$,我们有

$$0\leqslant S(z)=(A/4)z^2+Fz+G\leqslant 1,\ -1\leqslant z\leqslant 1$$

取 $T(z)=(S(z)+S(-z))/2$,我们得到

$$0\leqslant (A/4)z^2+G\leqslant 1,\ -1\leqslant z\leqslant 1$$

最后,取 $z^2=w$ 就成为

$$0\leqslant (A/4)w+G\leqslant 1, 0\leqslant w\leqslant 1$$

现在很明显,最大的 A 是 4,这个最大值是取 $G=0$ 得到的,

即,用

$$T(z) = z^2, \quad R(y) = (2y-1)^2$$
$$Q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

得到的.

B-6 p 和 n 是正整数.设数 $C_{h,k}(h = 1,2,\cdots,n;k = 1,2,\cdots,ph)$ 满足 $0 \leqslant C_{h,k} \leqslant 1$,证明:

$$\left(\sum \frac{C_{h,k}}{h}\right)^2 \leqslant 2p\sum C_{h,k}$$

其中每个和是在所有可容许的有序对(h,k)上所作的.

解 设 $a_h = (\sum\limits_{k=1}^{ph} C_{h,k})/h$,显然,$0 \leqslant a_h \leqslant P$.我们现在关于 n 用归纳法证明$(\sum\limits_{h=1}^{n} a_h)^2 \leqslant 2p\sum\limits_{h=1}^{n}(ha_h)$,这是等价于问题的结论的.

对于 $n = 1$,有 $a_1^2 \leqslant pa_1 \leqslant 2pa_1$,此即为所要求的.假设对于 $n = m$ 不等式已经成立,则

$$\begin{aligned}(\sum_{h=1}^{m+1} a_h)^2 = (\sum_{h=1}^{m} a_h)^2 + 2a_{m+1}\sum_{h=1}^{m} a_h + a_{m+1}^2 \leqslant \\ 2p\sum_{h=1}^{m}(ha_h) + 2a_{m+1}pm + 2pa_{m+1} \leqslant \\ 2p((m+1)a_{m+1} + \sum_{h=1}^{m}(ha_h)) = \\ 2p\sum_{h=1}^{m+1}(ha_h)\end{aligned}$$

这就是所期望的.

第 40 届美国大学生数学竞赛

A－1 找出正整数 n 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1\ 979$$

且乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 尽可能地大.

解 我们发现 $n=660$,并且所有的 a_i 中除掉一个是2外,其它都是 3.理由如下:

没有一个 a_i 能够比 4 大,因为我们能够通过 5 被 $2\cdot3$,6 被 $3\cdot3$,7 被 $3\cdot4$ 等代换而使乘积增大. 又因为 $2\cdot4<3\cdot3$ 与 $2\cdot2\cdot2<3\cdot3$,所以在 a_i 中不能既有 2 又有 4,或者有三个 2.还有,因为 $4\cdot4<2\cdot3\cdot3$,所以亦不能有两个 4.显然,没有一个 a_i 是 1.这样,a_i 除了取 3 以外只可能是一个 4 或一个 2 或两个 2,由 $1\ 979=3\cdot659+2$,所以这仅有的一个例外是一个 2,且 $n=660$.

A－2 确定常数 k 的充要条件使得存在实值连续函数 $f(x)$,对所有的 x,满足 $f(f(x))=kx^9$.

解 充要条件是 $k\geqslant0$.若 $k\geqslant0$,我们发现 $f(x)=\sqrt[4]{k}x^3$ 满足 $f(f(x))=kx^9$.相反地,我们注意到 $k\neq0$ 及对一切实数 x 有 $f(f(x))=kx^9$ 可推出 f 能取到一切实数值.由 kx^9 确定了 f 是一对一的,事实上从 $f(a)=f(b)$ 可导出 $ka^9=f(f(a))=kb^9$,所以 $a=b$.但是,从实数集 R 到其自身上的一个连续的一对一函数 f 必定是严格单调的.当 f 为单调时,通常是递增的或者是递减的,$f(f(x))$ 将总是递增的.所以当 $k<0$ 时,不可能等于 kx^9.

A－3 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是满足

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}\quad,n=3,4,5,\cdots$$

的一个非零实数序列.若对于无限多个 n 值来说,x_n 是一个整数,试确定 x_1 和 x_2 的充要条件.

解法 1 我们将看到条件是 $x_1 = x_2 = m$,m 是某个整数.设 $r_n = 1/x_n$,那么

$$r_n = (2x_{n-2} - x_{n-1})/x_{n-2}x_{n-1} = 2r_{n-1} - r_{n-2}$$

且 r_n 构成了一个算术级数.当 n 是在一个无限集 S 之中时,如果 x_n 是一个非零整数,对于 S 中的n,r_n 满足 $-1 \leqslant r_n \leqslant 1$,并且其它的 r_n 除掉有限个以外,由于被套在 S 中 n 的那些r_n 的中间因而也落在这个区间之中.因为当公差 $r_{n+1} - r_n$ 不等于零时,一个算术级数的项是无界的,所以这种情况只能在 r_n 都相等时才能产生.r_n 的相等性导出了 $x_1 = x_2 = m$ 是一个整数.显然,条件也是充分的.

解法 2 设 r_n 构成了上面定义的算术级数.如果当 $i \neq j$ 时,x_i 与 x_j 都是整数,那么 r_i,r_j 以及公差$(r_i - r_j)/(i - j)$ 都是有理数.由此得出 r_1 与 r_2 是有理数.所以 $r_1 = a/q$ 且$r_2 = (a + d)/q$,a,b 和q 都为整数,于是,$x_n = 1/r_n = g/(a + (n - 1)d)$.因为 q 只有有限个整数因子,所以只有在 $d = 0$ 的情况下才能对无限多个 n 得到x_n 是一个整数.这就给出了与第一个解法同样的条件.

A-4 令 A 是由平面上$2n$ 个点所组成的一个集合,这 $2n$ 个点中任意三点都不共线.假定其中的 n 点着以红色,剩下的几点着以蓝色.证明或推翻:存在 n 条闭的直线段,其中任意两条都不相交.使得每一条线段的两个端点就是 A 中的两个着以不同颜色的点.

解 把每一个红色点与一个蓝色点以一对一方式而配对的方法为有限种(实际上是 $n!$种).所以可找到一种配对方法,按照这种方法把一对相配的点连接起来而得到的线段长之和为最小.我们现在证明这种配对方法的 n 条线段中没有两条是相交的.

设红色点 R 与R' 分别和B 与B' 配对,并假设线段 RB 与线段 $R'B'$ 相交.由三角形不等式可推得这些线段长度的和超过了线段 RB' 和$R'B$ 的长度之和.于是交 B 与B' 就会给出一种具有更小的线段长度之和的配对方法.这个矛盾证明了具有不相交线段的一种配对方法的存在性.

A-5 用$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数,并且 $S(x)$表示序列$[x]$,$[2x]$,$[3x]$,$\cdots$.证明:方程 $x^3 - 10x^2 + 29x - 25 = 0$ 存在不同的实数解 α 和β,使得有无限多个正整数既出现在 $S(\alpha)$ 之中,又出现在 $S(\beta)$ 之中.

解 设 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 25$，则下表

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	-5	1	-1	-5	5

说明了 $f(x)$ 有三个实数解 a,b,c，并且 $1 < a < 2, 2 < b < 3, 5 < c < 6$. 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 与 $S(a), S(b)$ 以及 $S(c)$ 共同具有的整数个数分别是 $[n/a]$，$[n/b]$ 和 $[n/c]$，由

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

我们看到

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] + \left[\frac{n}{c}\right] - n\right\} = \infty$$

因此在 $S(a), S(b), S(c)$ 三个集合中，至少两个集合要出现无限多个正整数. 这就推得了这三个集合中的某对集合必定具有无限个.

A - 6 设 $0 \leqslant p_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$，证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x - p_i|} \leqslant 8n(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1})$$

对于某个满足 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 的 x 成立.

解 对于 $k = 0,1,\cdots,2n-1$，设 I_k 是开区间 $(k/2n, [k+1]/2n)$. 在这 $2n$ 个区间 I_k 之中，存在 n 个区间不包含任何 p_i. 我们取这 n 个区间的中点为 x_j. 令 $|x_j - p_i| = d_{ij}$，以及

$$B = 8n(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1})$$

对于确定的 i 来说，d_{ij} 满足 $d_{ij} \geqslant 1/4n$，最多其中的两个不满足 $d_{ij} \geqslant 3/4n$，最多四个不满足 $d_{ij} \geqslant 5/4n$ 等，因此

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leqslant 2\sum_{h=0}^{n-1} \frac{4n}{1+2h} = B$$

(此不等式能够改进一下). 于是我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}}\right) \leqslant nB$$

显然，存在一个 j 的值满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(1/d_{ij}) \leqslant B$，而且对于这个 j 来说，x_j 即为所求之 x.

B－1　证明或推翻:至少存在一条直线,它是曲线 $y = \cosh x$ 在点 $(a,\cosh a)$ 的法线,同时亦是曲线 $y = \sinh x$ 在点 $(c,\sinh x)$ 的法线.

(一条曲线上某点的法线指的是该点切线的垂直线.还有,$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ 和 $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$).

解　我们假定存在这样一条公法线并得到一个矛盾.由此假设推得

$$-\frac{a-c}{\cosh a - \sinh x} = \cosh c = \sinh a \qquad ①$$

因为对于一切实数 x 来说,$\cosh x > 0$,同时只有在 $x > 0$ 时 $\sinh x > 0$,所以由式 ① 可得 $a > 0$.利用式 ① 以及对一切 x,$\sinh x < \cosh x$ 这样一个事实,我们得到

$$\sinh c < \cosh c = \sinh a < \cosh a$$

这个式子与 $a > 0$ 以及当 $x > 0$ 时,$\cosh x$ 递增这个事实可推出 $c < a$.于是式 ① 中最左面的表示式是负的同时不能够等于 $\cosh c$.这个矛盾证明了不存在公法线.

B－2　设 $0 < a < b$,计算

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_0^1 (bx + a(1-x))^t\mathrm{d}x\right)^{1/t}$$

(最后的解答不可以包含加、减、乘、除、取幂以外的任何运算)

解　设 $u = bx + a(1-x)$,则定积分变成

$$I(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u^t\mathrm{d}u = \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(1+t)(b-a)}$$

利用标准的微积分方法计算含有未定元的表达式的极限,得出

当 $t \to 0$ 时,$(I(t))^{1/t} \to e^{-1}(b^b/a^a)^{1/(b-a)}$.

B－3　设 F 是一个有限域,具有 m 个元素,m 是一个奇数.又 $p(x)$ 为形如

$$x^2 + bx + c, b, c \in F$$

的 F 上一个不可约(即不可分解)多项式,问 F 中有多少个元素 k 使得 $p(x) + k$ 在 F 上不可约?

解　令 $r = (m-1)/2$,我们证明对于 F 的 r 个元素 k 来说,$q(x) = p(x) + k$ 在 F 上不可约.因为 m 是奇数,所以 F 的特征数

不是2,$1+1=2\neq 0$,$2^{-1}b$是F的一个元素h,F的这$2r+1$个元素能够表示为$0,f_1,-f_1,\cdots,f_r,-f_r$的形式,并且$\{0,f_1^2,f_2^2,\cdots,f_r^2\}$是$F$里$r+1$个不同的平方所组成的集合.现在

$$q(x)=(x+h)^2-(h^2-c-k)$$

在F上不可约当且仅当它在F里没有零点.也就是说,当且仅当h^2-c-k不是F里这$r+1$个平方f^2中的一个.所以从F的$2r+1$个元素中去掉$r+1$个形如h^2-c-f^2的元素后,k必定是留下来的r个元素中的一个.

B-4 (1)求齐次线性微分方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+(18x+3)y=0$$

的一个不恒为零的解.

巧妙地猜测一下解的形式是会有帮助的.

(2)设$y=f(x)$是非齐次微分方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+$$
$$(18x+3)y=6(6x+1)$$

的解,且有$f(0)=1$和$(f(-1)-2)(f(1)-6)=1$,求出整数a,b,c使得$(f(-2)-a)(f(2)-b)=c$.

解 (1)以e^{mx}试算证明了$y=e^{3x}$满足齐次方程.以多项式$x^d+\cdots$试算证明了d必定是2.并且再以x^2+px+q试算证明了$y=x^2+x$是一个解.解答是任意线性组合$he^{3x}+k(x^2+x)$,常数h和k中至少有一个不为0.

(2)容易看出,$y=2$满足非齐次方程.因此$f(x)$具有$2+he^{3x}+k(x^2+x)$的形式.现在$f(0)=1$,给出$2+h=1$或$h=-1$,则$(f(-1)-2)(f(1)-6)=1$导出

$$-e^{-3}(2+2k-e^3-b)=1,(2k-4)e^{-3}=0,k=2$$

因此
$$f(x)=2-e^{3x}+2(x^2+x)$$
$$f(-2)=6-e^{-6},f(2)=14-e^6$$

所以我们令$a=6$,$b=14$以及$c=1$.

我们注意到如果在(1)得到一个解答$g(x)$以后停止猜测,用标准的代换$y=g(x)z$,随后用$z'=w$能把非齐次方程简化为一个线性方程,此线性方程可以用一个众所周知的方法解出.

B-5 令C是平面中的一个闭的凸集,它包含点$(0,0)$,但是不包含其它具有整数坐标的点.假设C的面积$A(C)$相等地分布在四个象限之中,证明:$A(C)\leqslant 4$.

解 作一条切触C的辅助直线,使得这条线的一边没有C的

点.通过点(0,1)有一条这样的辅助直线,设它的斜率是 m.假设 $m \geqslant 1/2$,我们得到了 C 在第四象限里的面积部分不超过1.当 $m \leqslant -1/2$ 时,亦相类似.所以我们假定 $-1/2 < m < 1/2$,并且假定对于分别通过点(1,0),(0,-1)和(-1,0)的辅助直线亦有类似的结果.由这四条辅助直线所构成的四边形的角中至少有一个不是锐角;我们在第一象限里的顶点 (h,k) 处能够取这个角 α,于是 $\alpha \geqslant \pi/2$ 推得 $h+k \leqslant 2$,并由此推得 C 在第一象限里的面积不超过1,所以 $A(C) \leqslant 4$.

B-6 设 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k (k=1,2,\cdots,n)$,其中 x_k 和 y_k 是实数以及 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,令

$$\pm\sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$$

的实部的绝对值是 r,证明:$r \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$.

解 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 并设 $a+b\mathrm{i}$ 是 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ 的任意一个平方根,则

$$ab = X\cdot Y = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

并且

$$a^2-b^2 = \|X\|^2-\|Y\|^2 = (x_1^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

柯西-许瓦兹不等式告诉我们

$$|X\cdot Y| \leqslant \|X\|\cdot\|Y\|$$

因此
$$|a|\cdot|b| \leqslant \|X\|\cdot\|Y\|$$

于是假定 $|a| > \|X\|$ 就会导出 $|b| < \|Y\|$,此式与 $a^2 = \|X\|^2-\|Y\|^2+b^2$ 一起将得到 $a^2 < \|X\|^2$,所以 $|a| < \|X\|$,矛盾.因此这样的假设不成立,而得到 $r=|a| \leqslant \|X\|$.由于 $\|X\|^2 \leqslant (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$,这就推得了所期望的 $r \leqslant |x_1|+\cdots+|x_n|$.

第 41 届美国大学生数学竞赛

A－1 设 b 与 c 是确定的实数,并设十个点 (j,y_j) $(j=1,2,\cdots,10)$ 落在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上.对于 $j=1,2,\cdots,9$,设 I_j 是给定抛物线在 (j,y_j) 和 $(j+1,y_{j+1})$ 点的切线的交点.确定次数最小的多项式函数 $y=g(x)$,该函数的图象通过所有九个点 I_j.

解 我们证明 $g(x)=x^2+bx+c-(1/4)$.容易看出给定抛物线在 $P_j=(j,y_j)$ 处的切线方程是 $y=L_j$,其中 $L_j=(2j+b)x-j^2+c$.解联立方程 $y=L_j$ 和 $y=L_{j+1}$,我们求得 $x=(2j+1)/2$,所以在 I_j 处 $j=(2x-1)/2$.把此表达式代以 L_j 中的 j,就给出了上面的 $g(x)$.

A－2 设 r 和 s 为正整数,导出满足

$$3^r\cdot 7^s=\operatorname{lcm}[a,b,c]=\operatorname{lcm}[a,b,d]=\operatorname{lcm}[a,c,d]=\operatorname{lcm}[b,c,d]$$

的正整数的有序四元组 (a,b,c,d) 的个数的一个公式.此解答应该是 r 和 s 的一个函数.

(注:$\operatorname{lcm}[x,y,z]$ 表示 x,y,z 的最小公倍数)

解 我们证明这个数为 $(1+4r+6r^2)(1+4s+6s^2)$.每个 a,b,c,d 必须形如 3^m7^n,其中 m 在 $\{0,1,\cdots,r\}$ 中,n 在 $\{0,1,\cdots,s\}$ 中.还有在四个数中至少有两个数的 m 必须是 r,至少有两个数的 n 必须是 s.有一种方式是所有的四个数有 $m=r$,有 $4r$ 种方式有一个 m 在 $\{0,1,\cdots,r-1\}$ 中而另外三个等于 r.并且有 $\binom{4}{2}r^2=6r^2$ 种方式有两个 m 在 $\{0,1,\cdots,r-1\}$ 之中而另外两个等于 r.于是就有 $1+4r+6r^2$ 种可容许的 m 的选择.类似地,可容许的 n 的选择为 $1+4s+6s^2$ 种.

A－3 计算

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

解 设 I 是所给出的定积分且 $\sqrt{2}=r$. 我们证明 $I=\pi/4$. 应用 $x=(\pi/2)-u$,我们就有

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\frac{-du}{1+\cot^r u}=\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^r u du}{\tan^r u+1}$$

因此 $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^r x}{1+\tan^r x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\pi/2$$

和 $$I=\pi/4$$

A－4 (1)证明:存在不全为0且每个绝对值小于一百万的整数 a,b,c,满足

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}$$

(2)设 a,b,c 是不全为0的整数且每一个的绝对值小于一百万.证明

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}$$

解 (1) r,s,t 在 $\{0,1,\cdots,10^6-1\}$ 中,令 S 是 10^{18} 个实数 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}$ 所组成的集合,且设 $d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})10^6$,则在 S 中的每个 x 是在区间 $0\leqslant x<d$ 之中.把这个区间分为 $10^{18}-1$ 个"小的"区间 $(k-1)e\leqslant x<ke$,其中 $e=d/(10^{18}-1)$ 且 k 在值 $1,2,\cdots,10^{18}-1$ 上选取.用分类原则,S 的 10^{18} 个数中必有两个数在同一个小区间之中,而且因为 $c<10^{-11}$,所以它们的差 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ 给出了所要求的 a,b,c.

(2)令 $F_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$,$F_2,F_3,F_4$ 是形如 $a\pm b\sqrt{2}\pm c\sqrt{3}$ 的另外的数.应用 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的不可约性和 a,b,c 不全为0的事实,我们容易看出 F_i 是不为0的(这个证明是在1955年5月5日举行的第15届竞赛的问题A－1.对于这个证明可参看由MAA出版的《威廉·洛威尔·普特南数学竞赛问题和解答:1938～1964》.我们还容易看到乘积 $P=F_1F_2F_3F_4$ 是一个整数,因此 $|P|\geqslant 1$.因为对于每个 i $|F_i|<10^7$,于是,$1/|F_i|>10^{-7}$,从而

$$|F_1|\geqslant 1/|F_2F_3F_4|>10^{-21}$$

A－5 令 $P(t)$ 是一个不为常数的实系数多项式.证明:联立方程组

$$0=\int_0^x P(t)\sin t\mathrm{d}t=\int_0^x P(t)\cos t\mathrm{d}t$$

只有有限多个实数解.

解 令 $Q=P-P''+P^{iv}-\cdots$.反复应用分部积分法,所给出的方程组变为

$$\int_0^x P(t)\sin t\mathrm{d}t=-Q(x)\cos x+Q'(x)\sin x+Q(0)=0$$

$$\int_0^x P(t)\cos t\mathrm{d}t=Q(x)\sin x+Q'(x)\cos x-Q'(0)=0$$

这就推出

$$Q(x)=Q'(0)\sin x+Q(0)\cos x \quad ①$$

因为 P 和 Q 是次数为正数的多项式,因此 ① 的右边有是界的.方程 ① 所具有的全部解在某个区间 $|x|\leqslant M$ 中.在这样一个区间中,$P(x)\sin x$ 只有有限多个零点,并且应用 Rolle 定理 $\int_0^x P(x)\sin t\mathrm{d}t=0$ 至多还有另外的一个零点.

A－6 设 C 是在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的所有实值连续可微函数的集合,且 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$.求出最大实数 u,对于 C 中的所有 f 满足

$$u\leqslant\int_0^1|f'(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

解 我们证明 $u=1/\mathrm{e}$.因为 $f'-f=(f\mathrm{e}^{-x})'\mathrm{e}^x$ 和对于 $x\geqslant 0$ 有

$$\mathrm{e}^x\geqslant 1$$

$$\int_0^1|f'-f|\mathrm{d}x=\int_0^1|(f\mathrm{e}^{-x})'\mathrm{e}^x|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(f\mathrm{e}^{-x})'\mathrm{d}x=[f\mathrm{e}^{-x}]_0^1=1/\mathrm{e}$$

为了看出 $1/\mathrm{e}$ 是一个最大的下界,我们利用函数 $f_a(x)$,把 $f_a(x)$ 定义为

$$f_a(x)=(\mathrm{e}^{a-1}/a)x,\quad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$f_a(x)=\mathrm{e}^{x-1},\quad a\leqslant x\leqslant 1$$

令 $m=\mathrm{e}^{a-1}/a$,则

$$\int_0^1 |f'_a(x) - f_a(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |m - mx|\,\mathrm{d}x =$$
$$m\left(a - \frac{a^2}{2}\right) = \mathrm{e}^{a-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

当 $a \to 0$ 时,这个表达式趋近 $1/\mathrm{e}$. 此函数 $f_a(x)$ 没有一个连续导数,但是我们能够弥补这个方面,在积分中保持如同我们所希望的那样小的变化,于是证明了没有超过 $1/\mathrm{e}$ 的数能够是一个上界.

> B－1　对于所有实数 x 来说,哪一个实数 c 满足 $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2 \leqslant \mathrm{e}^{cx^2}$?

解　当且仅当 $c \geqslant 1/2$ 时,此不等式成立. 当 $c \geqslant 1/2$ 时

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n(n!)} = \mathrm{e}^{x^2/2} \leqslant \mathrm{e}^{cx^2}$$

对于所有 x 都成立. 因为当 $n = 0, 1, \cdots$ 时,$(2n)! \geqslant 2^n(n!)$.

相反地,如果对于所有 x 不等式成立,则

$$0 \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{cx^2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{x^2} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + cx^2 + \cdots) - (1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots)}{x^2} = c - \frac{1}{2}$$

这样,$c \geqslant \frac{1}{2}$.

> B－2　设 S 是由所有满足下列六个联立条件组
> $$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$
> $$x + y + z \leqslant 11$$
> $$2x + 4y + 3z \leqslant 36$$
> $$2x + 3z \leqslant 24$$
> 的点 (x, y, z) 所组成的三维空间中的一个立体.
> (1) 确定 S 的顶点的个数 v.
> (2) 确定 S 的棱的条数 e.
> (3) 假设线性函数 $bx + cy + z$ 在点 (x, y, z) 处得到 S 上的极大值,并且 $(2,5,4)$ 是这些点 (x, y, z) 中的一个. 试在 bc 平面上画出由点 (b, c) 所组成的集合的草图.

解　(1) $V = 7$, 此七个顶点是 $V_0 = (0,0,0)$, $V_1 = (11,0,0)$, $V_2 = (0,9,0)$, $V_3 = (0,0,8)$, $V_4 = (0,3,8)$, $V_5 = (9,0,2)$ 和 $V_6 = (4,7,0)$.

(2) $e = 11$. 此十一条棱是 $V_0V_1, V_0V_2, V_0V_3, V_1V_5, V_1V_6,$

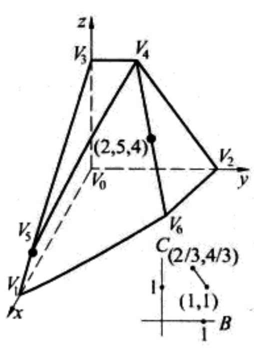


图 1

$V_2V_4, V_2V_6, V_3V_4, V_3V_5, V_4V_5$ 和 V_4V_6(图 1).

(3) 所要求的是适合 $b+c=2$ 和 $2/3 \leqslant b \leqslant 1$ 的那些(b,c). 令 $L(x,y,z)=bx+cy+z$,因为 L 是线性的而且$(2,5,4)$是在棱 V_4V_6 上(图 1),L 在 S 上的极大值必假定在 V_4 和 V_6 处,并且当(x,y,z)取遍另外的五个顶点时,从

$$L(0,3,8)=L(4,7,0) \geqslant L(x,y,z)$$

得到了关于 b 和 c 的条件.

B－3　由初始条件 $u_0=a$ 和递推式 $u_{n+1}=2u_n-n^2$ 所定义的序列对于所有的 $n \geqslant 0$ 有 $u_n>0$,哪些实数 a 能构成这样的序列?

(用最简单的形式表达此解)

解法1　我们证明当且仅当 $a \geqslant 3$ 时,对于一切 n, $u_n>0$. 令 $\Delta u_n=u_{n+1}-u_n$,则由递推式(即差分方程)可得$(1-\Delta)u_n=n^2$. 因为 n^2 是一个多项式,所以

$$u_n=(1-\Delta)^{-1}n^2=(1+\Delta+\Delta^2+\cdots)n^2=$$
$$n^2+(2n+1)+2=n^2+2n+3$$

是一个特解(这用代换法容易验证). 又因为 $u_n=k\cdot 2^n$ 是相伴的齐次差分方程 $u_{n+1}-2v_n=0$ 的解,所以全解是 $u_n=n^2+2n+3+k\cdot 2^n$. 当 $u_0=a$ 时,所期望的解是 $u_n=n^2+2n+3+(a-3)2^n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n/(n^2+2n+3))=+\infty$,所以如果 $a-3<0$,对于足够大的 n 来说,u_n 将是负的. 相反地,若 $a-3 \geqslant 0$,则每一个 $u_n>0$ 是显然的.

解法2　我们看到 $u_0=a, u_1=2a$,并且对于 $n \geqslant 2$ 能够用数学归纳法证明

$$u_n=2^na-\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-1-k}k^2$$

因此当 $n \geqslant 0$ 时,$u_n>0$ 当且仅当 $a>\sum\limits_{k=1}^{n-1}2^{-1-k}k^2$,又此式成立的充要条件是 $a \geqslant L$,这时 $L=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-1-k}k^2$. 令 D 为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$,则当 $|x|<1$ 时

$$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$D(1-x)^{-1}=(1-x)^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$$

$$D(1-x)^{-2}=2(1-x)^{-3}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$$

令 $$g(x)=2x^3(1-x)^{-3}+x^2(1-x)^{-2}$$

则 $$L=g(1/2)=3$$

所以解答是所有的 $a\geqslant 3$.

B－4　设 $A_1,A_2,\cdots,A_{1\,066}$ 是一个有限集 X 的子集，对于 $1\leqslant i\leqslant 1\,066$，满足 $|A_i|>\frac{1}{2}|X|$. 证明：存在十个 X 的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$，使得每个 A_i 至少包含 $x_1,\cdots,x_{10}$ 中的一个.（此处 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数）

解　我们要求证明的结果在 $|X|<10$ 时显然不成立，因此我们假设 $|X|\geqslant 10$ 或 A_j 是不同的，它推出 $|X|\geqslant 10$.

令 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$，$m=|X|$. 并且把使得 x_i 在 A_j 中的 j 的个数设为 n_i，使得 x_i 在 A_j 中的有序对 (i,j) 的个数设为 N，则

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_m=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{1\,066}|>1\,066(m/2)=533m$$

因此 n_i 中的一个，比如说 n_1，定超过 533.

设 $B_1,\cdots,B_s$ 是那些不包含 x_1 的集合 A_j，$Y=\{x_2,x_3,\cdots,x_m\}$，则 $S=1\,066-n_1\leqslant 532$ 且每一点 $|B_j|>|Y|/2$. 如同任何其它 x_i 那样，我们能够假定 x_2 至少是在那样多的 B_j 之中. 设 $C_1,\cdots,C_t$ 是不包含 x_2 的 B_j，如上，我们能够证明 $t\leqslant 265$.

继续按此方法，第四次集合序列 $D_1,\cdots,D_u$ 中集合的个数将不超过 132. 第五次直到第十次序列中集合的个数分别将不超过 65，32，15，7，3 和 1. 如果 X 的元素不少于 10 个，那么我们得到了所要求的元素 $x_1,\cdots,x_{10}$.

B－5　对于每个 $t\geqslant 0$，设 S_t 是定义在闭区间 $[0,1]$ 上的所有非负的，递增的，凸的，连续的实值函数 $f(x)$ 的集合. 这些函数满足

$$f(1)-2f(2/3)+f(1/3)\geqslant t(f(2/3)-2f(1/3)+f(0))$$

导出 t 的必要和充分条件使 S_t 在乘法下是封闭的.

（这里封闭性的意思是：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 S_t 中，则它们的乘积 $f(x)g(x)$ 也在 S_t 中. 函数 $f(x)$ 是凸的，当且仅当 $f(su+(1-s)v)\leqslant sf(u)+(1-s)f(v)$ 对所有的 $0\leqslant s\leqslant 1$ 成立）

解 解答是 $1 \geqslant t$(或 $0 \leqslant t \leqslant 1$).两个非负的递增连续实值函数的乘积 fg 有同样的性质.利用从 $0 \leqslant a \leqslant c$ 与 $0 \leqslant b \leqslant d$ 推得 $ad + bc \leqslant cb + cd$ 这个事实证明当 f 与 g 为凸的时候,fg 亦是凸的.对一切 $t, f(x) = x$ 在 S_t 里.如果 S_t 在乘法之下封闭,则 x^2 也在 S_t 里,所以

$$2/9 = 1 - 2(4/9) + (1/9) \geqslant t(4/9 - 2(1/9)) = 2t/q$$

或 $1 \geqslant t$.相反地,当 $1 \geqslant t$ 时,一个冗长的、直接的计算可以验证 S_t 是封闭的.

B-6 关于整数 d 与 $n(1 \leqslant d \leqslant n)$ 的一个有理数的无限数组 $G(d,n)$ 定义如下

$$G(1,n) = \frac{1}{n}$$

$$G(d,n) = \frac{d}{n}\sum_{i=d}^{n} G(d-1,i-1), d > 1$$

对于 $1 < d \leqslant p$ 且 p 为素数,证明:$G(d,p)$ 可以表示为整数 s 和 t 的商 s/t,其中 t 不是 p 的整数倍数.

(例如,$G(3,5) = 7/4$,它的分母 4 不是 5 的一个倍数)

解 令

$$F_d(x) = \sum_{n=d}^{\infty} G(d,n)x^n$$

则

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$$

$$F'_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

通过在两边求出 x^{n-1} 的系数并且利用

$$nG(d,n) = d\sum_{i=d}^{n} G(d-1,i-1)$$

可得到

$$F'_d(x) = dF_{d-1}(x)F'_1(x)$$

则归纳法给出了 $F_d(x) = (F_1(x))^d$.现在,对于 $1 < d \leqslant p$,x^p 在 $F_d(x)$ 里的系数 $G(d,p)$ 是 x^p 在 $\left(\sum_{n=1}^{p-d+1} x^n/n\right)^d$ 里的系数,因此 $G(d,p) = s/t$,s,t 是整数且 t 是小于 p 的素数的乘积.

第42届美国大学生数学竞赛

A－1　设 $E(n)$ 表示能使 5^k 整除乘积 $1^1 2^2 3^3 \cdots n^n$ 的最大的整数 k，计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^2}$$

解　我们来证明这个极限是 $\frac{1}{8}$. 令 $T(m) = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$，以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$h = [\ln_5 n]$，而 e_i 是 $(n/5^i) - [n/5^i]$，$1 \leqslant i \leqslant h$，于是

$$E(n) = 5T\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) + 5^2T\left(\left[\frac{n}{5^2}\right]\right) + \cdots + 5^hT\left(\left[\frac{n}{5^h}\right]\right)$$

$$2E(n) = 5\left(\left[\frac{n}{5}\right]^2 + \left[\frac{n}{5}\right]\right) + 5^2\left(\left[\frac{n}{5^2}\right]^2 + \left[\frac{n}{5^2}\right]\right) + \cdots + 5^h\left(\left[\frac{n}{5^h}\right]^2 + \left[\frac{n}{5^h}\right]\right) =$$

$$5\left(\frac{n^2}{5^2} - \frac{2e_1 n}{5} + e_1^2 + \frac{n}{5} - e_1\right) + \cdots + 5^h\left(\frac{n^2}{5^{2h}} - \frac{2e_h n}{5^h} + e_h^2 + \frac{n}{5^h} - e_h\right)$$

$$\frac{E(n)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^h}\right) + \frac{h}{2n} - \frac{e_1 + e_2 + \cdots + e_h}{n} + \frac{5(e_1^2 - e_1) + \cdots + 5^h(e_h^2 - e_h)}{2n^2}$$

由于 $5^h \leqslant n < 5^{h+1}$ 而 $0 \leqslant e_i < 1$，可见当 $n \to \infty$ 时，$\frac{h}{n} \to 0$，而 $\frac{E(n)}{n^2} \to \frac{1}{8}$.

A－2　在 8×8 格的国际象棋盘 C 上的两个方格称为相邻的，如果他们共有一个角点或一条边，又整数 g 称为一个 C－隙，如果把 C 上的方格每编一次从 $1,2,\cdots$，到64的号时，总存在两个相邻的方格，它们的差至少等于 g. 定出最大的 C－隙 g 的值.

解 对于任何一种编号法,顶多用 7 步就可以从标号为 1 的方格到达标号为 64 的方格,这里一步是指移向相邻方格;因此 $(64-1)/7=9$ 是一个 C - 隙.实际上,它还是最大的 C - 隙,因为对坐标是 (a,b),$1\leqslant a\leqslant 8$,$1\leqslant b\leqslant 8$ 的方格,我们可以将它编为 $8(a-1)+b$ 号,于是便可发现这时比 9 大的数都不是 C - 隙.

A - 3 求

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\int_0^1\int_0^1\frac{e^x-e^y}{x-y}dxdy\right)$$

或者证明此极限不存在.

解 以 $G(t)$ 表示题中的二重积分,那么用洛必达法则,我们有

$$\lim_{t\to\infty}(G(t)/e^t)=\lim_{t\to\infty}(G'(t)/e^t)$$

故由

$$G'(t)=\int_0^t\frac{e^x-e^t}{x-t}dx+\int_0^t\frac{e^y-e^t}{y-t}dy=2\int_0^t\frac{e^x-e^t}{x-t}dx$$

接着再用 $e^x=e^t(1+(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots)$ 即知 $t\to\infty$ 时,$e^{-t}G'(t)\to\infty$,实际上对于充分大的 t,我们有

$$\frac{G'(t)}{2e^t}=\int_0^t\frac{e^{x-t}-1}{x-t}dx=\int_0^t\frac{1-e^{-y}}{y}dy>$$
$$\int_1^t\frac{1-e^{-y}}{y}dy>(1-e^{-1})\ln t$$

A - 4 在一个单位正方形内一点 P 沿某一条直线以单位速度运动.当它碰到正方形的一个角点时就逸出;当它碰到正方形的一条边时,它的运动沿着使入射角等于反射角的反射直线进行.

以 $N(T)$ 表示使点 P 从一个固定的内点 P_0 出发在 T 个单位时间以内就可逸出的起始方向的数目.求最小的常数 a,对于这个 a,存在常数 b 与 c 使

$$N(T)\leqslant aT^2+bT+c$$

对于一切 $T>0$ 及一切起始点 P_0 成立.

解 适当建立坐标系,使得所给定的单位正方形有一个角点是(0,0),而与此点相关联的两条边位于两条坐标轴上.利用反射的性质可以知道,点 P 在 T 个单位时间内能够逸出的充分与必要

条件是:从 P_0 发出的射线,如果其方向与点 P 的路径的第一段一致,则在 T 个单位长度内必通过一个格点(即两个坐标都是整数的点).因此,$N(T)$ 至多等于以 P_0 为中心,以 T 为半径的圆内的整点数$L(T)$.用中心为格点的单位正方形来覆盖这个圆并考虑面积时,可见

$$N(T) \leqslant L(T) \leqslant \pi\left(T + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

因此 $N(T)$ 有一个形如 $\pi T^2 + bT + c$ 的上界,其中 b,c 是两个定数.当 P_0 恰有一个坐标是无理数时

$$N(T) = L(T) \geqslant \pi\left(T - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

如果 $a < \pi$,那么 $N(T)$ 的这个下界,当 T 充分大时就会大于 $aT^2 + bT + c$;因此 π 就是所要找的 a.

A - 5　设 $P(x)$ 是一个实系数的多项式.构造多项式 $Q(x)$ 如下

$$Q(x) = (x^2 + 1)P(x)P'(x) + x((P(x))^2 + (P'(x))^2)$$

假定方程 $P(x) = 0$ 有 n 个大于1的互异实根.证明或否定下列结论:方程 $Q(x) = 0$ 至少有 $2n - 1$ 个互异的实根.

解　我们来证明 $Q(x)$ 至少有 $2n - 1$ 个实的零点.首先可以看出

$$Q(x) = F(x)G(x)$$

其中

$$F(x) = P'(x) + xP(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}P(x))'$$

$$G(x) = xP'(x) + P(x) = (xP(x))'$$

我们可以假定 $P(x)$ 恰有 n 个大于 1 的零点 a_i,且 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.由洛尔(Rolle)定理可见 $F(x)$ 有 $n - 1$ 个零点 b_i,而 $G(x)$ 有 n 个零点 c_i,它们满足

$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < a_n$$

$$0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \cdots < c_n < a_n$$

如果对于所有的 i,$b_i \neq c_{i+1}$,这些 b_i 与 c_i 便是 $Q(x)$ 的 $2n - 1$ 个不同的零点了,所以我们假定对某个 i,$b_i = c_{i+1} = r$,于是

$$P'(r) + rP(r) = 0 = rP'(r) + P(r)$$

因而

$$(r^2 - 1)P(r) = 0$$

由于 $r = b_i > 1$,所以 $P(r) = 0$.由于 $a_i < r < a_{i+1}$,这与上面所说 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 已是 $P(x)$ 的全部大于 1 的零点的假定矛盾.因此,$Q(x)$ 至少有 $2n - 1$ 个不同的实零点.

A－6 假定$\triangle ABC$的每个顶点都是(x,y)平面中的格点，并且在此三角形内部恰好只有一个格点P.延长线段AP交BC于E.定出线段的长度比

$$\frac{|AP|}{|PE|}$$

在一切可能情形中的最大值.（格点是指它的x坐标与y坐标都是整数的点）

解 把平面上的每一个点X都当作以点A为起点，点X为终点的向量$\overrightarrow{AX}$，令

$$L=(B+C)/2, M=C/2, N=B/2$$

（它们依次是BC，AC与AB边的中点）.又令

$$S=(2L+M)/3=(B+C+M)/3$$

$$T=(2L+N)/3=(B+C+N)/3$$

$$Q=2P-B$$

$$R=3P-B-C$$

显然Q与R都是格点.同时$Q\neq P$，$R\neq P$，因为由$Q=P$可推出$P=B$，而$R=P$可推出P是在边BC上的点L.因此Q不在$\triangle ABC$内部，而这又推出P不在$\triangle NBL$内部，因为满足$f(X)=2X-B$的线性变换f把$\triangle NBL$各边放大一倍，并把放大后的三角形（及其内部）变$\triangle ABC$（及其内部）.与此相似地可以证明P不在$\triangle MCL$的内部.利用变换$g(X)=3X-B-C$及R不在$\triangle LMN$内部这个事实，我们可知P不在$\triangle LST$内部.因为A到线段ST的距离等于线段ST与BC间距离的五倍.由此可见$|AP|/|PE|\leqslant 5$.5这个上界即为所求，这可看下列例子：$A=(0,0)$，$B=(0,2)$而$C=(3,0)$，在$\triangle ABC$内部，$P=(1,1)=T$中唯一的格点，而$|AT|/|TE|=5$.

B－1 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(5h^4-18h^2k^2+5k^4)\right)$$

解 记$S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$.应用微积分教科书中的标准办法可知

$$S_2(n)=\left(\frac{n^3}{3}\right)+\left(\frac{n^2}{2}\right)+an$$

和
$$S_4(n)=\left(\frac{n^5}{5}\right)+\left(\frac{n^4}{2}\right)+bn^3+cn^2+dn$$

其中a,b,c,d都是常数.于是二重和数等于

$$10nS_4(n)-18(S_2(n))^2=(2n^6+5n^5+\cdots)-(2n^6+6n^5+\cdots)=-n^5+\cdots$$

因此所求的极限值是 -1.

B－2　对于一切满足 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant t\leqslant 4$ 的实数 r,s,t,定出

$$(r-1)^2+\left(\frac{s}{r}-1\right)^2+\left(\frac{t}{s}-1\right)^2+\left(\frac{4}{t}-1\right)^2$$

的最小值.

解　我们首先设 $0<a<b$ 并在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上找使

$$f(x)=\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{b}{x}-1\right)^2$$

取极小的 x. 设 $\frac{x}{a}=z,\frac{b}{a}=c$,则

$$f(x)=g(z)=(z-1)^2+\left(\frac{c}{z}-1\right)^2$$

由 $g'(z)=0$ 可得

$$z^4-z^3+cz-c^2=(z^2-c)(z^2-z+c)=0$$

它的唯一正根是 $z=\sqrt{c}$. 由于 $0<a<b,c>1,\sqrt{c}>1$,以及

$$g(1)=g(c)=(c-1)^2=(\sqrt{c}-1)^2(\sqrt{c}+1)^2>2(\sqrt{c}-1)^2=g(\sqrt{c})$$

因此 $g(z)$ 在 $z=\sqrt{c}$ 处达到它在 $1\leqslant z\leqslant c$ 上的最小值. 由此可知,$f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的最小值在 $x=a\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{ab}$ 处达到. 因此所给定的 r,s,t 的函数的最小值在 $r=\sqrt{s},t=\sqrt{4s}=2r$ 以及 $s=\sqrt{rt}=r\sqrt{2}$ 处达到. 由此可推得 $r=\sqrt{2},s=2,t=2\sqrt{2}$. 于是所要找的最值等于 $4(\sqrt{2}-1)^2=12-8\sqrt{2}$.

B－3　证明:存在无穷多个具有以下性质的正整数 n:如果 p 是 n^2+3 的一个素因子,则对于某个满足 $k^2<n$ 的整数 k,p 也是 k^2+3 的一个因子.

解　当 m 遍取一切非负整数值时

$$n=(m^2+m+2)(m^2+m+3)+3$$

可取到无穷多个正整数值. 令 $f(x)=x^2+3$,对于 $\{f(m)\}=3,4,7,12,17,28,39,52,67,84,\cdots$ 作一番考察,使我们的猜想会有

$$f(x)f(x+1)=f(x(x+1)+3)=f(x^2+x+3)$$

这个等式是容易证明的. 应用这个性质和上面写过的 m 与 n 的关系,就可有

$$f(n)=f(m^2+m+2)f(m^2+m+3)=\\f(m^2+m+2)f(m)f(m+1)$$

于是由素数 p 满足 $p\mid f(n)$ 可以推出 $p\mid f(k)$，k 等于 m，$m+1$ 或 m^2+m+2. 由于 k 的所有这些可能的值都满足 $k^2<n$，所需的结果就已证得.

B－4 设 $\boldsymbol{V}$ 是由实的 5×7 矩阵组成的具有下列性质的集合：当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{V}$ 而 r 与 s 是标量(即实数)时，$r\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{V}$. 证明或否定下列断语：若 $\boldsymbol{V}$ 含有秩为 0,1,2,4 和 5 的矩阵时，它也含有秩为 3 的矩阵.(非零矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩，是指它的具有非零行列式的最大子矩阵的阶数)

解 以 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(a,b,c)$ 表示由下列元素构成的 5×7 矩阵 (a_{ij})

$$a_{11}=a,a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{55}=b,a_{16}=a_{27}=c$$

其余的 a_{ij} 都等于零. 这样，全体这种 $\boldsymbol{M}$(其中的 a,b,c 取任意的实数值) 在线性组合下是封闭的. 此外，$\boldsymbol{M}(0,0,0)$，$\boldsymbol{M}(1,0,0)$，$\boldsymbol{M}(0,0,1)$，$\boldsymbol{M}(0,1,0)$ 和 $\boldsymbol{M}(1,1,0)$ 的秩依次等于0,1,2,4和5，但是对这种 $\boldsymbol{M}$，其秩不会等于3，因为 $b\neq 0$ 时秩必是4或5，而 $b=0$ 时秩只会是0,1或2.

B－5 设 $B(n)$ 为正整数 n 的二进位表达式中1的数目. 例如 $B(6)=B(110_2)=2$，而 $B(15)=B(1111_2)=4$. 判定

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{n(n+1)}\right)$$

是或不是一个有理数，这里 $\exp(x)$ 表示 e^x.

解 如果在二进位表示中 n 共有 d 位，那么 $2^{d-1}\leqslant n$，因而

$$B(n)\leqslant d\leqslant 1+\ln_2 n$$

这立即可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(B(n)/n(n+1))$ 收敛到一个实数 S，因此在以下的两种解答中对收敛级数施行的操作是可以进行的.

每个 n 都可以唯一地表为 $n_0+2n_1+2^2n_2+\cdots$，其中 n_i 取自 $\{0,1\}$(并且除了有限多个 i 以外，$n_i=0$). 由于

$$1+2+2^2+\cdots+2^{i-1}=2^i-1$$

我们可知，当且仅当 n 具有 $k+2^i+2^{i+1}j$ 的形状时，$n_i=1$(这里 k 是 $\{0,1,\cdots,2^i-1\}$ 中的某个数，而 j 属于 $\{0,1,2,\cdots\}$). 于是

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{\infty}n_i=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^i-1}\frac{1}{(k+2^i+2^{i+1}j)(1+k+2^i+2^{i+1}j)}$$

应用等式$\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$可见,最里面一层的和数可缩短,而

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^i(1+2j)}-\frac{1}{2^i(2+2j)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}$$①

由$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$,所以

$$S=\left(\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i}\right)\ln 2=2\ln 2=\ln 4$$

故 e^s 等于有理数 4.

另法:我们注意到 $B(2m)=B(m),B(2m+1)=1+B(2m)=1+B(m)$,于是

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{n(n+1)}=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B(2m)}{2m(2m+1)}=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1+B(m)}{(2m+1)(2m+2)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B(m)}{2m(2m+1)}=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}+$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}+\sum_{m=1}^{\infty}B(m)$$
$$\left(\frac{1}{2m(2m+1)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}\right)=$$
$$\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B(m)}{m(m+1)}=\ln 2+\frac{1}{2}S$$

因此 $S/2=\ln 2,S=\ln 4$,因而 $\exp(S)$ 是有理数 4.

B-6 设 C 是在笛卡儿平面上某个固定的单位圆,对于每边同 C 相切的任何一个凸多边形 P.以 $N(P,h,k)$ 表示中心在 (h,k) 的单位圆周与 P 的公共点数.设 $H(P)$ 是满足 $N(P,x,y)\geqslant 1$ 的全部点 (x,y) 形成的区域,$F(P)$ 是 $H(P)$ 的面积,求能使

$$\frac{1}{F(P)}\iint N(P,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<u$$

对于一切 P 都成立的最小的数 u,其中的二重积分展布在 $H(P)$ 上.

① 原文为$\sum_{i=0}\frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j}$.

解 令 $L = L(P)$ 为 P 的周长.我们可看出 $H(P)$ 是由 P 所围成的区域,以 P 的边为底边高等于 1 的那些矩形以及单位圆的一些扇形(这些扇形拼起来正好形成一个单位圆)所组成.因此

$$F(P) = \left(\frac{L}{2}\right) + L + \pi = \pi + \frac{3L}{2}$$

如果 A 和 B 是 P 的两个相邻的角点,边 AB 对于重积分 I 的贡献是由以 A 和 B 为中心的两个半径为 1 的半圆和线段 CD 与 EF 所围出的区域(图 1)面积的两倍.图中的 $ABCD$ 与 $ABEF$ 都是矩形,并且 $|AD| = 1 = |AF|$.

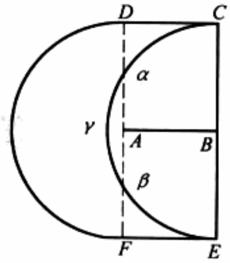


图 1

其所以等于这块面积的两倍是因为还有另一个与它对称的区域,即由 CD,EF 和以 A 和 B 为中心的两个圆周的另外二个半圆周所围成的部分.这两个区域的相重叠的部分计入了两次.由 Cavalieri 割补原则②可知 AB 边对于 I 的贡献等于 AB 的长度之四倍,所以 $I = 4L$,从而有

$$\frac{I}{F(P)} = \frac{4L}{\pi + \frac{3L}{2}} = \frac{8}{3 + \frac{2\pi}{L}}$$

我们可以使 L 变得任意大(例如设 P 是这样的三角形,它有两个内角都与直角任意接近),于是所要找的最小上界就等于 8/3.

① 即指在图 1 左边的半圆割去弓形 $\alpha A\beta\gamma$ 后所余的面积与右边的半圆割去同一弓形所余的面积相等.

第 43 届美国大学生数学竞赛

A－1 设 V 是由坐标平面上满足以下条件的所有点组成的区域：

$$|x| \leqslant y \leqslant |x| + 3, y \leqslant 4$$

求 V 的质心$(\overline{x},\overline{y})$.

解 设 T 是以$(0,3)$，$(-1,4)$，$(1,4)$为顶点的三角形内部或边上的点组成的区域，U 是以$(0,0)$，$(-4,4)$，$(4,4)$为顶点的三角形的内部或边上的点的集合.那么 T 和 V 仅在边界相交，并且它们之并为 U. T 和 U 的质心分别为$(0,11/3)$和$(0,8/3)$. T，V 和 U 的面积分别为 1，15 和 16，利用把面积当做重量的加权平均就有

$$1 \cdot 0 + 15\overline{x} = 16 \cdot 0, 1 \cdot \frac{11}{3} + 15\overline{y} = 16 \cdot \frac{8}{3}$$

由此就得出

$$\overline{x} = 0, \overline{y} = 13/5$$

A－2 设 x 是正实数，$B_n(x) = 1^x + 2^x + \cdots + n^x$，证明：级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n(\ln_n 2)}{(n\ln_2 n)^2}$$

的收敛性或发散性.

解 由于 $x = \ln_n 2 > 0$，$B_n(x) = 1^x + 2^x + \cdots + n^x \leqslant n \cdot n^x$，并且

$$0 \leqslant \frac{B_n(\ln_n 2)}{(n\ln_2 n)^2} \leqslant \frac{n \cdot n^{\ln_n 2}}{(n\ln_2 n)^2} = \frac{2}{n(\ln_2 n)^2}$$

根据整数判别法可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(2/n(\ln_2 n)^2)$ 收敛，因此由比较判别法即得所给级数收敛.

A－3 计算

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x} dx$$

解

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\arctan(ux)\bigg|_{u=1}^{u=\pi}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^{\infty}\int_1^{\pi}\frac{1}{1+(xu)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}x=$$

$$\int_1^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(xu)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}u=$$

$$\int_1^{\pi}\frac{1}{u}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln\pi$$

A－4 设满足初始条件 $y(0)=1,z(0)=0$ 的微分方程组 $y'=-z^3,z'=y^3$ 有唯一的对所有实数有定义的解 $y=f(x),z=g(x)$.证明:存在正常数 L,使得对于所有的实数

$$f(x+L)=f(x),g(x+L)=g(x)$$

解 所给的微分方程组蕴含

$$y^3y'+z^3z'=z'y'-y'z'=0$$

因此 y^4+z^4 是常数,由此及初条件就得出 $y^4+z^4=1$.把 x 看成时间变量,(y,z) 看成平面上的点,那么这些点就以速度

$$((y')^2+(z')^2)^{1/2}=(z^6+y^6)^{1/2}$$

描出曲线 $y^4+z^4=1$.在任意时刻 y^4 或 z^4 至少是$\frac{1}{2}$,因而速度至少是$\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}\right)^6\right)^{1/2}$,因此运动的点将在某个时间 L 内完全环绕曲线一周,由于速度仅仅依赖于 y 和 z(而不依赖于 x),因此点在做周期为 L 的运动.

A－5 设 a,b,c 和 d 都是正整数,$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

又设 $a+c\leqslant 1\,982,r>0$,证明:$r>\frac{1}{1\,983^3}$.

解 我们有

$$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{bd-ad-bc}{bd}>0$$

因此 $bd-ad-bc$ 是正整数,因而 $r\geqslant\frac{1}{bd}$.不失一般性,可设 $b\leqslant d$.如果 $b\leqslant d\leqslant 1\,983$,那么 $r\geqslant 1\,983^{-2}\geqslant 1\,983^{-3}$.由于 $a+c\leqslant 1\,982$,所以如果 $1\,983\leqslant b\leqslant d$,我们就得出

$$r\geqslant 1-\frac{a}{1\,983}-\frac{c}{1\,983}\geqslant 1-\frac{1\,982}{1\,983}=\frac{1}{1\,983}>\frac{1}{1\,983^3}$$

余下的情况是 $b < 1\,983 < d$.这时当 a,b,c 固定,使得 r 最小的 d 值是 $1+[bc/(b-a)]$,其中$[x]$是不大于 x 的最大整数.由于 $b-a \geqslant 1$,故 d 至多为 $1\,983b$,但是 $c < 1\,982$,因此 $r \geqslant \frac{1}{bd} \geqslant \frac{1}{1\,983b^2} > \frac{1}{1\,983^3}$.综上,对所有可能的情况,欲证的不等式都成立.

A－6　设 σ 是从$\{1,2,3,\cdots\}$到自身的 1－1 映射.$x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是满足以下 3 个性质的实数叙列:

(1) $|x_n|$ 是 n 的严格递减的函数;

(2) 当 $n\to\infty$ 时,$|\sigma(n)-n|\cdot|x_n|\to 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k = 1$.

证明或者否定以上条件蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)} = 1$.

解　我们否定这一断言.设 $y_n = 1/(n+1)\ln(n+1)$,那么由于当 $n\to\infty$ 时 $y_n\to 0$ 并且 $y_1 > y_2 > \cdots$,因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n$ 收敛到某个 $g>0$.设 $x_n = (-1)^{n+1}y_n/g$,那么显然 x_n 满足条件(1)和(3).设 $a_0,a_1,\cdots$ 是下面将给出确切定义的正整数.对 $i=0,1,\cdots,b_0=0,b_{i+1}=b_i+4a_i$.又设 1－1 映射 σ 定义如下:

对 $b_i < n \leqslant b_i+2a_i,\sigma(n)=2n-1-b_i$;

对 $b_i+2a_i < n \leqslant b_{i+1},\sigma(n)=2n-b_{i+1}$.

那么 $0<\sigma(n)<2n$,因此 $|\sigma(n)-n|<n$,那样

$$|\sigma(n)-n||x_n| < \frac{n}{g(n+1)\ln(n+1)}$$

而这个不等式蕴含条件(2).设 $C(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,D(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{\sigma(i)}$,那么

$$D(b_i+2a_i)-C(b_i+2a_i)=\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{a_i}y_{b_{i+2j}}+\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{a_i}y_{b_{i+2j+2k-1}} \quad ①$$

由积分判别法可知 $y_2+y_4+y_6+\cdots$ 发散到 $+\infty$ 并且 a_i 可以选的足够大使得 ① 的第一个和对每个 i 都超过 1,因此可使得对无穷多个 $n,D(n)>1+C(n)$.如此一来 $D(n)$ 和 $C(n)$ 将不可能收敛到同一极限.

B-1 设 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点.用最小的 n 把 $\triangle AMB$ 分成 n 个三角形,使得这些三角形可以重新拼成一个与 $\triangle AMC$ 全等的三角形.

解 最小的 n 是2.设 D 是 AB 边的中点,沿 DM 将 $\triangle AMB$ 剪开,那么可以通过把 BD 边放在 AD 边上而把 $\triangle BMD$ 放在 $\triangle ADM$ 旁边,如此形成的三角形是全等于 $\triangle AMC$ 的.由于在一般情况下,$\triangle AMB$ 不一定全等于 $\triangle AMC$,因此不存在 $n=1$ 的分割方法.

B-2 设 $A(x,y)$ 表示平面上满足不等式 $m^2+n^2\leqslant x^2+y^2$ 的整点 (m,n) 的数目.设

$$g=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k^2}$$

把

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,y)e^{-x^2-y^2}dxdy$$

表示成 g 的多项式.

解 设

$$r=\sqrt{x^2+y^2},R(m,n)=\{(x,y)\mid m^2+n^2\leqslant x^2+y^2\}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,y)e^{-x^2-y^2}dxdy$$

又设 $\sum$ 和 $\sum'$ 分别表示遍历整数 m 和遍历整数 n 求和.那么

$$I=\sum\sum{}'\int\int_{R(m,n)}e^{-x^2-y^2}dxdy=$$

$$\sum\sum{}'\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{m^2+n^2}}^{\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=$$

$$\sum\sum{}'\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]\Big|_{\sqrt{m^2+n^2}}^{\infty}d\theta=$$

$$\sum\sum{}'\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{-m^2-n^2}d\theta=$$

$$\sum\sum{}'\pi e^{-m^2-n^2}=\pi\left(\sum e^{-m^2}\right)\left(\sum{}'e^{-n^2}\right)=$$

$$\pi(2g-1)^2$$

B－3　设 p_n 是当从集合$\{1,2,3,\cdots,n\}$中随机地互相独立地选取整数 c,d 时，$c+d$ 是一个完全平方数的概率，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n\sqrt{n})$ 存在，并且将此极限表示成 $r(\sqrt{s}-t)$ 的形式，其中 s 和 t 是整数，而 r 是有理数.

解　设 $a(n)=[\sqrt{n+1}]$，$b(n)=[\sqrt{2}n]$，其中$[x]$是不大于 x 的最大整数. 对$\{1,2,\cdots,a(n)\}$中的 t，有 t^2-1 个有序对(c,d)使得 c 和 d 都在 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，而 $c+d=t^2$. 对$\{1+a(n),2+a(n),\cdots,b(n)\}$中的 t，有 $2n+1-t^2$ 个有序对(c,d)使得 c 和 d 都在 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，而 $c+d=t^2$. 因此所有合适的(c,d)的总数 $F(n)$ 是

$$F(n)=\sum_{t=1}^{a(n)}(t^2-1)+\sum_{t=1+a(n)}^{b(n)}(2n+1-t^2)=$$
$$\left(2\sum_{t=1}^{a(n)}t^2\right)-\left(\sum_{t=1}^{b(n)}t^2\right)-a(n)+[b(n)-a(n)](2n+1)=$$
$$\frac{2a(n)[1+a(n)][1+2a(n)]}{6}-$$
$$\frac{b(n)[1+b(n)][1+2b(n)]}{6}-$$
$$2(n+1)a(n)+(2n+1)b(n)$$

由于 $p(n)=F(n)/n^2$，故

$$\lim_{n\to\infty}(p_n\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}F(n)/n^{3/2}=$$
$$\frac{2.2}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(n)}{\sqrt{n}}\right)^3-\frac{2}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b(n)}{\sqrt{n}}\right)^3-$$
$$2\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}\frac{b(n)}{\sqrt{n}}=$$
$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3-2+2\sqrt{2}=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

B－4　设 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 是不同的整数，使得对每个整数 k，

$$(n_1+k)(n_2+k)\cdots(n_s+k)$$

是 $n_1n_2\cdots n_s$ 的倍数，对以下每个断言，给出证明或反例：

(1) 对某个 i，$|n_i|=1$；

(2) 如果所有的 n_i 都是正数，那么$\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}=\{1,2,\cdots,s\}$.

解　设 $P_k=(n_1+k)(n_2+k)\cdots(n_s+k)$. 我们有对所有的整数 $P_0\mid P_k$.

(1)$P_0 \mid P_{-1}$ 以及 $P_0 \mid P_1$ 蕴含 $P_0^2 \mid (P_{-1}P_1)$ 或

$$(n_1^2 n_2^2 \cdots n_s^2) \mid ((n_1^2 - 1)(n_2^2 - 1)\cdots(n_s^2 - 1))$$

由于对充分大的 k,$P_k \neq 0$,因此所有的 n_i 都不为 0.因而,对每个 i 都有 $n_i^2 \geqslant 1, n_i^2 > n_i^2 - 1 \geqslant 0$,因此 $P_0^2 > P_{-1}P_1 \geqslant 0$.此式以及 $P_0^2 \mid (P_{-1}P_1)$ 蕴含 $P_{-1}P_1 = 0$,那样就有对某个 i,$|n_i| = 1$.

(2)P_k 是 k 的 s 阶多项式.由于 P_0 整除每个 P_i,故 P_0 也整除 n 阶差分

$$\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}P_i = s!$$

而由于 $P_0 > 0$,这就意味着 $P_0 \leqslant s!$.又由于 P_0 是 s 个不同整数的乘积,由此就得出

$$\{n_1, n_2, \cdots, n_s\} = \{1, 2, \cdots, s\}$$

B－5　对每个 $x > e^e$,归纳地定义一个叙列 $S_x = u_0, u_1, u_2, \cdots$ 如下:$u_0 = e$,对 $n \geqslant 0$,u_{n+1} 是 u_n 的以 x 为底的对数.证明:S_x 收敛到一个数 $g(x)$ 并且以这种方式定义的函数 g 当 $x > e^e$ 时是连续的.

解　由于对 $x > e$,$x^{1/x}$ 的导数是负的,因此

(1) 当 $e \leqslant a < b$ 时,有 $a^b > b^a$;

从 u 的定义可知 $u_0 = e$,并且

(2) $x = (u_0)^{u_1} = (u_1)^{u_2} = (u_2)^{u_3} = \cdots$;因此有

(3) $u_{n+1} = (u_n \ln u_{n-1})/\ln u_n$.

由于当 $x > e^e$ 时,$u_1 = \ln x > e = u_0$.现在 $u_1 > u_0$ 蕴含 $\ln u_1 > \ln u_0$ 并且 $n = 1$ 时的(3)蕴含 $u_2 < u_1$.又有(2)和(1)蕴含 $(u_1)^{u_2} = (u_0)^{u_1} > (u_1)^{u_0}$,这给出 $u_2 > u_0$.现在 $u_2 < u_1$ 和 $n = 2$ 时的(3)蕴含 $u_3 > u_2$.又有(2)和(1)蕴含 $(u_2)^{u_3} = (u_1)^{u_2} < (u_2)^{u_1}$,因此 $u_3 < u_1$.同理 $u_2 < u_4 < u_3$.容易归纳得出对 $n = 1, 2, \cdots$

$$e < u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+1} < u_{2n-1}$$

那样单调有界叙列 $u_0, u_2, u_4, \cdots$ 和 $u_1, u_3, u_5, \cdots$ 分别有极限 a 和 b,$e \leqslant a \leqslant b$.又有

$$a^b = \lim_{n\to\infty}(u_{2n})^{u_{2n+1}} = x = \lim_{n\to\infty}(u_{2n-1})^{u_{2n}} = b^a$$

$a^b = b^a$,$e \leqslant a \leqslant b$ 和(1)蕴含 $a = b$.因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在,并且是一个唯一的实数 $g(x)$,$g > e$,$g^g = x$.由于当 $y \geqslant e$ 时 $f(y) = y^y$ 是连续的和严格递增的,因此它的反函数 $g(x)$ 也是连续的.

B-6 设 $K(x,y,z)$ 表示边长为 x,y,z 的三角形的面积,对任意两个边长分别为 a,b,c 及 a',b',c' 的三角形,证明

$$\sqrt{K(a,b,c)}+\sqrt{K(a',b',c')}\leqslant \sqrt{K(a+a',b+b',c+c')}$$

并且确定等号成立的情况.

解 设 $s=(a+b+c)/2, t=s-a, u=s-b, v=s-c$ 以及带撇号的类似式子.利用海伦公式可知所要证明的不等式可对正数 s,t,u,v,s',t',u',v' 从下式导出

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}\leqslant \sqrt[4]{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')} \quad ①$$

一个可能有用的关于正数 x,y,x',y' 的类似的较简单的不等式是

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}\leqslant \sqrt{(x+x')(y+y')} \quad ②$$

首先我们注意 ② 可对向量 $(\sqrt{x},\sqrt{x'})$ 和 $(\sqrt{y},\sqrt{y'})$ 应用柯西不等式得出(或者也可以从 $(\sqrt{xy'}-\sqrt{x'y})^2\geqslant 0$ 或者对 xy' 和 $x'y$ 应用平均不等式得出).对

$$x=\sqrt{st}, x'=\sqrt{s't'}, y=\sqrt{uv}, y'=\sqrt{u'v'}$$

应用 ② 并且对新的右边再应用 ② 就得到

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}\leqslant \sqrt{(\sqrt{st}+\sqrt{s't'})(\sqrt{uv}+\sqrt{u'v'})}\leqslant \sqrt{\sqrt{(s+s')(t+t')}\sqrt{(u+u')(v+v')}}$$

由于最右边的部分就等于 ①,因此我们就已证明了 ①.

对 ② 等号当且仅当 $\sqrt{x}:\sqrt{x'}=\sqrt{y}:\sqrt{y'}$ 时成立,而此式又当且仅当 $x:x'=y:y'$ 时成立.因此对 ① 等号当且仅当 $s:t:u:v=s':t':u':v'$ 时成立.这就得出对原来的不等式等号当且仅当 a,b,c 和 a',b',c' 成比例时成立.

第 44 届美国大学生数学竞赛

A－1　有多少个正整数 n 是 10^{40} 或 20^{30} 的真因数？

解　对正整数 d 和 m，用 $d \mid m$ 表示 d 是 m 的因数，$\tau(m)$ 表示 m 的正因数的个数，那么使得 $n \mid a$ 或 $n \mid b$ 的正整数 n 的个数就是

$$\tau(a)+\tau(b)-\tau(\gcd(a,b))$$

此外还有对不同的素数 p 和 q，正整数 s,t 有

$$\tau(p^s q^t)=(s+1)(t+1)$$

这样，我们所求数就是

$$\tau(2^{40}\cdot 5^{40})+\tau(2^{60}\cdot 5^{30})-\tau(2^{40}\cdot 5^{30})=$$
$$41^2+61\cdot 31-41\cdot 31=1\ 681+620=2\ 301$$

A－2　设一个准确的时钟的两个指针的长度是 3 和 4. 求两针的针尖的距离增长速度最快时两针针尖之间的距离.

解　设 OA 是长针，OB 是短针. 我们可认为 OA 是固定的而 OB 是以常速旋转的，设 v 是在此假设下点 B 的速度向量. 那么 A，B 之间距离的改变率就是 v 在 AB 方向的分量. 由于 v 垂直于 OB 并且 v 的大小是常数，因此这个分量在 $\angle OBA$ 等于直角时，即 $AB=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ 时达到最大(图 1).

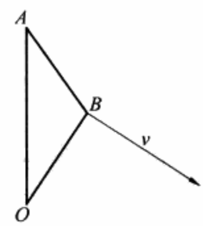


图 1

另外一个方法是设 $AB=x$，$\angle AOB=\theta$，那么由余弦定理得

$$x^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos\theta=25-24\cos\theta$$

由于 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 是常数，我们可以选择适当的单位使得 θ 的值就是时间的值. 这时

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=24\sin\theta,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{12\sin\theta}{\sqrt{25-24\cos\theta}}$$

由于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 是 θ 的奇函数，因此当且仅当 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 取得极大或极小时，$|\mathrm{d}x/\mathrm{d}s|$ 取得极大. 由于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$ 是 θ 的周期可微函数，因此在 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$ 取得极值处 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}s^2$. 对这种 θ

$$12\cos\theta = x\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \frac{144\sin^2\theta}{x^2}$$

因而 $$x^2 = \frac{12\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{12 - 12\cos^2\theta}{\cos\theta} = 25 - 24\cos\theta$$

由此得出 $$12\cos^2\theta - 25\cos\theta + 12 = 0$$

此方程的对 $\cos\theta$ 的唯一可行的解是 $\cos\theta = 3/4$,因此

$$x = \sqrt{25 - 24\cos\theta} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$$

A－3　设 p 是一个奇素数,$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \cdots + (p-1)n^{p-2}$.证明:如果 a 和 b 是集合 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 中的两个不同的整数,那么 $F(a)$ 和 $F(b)$ 对模 p 不同余,即 p 不可能整除 $F(a) - F(b)$.

解

$$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \cdots + (p-1)n^{p-2}$$

$$nF(n) = n + 2n^2 + \cdots + (p-2)n^{p-2} + (p-1)n^{p-1}$$

因此 $$(1-n)F(n) = (1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-2}) - (p-1)n^{p-1}$$

类似的 $$(1-n)^2F(n) = 1 - n^{p-1} - (1-n)(p-1)n^{p-1} = 1 - pn^{p-1} + (p-1)n^p$$

由费马小定理知,在模 p 下,$n^p \equiv n$,因而

$$(1-n)^2F(n) \equiv 1 - n$$

如果 a 和 b 都不同余于 1 (mod p),$1 - a \not\equiv 1 - b$,因而有不同的倒数 $(1-a)^{-1}$ 和 $(1-b)^{-1}$(mod p),那样

$$F(a) \equiv (1-a)^{-1}, F(b) \equiv (1-b)^{-1}, F(a) \not\equiv F(b) \pmod p$$

如果 a,b 之一,比如说 a 是同余于 1 的,那么 $b \not\equiv 0 \pmod p$,因而

$$F(b) \equiv (1-b)^{-1} \not\equiv 0 \pmod p$$

而 $$F(a) \equiv 1 + 2 + \cdots + (p-1) \equiv p(p-1)/2 \equiv 0 \pmod p$$

A－4　设 k 是一个正整数,$m = 6k - 1$,$S(m) = \sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j+1}\binom{m}{3j-1}$.例如

$$S(17) = \binom{17}{2} - \binom{17}{5} + \binom{17}{8} - \binom{17}{11} + \binom{17}{14}$$

证明:$S(m)$ 不可能等于 0.(按照惯例,$\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$)

解　设对 $r > m$ 和 $r < 0$,$\binom{m}{r} = 0$.对 $i = 0,1,2$,设

$$T_i(m)=\binom{m}{i}-\binom{m}{i+3}+\binom{m}{i+6}-\binom{m}{i+9}+\cdots$$

注意由于$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$,故

$$S(m)=T_2(m)+1$$

$$T_2(m)=T_2(m-1)+T_1(m-1)$$

$$T_1(m)=T_1(m-1)+T_0(m-1)$$

$$T_0(m)=T_0(m-1)-T_2(m-1)$$

设倒向差分算子∇由$\nabla f(n)=f(n)-f(n-1)$给出,那么

$$\nabla T_2(m)=T_1(m-1),\nabla T_1(m)=T_0(m-1)$$

$$\nabla T_0(m)=-T_2(m-1)$$

以上式子蕴含对 $m\geqslant 3$

$$\nabla^3T_2(m)=\nabla^2T_1(m-1)=\nabla T_0(m-2)=-T_2(m-3)$$

展开$\nabla^3T_2(m)$,从上式就得到对 $m\geqslant 3$

$$T_2(m)=3(T_2(m-1)-T_2(m-2)) \quad ①$$

对 $k\geqslant 1$,当 $m=6k-1$ 时,有 $m\geqslant 5$.从①得出 $T_2(m)\equiv 0(\bmod 3)$,因此 $S(m)\equiv 1(\bmod 3)$,从而 $S(m)\neq 0$.

A－5 证明或者否定断言:存在一个正实数 u,使得对所有的正整数 n,$[u^n]-n$ 都是一个偶数,其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

解 归纳的,我们定义一个整数的叙列 $3=a_1,a_2,a_3,\cdots$ 以及与此相联系的区间 $I_n=((a_n)^{1/n},(1+a_n)^{1/n})$ 使得 $a_n\geqslant 3^n$,$a_n\equiv n(\bmod 2)$.叙列$\{(a_n)^{1/n}\}$是不减的,并且 $I_n\supseteq I_{n+1}$.在这些条件下,$\{(a_n)^{1/n}\}$作为不减的有界叙列将有一个属于所有区间 I_n 的极限 u.$(a_n)^{1/n}\leqslant u<(1+a_n)^{1/n}$ 将蕴含 $a_n\leqslant u^n<1+a_n$ 以及$[u^n]=a_n\equiv n(\bmod 2)$.

设 $a_1=3$,那么 $I_1=[3,4)$,假设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 和$I_1,I_2,\cdots,I_k$ 已具有所需的性质.设

$$J_k=[(a_k)^{(k+1)/k},(1+a_k)^{(k+1)/k}]$$

那么当且仅当 x^{k+1} 属于 J_k 时,x 属于 I_k.J_k 的长度是

$$(1+a_k)^{(k+1)/k}-(a_k)^{(k+1)/k}\geqslant(1+a_k-a_k)(a_k)^{1/k}=(a_k)^{1/k}\geqslant(3^k)^{1/k}=3$$

由于 J_k 的长度至少是 3,因此对某个同余于 $k+1(\bmod 2)$ 的整数 a_{k+1} 包含了一个区间 $L_k=[a_{k+1},1+a_{k+1}]$.设

$$I_{k+1}=[(a_{k+1})^{1/(k+1)},(1+a_{k+1})^{1/(k+1)}]$$

由于 $x \in I_k$ 当且仅当 $x^{k+1} \in J_k$，$x \in I_{k+1}$ 当且仅当 $x^{k+1} \in I_k$，并且 $J_k \supseteq L_k$，我们看出 $I_k \supseteq I_{k+1}$ 以及

$$a_{k+1} \geqslant (a_k)^{(k+1)/k} = ((a_k)^{1/k})^{k+1} \geqslant 3^{k+1}$$

这就完成了归纳法的步骤并表明了所需的 u 是存在的.

A－6　设 $\exp(t)$ 表示 e^t，$F(x) = \dfrac{x^4}{\exp(x^3)}\int_0^x\int_0^{x-u}\exp(u^3 + v^3)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 或者证明它不存在.

解　在变量替换 $s = u - v$，$t = u + v$ 下，Jacobi 行列式为 $\partial(u,v)/\partial(s,t) = 1/2$，$F(x)$ 成为 $I(x)/E(x)$，其中

$$I(x) = \int_0^x\int_{-t}^t \exp\left(\left(\frac{t+s}{2}\right)^3 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^3\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^x\int_{-t}^t \exp\left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}ts^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

而 $E(x) = 2x^{-4}\exp(x^3)$. 由于当 x 趋于 ∞ 时 $I(x)$ 和 $E(x)$ 趋于 ∞，因此我们可以使用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(I'/E')$，其中

$$I' = \int_{-x}^x \exp\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}xs^2\right)\mathrm{d}s = \exp(x^3/4)\int_{-x}^x \exp(3xs^2/4)\mathrm{d}s$$

而

$$E' = (6x^{-2} - 8x^{-5})\exp(x^3)$$

在积分 I' 中，做变量替换 $s = w/\sqrt{x}$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}w/\sqrt{x}$，我们得到

$$I' = \frac{\exp(x^3/4)}{\sqrt{x}}\int_{-x\sqrt{x}}^{x\sqrt{x}} \exp(3w^2/4)\mathrm{d}w$$

$$\lim_{x\to\infty}F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{I'}{E'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_{-x\sqrt{x}}^{x\sqrt{x}} \exp(3w^2/4)\mathrm{d}w}{(6x^{-3/2} - 8x^{-9/2})\exp(3x^3/4)}$$

再次应用洛必达法则就得到

$$\lim_{x\to\infty}F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2(3/2)x^{1/2}\exp(3x^2/4)}{((27/2)x^{1/2} + \cdots)\exp(3x^2/4)} = \frac{2}{9}①$$

B－1　设 v 是边长为 4 的立方体 C 的一个顶点(角点). S 是内接于 C 的最大球面. R 是由 C 和 S 之间并比 C 的其它顶点更接近于 v 的点 p 所组成的区域. 求 R 的体积.

① 原文有误，应为

$$\lim_{x\to\infty}F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2(3/2)x^{1/2}\exp(3x^3/4)}{[(27/2)x^{1/2} + \cdots]\exp(3x^3/4)} = \frac{2}{9}$$

解 S 的直径必为4,以 C 的中心为中心. C 中所有距离 v 比其它的顶点 w 更近的点的集合是一个半空间的一部分,这个半空间以线段 vw 的在 C 内的中垂面为边界,并且包含 v 在内. 这些集合的交是一个立方体 C',它以 C 的3个通过 v 的面和3个通过 v 的边的中垂面为边界. 后面3个平面关于 C 和 S 是对称的,因此 R 由8个互不相交的全等区域所组成,这些区域的并是 S 和 C 之间除了3个对称平面上的点. 因此

$$8\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(C) - \mathrm{Vol}(S) = 4^3 - \frac{4\pi}{3}\cdot 2^3$$

$$\mathrm{Vol}(R) = 8 - \frac{4\pi}{3}$$

B－2 对正整数 n,设 $C(n)$ 是把 n 表示成2的不增加的幂的和的方法的数目,其中每个幂最多可以使用3次. 例如, $C(8) = 5$,由于可以把8表示为

$$8,4+4,4+2+2,4+2+1+1,2+2+2+1+1$$

证明或否定断言:对所有的正整数 n,都存在一个多项式 $P(x)$,使得 $C(n) = [P(n)]$. 其中 $[u]$ 表示不大于 u 的最大整数.

解 $2n$ 可以表示成 $2n = e_0 + 2e_1 + 4e_2 + \cdots + 2^k e_k$ 的形式,其中 $e_0 \in \{0,2\}$, $e_i \in \{0,1,2,3\}$. 那样如果 $e_0 = 0$, $e_1 + 2e_2 + \cdots + 2^{k-1}e_k$ 就是 n 的表示形式,而如果 $e_0 = 2$, $e_1 + 2e_2 + \cdots + 2^{k-1}e_k$,就是 $n-1$ 的表示形式. 由于问题所要求的所有的 n 和 $n-1$ 的表示式都可以用这种方法得到,因此就得到

$$C(2n) = C(n) + C(n-1)$$

同理可得

$$C(2n+1) = C(n) + C(n-1) = C(2n)$$

由于 $C(1) = 1$, $C(2) = 2$,用数学归纳法就容易得出 $C(n) = [1 + n/2]$.

B－3 设微分方程

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

存在在整个实数轴上都有定义的解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$,使得对所有实数都有

$$y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$$

设 $\quad f(x) = (y'_1(x))^2 + (y'_2(x))^2 + (y'_3(x))^2$

求出常数 A 和 B,使得 $f(x)$ 是微分方程 $y' + Ap(x)y = Br(x)$ 的解.

解 为了满足所给的方程,每个 y_i 必须至少有 3 阶导数.用 $\sum$ 表示 i 跑过 1,2,3 所得的和数. 那么我们就有 $\sum y_i^2 = 1$, $\sum (y'_i)^2 = f$.对这两式微分得出

$$\sum 2y_iy'_i = 0, \sum 2y'_iy''_i = f'$$

微分 $\sum y_iy'_i$ 得出

$$\sum y_iy''_i + \sum (y'_i)^2 = 0$$

因此

$$\sum y_iy''_i = -f$$

再微分此式得出

$$\sum y'_iy''_i + \sum y_iy'''_i = -f'$$

这个式子和 $\sum y'_iy''_i = f'/2$ 就得出 $\sum y_iy'''_i = -3f'/2$.用 y_i 乘以

$$y'''_i + py''_i + qy'_i + ry_i = 0$$

的每一项并且求和就得出

$$-3f'/2 - pf + q \cdot 0 + r = 0$$

也即

$$f' + (2/3)pf = (2/3)f$$

因而

$$A = 2/3 = B$$

B－4 设 $f(n) = n + [\sqrt{n}]$,其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 证明:对每个正整数 m, 叙列 $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \cdots$ 中至少有一个完全平方数.

解 我们可设 $m = k^2 + j$,其中 k 和 j 都是整数,由于 k^2 之后的下一个平方数是 $k^2 + 2k + 1$,故还可设 $0 \leqslant j \leqslant k$.那么这个 j 就是 m 的平方部分的剩余部分. 注意 $[\sqrt{m}] = k$ 以及 $f(m) = k^2 + j + k$. 如果 $j = 0$,那么 m 已经是一个完全平方数. 设 A 包含所有满足 $0 \leqslant j \leqslant k$ 的 m,而 B 包含所有满足 $k < j \leqslant 2k$ 的 m. 如果 $m \in B$,那么

$$f(m) = k^2 + j + k = (k+1)^2 + (j - k - 1)$$

因而 $f(m)$ 具有满足 $0 \leqslant j - k - 1 \leqslant k + 1$ 剩余 $j - k - 1$. 因此 $f(m)$ 或者是一个完全平方数或者属于 A. 这一方法也可以同样处理属于 A 的 m,那样 $[\sqrt{m+k}] = k$,并且

$$f^2(m) = f(f(m)) = f(m + k) = m + 2k = (k+1)^2 + (j - 1)$$

因此 $f^2(m)$ 或者是一个完全平方数或者是一个属于 A 的剩余小于 m 的整数. 依此类推即得出 $f^r(m)$ 是一个完全平方数,这里 $0 \leqslant r \leqslant 2j$.

B－5 设 $\|u\|$ 表示实数 u 到距离它最近的整数之间的距离(例如 $\|2.8\| = 0.2 = \|3.2\|$).对正整数 n,设

$$a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \left\| \frac{n}{x} \right\| \mathrm{d}x$$

确定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.假设已知恒等式 $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots = \frac{\pi}{2}$.

解 由 a_n 和 $\|u\|$ 的定义得出

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\int_{2n/(2k+1)}^{n/k}\left(\frac{n}{x}-k\right)\mathrm{d}x + \int_{n/(k+1)}^{2n/(2k+1)}\left(k+1-\frac{n}{x}\right)\mathrm{d}x\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\frac{2k+1}{2k} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+1} - \ln\frac{2k+2}{2k+1}\right)$$

$$\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{2k(2k+2)} =$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)}{(2n-2)}\cdot\frac{(2n-1)}{2n}\right)$$

由于 $$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots = \frac{\pi}{2}$$

并且当 $x > 0$ 时 $\ln x$ 是连续的,就得出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln(4/\pi)$.

B－6 设 k 是一个正整数,$m = 2^k + 1$.又设 $r \neq 1$ 是 $z^m - 1 = 0$ 的一个复根.证明:存在整系数多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 使得

$$(P(r))^2 + (Q(r))^2 = -1$$

解 由于 $r \neq 1$ 并且

$$r^m - 1 = (r-1)(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1) = 0$$

因此我们有 $$r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1 = 0$$

因而有 $$-1 = r(r^{m-2} + r^{m-3} + \cdots + 1)$$

$$-1 = r(1+r)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{(m-1)/2})$$

$$-1 = (r+r^2)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{(m-1)/2})$$

由于 $m+1 = 2(2^{k-1}+1)$,$r + r^2 = r^{m+1} + r^2$,故上面最后一个 -1 的表达式中的每一个因子都是两个平方数的和.通过反复应用恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

可以把它们的乘积表示为两个平方数的和.这就得出 $-1 = P^2 + Q^2$,其中 P 和 Q 是 r 的整系数多项式.

第 45 届美国大学生数学竞赛

A - 1　设 A 是 3 维空间中的 $a\times b\times c$ 长方体块，其中 $a,b,c>0$. 设 B 是所有距离 A 中的点至多为 1 的点的集合（特别，B 包含 A），把 B 的体积表示为 a,b 和 c 的多项式.

解　集合 B 可以被分成以下几个集合：

(1) A 本身，体积为 abc；

(2) 两个 $a\times b\times 1$ 长方体，两个 $b\times c\times 1$ 长方体和两个 $a\times c\times 1$ 长方体，其总体积为 $2ab+2bc+2ac$；

(3) 4 个长度为 a，半径为 1 的四分之一圆柱体，4 个长度为 b，半径为 1 的四分之一圆柱体和 4 个长度为 c，半径为 1 的四分之一圆柱体，其总体积为 $(a+b+c)\pi$；

(4) 八个球体扇体，其中每一个是一个半径为 1 的球体的八分之一，其总体积为 $4\pi/3$.

因此，B 的体积为

$$abc+2(ab+bc+ac)+\pi(a+b+c)+\frac{4\pi}{3}$$

A - 2　把 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}6^k/(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)$ 表示成有理数.

解　设 $S(n)$ 表示所给级数的前 n 项和，那么

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^k}{3^k-2^k}-\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)=3-\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

因而此级数收敛并且 $\lim\limits_{n\to\infty}S(n)=2$.

A-3 设 n 是一个正整数,a,b,x 是实数,$a\neq b$,$\boldsymbol{M}_n$ 表示 $2n\times 2n$ 矩阵,其中(i,j)处的元素 m_{ij} 为

$$m_{ij}=\begin{cases}x & ,i=j\\ a & ,i\neq j,\text{并且 } i+j \text{ 是偶数}\\ b & ,i\neq j,\text{并且 } i+j \text{ 是奇数}\end{cases}$$

例如

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}x & b & a & b\\ b & x & b & a\\ a & b & x & b\\ b & a & b & x\end{pmatrix}$$

把 $\lim\limits_{n\to\infty}\det \boldsymbol{M}_n/(x-a)^{2n}$ 表示为 a,b 和 n 的多项式,其中 $\det \boldsymbol{M}_n$ 表示 $\boldsymbol{M}_n$ 的行列式.

解 设 $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{M}_n]|_{x=a}$,则 $\boldsymbol{N}$ 的秩为 2. 因此 0 是它的 $2n-2$ 重特征值. 设 $\boldsymbol{e}$ 表示 1 的 $2n\times 1$ 列向量. 注意 $\boldsymbol{Ne}=n(a+b)\boldsymbol{e}$,因而 $n(a+b)$ 是特征值. $\boldsymbol{N}$ 的迹是 $2na$,因而剩下的那个特征值是 $2na-n(a+b)=n(a-b)$.(注意:对应的特征向量是 $\boldsymbol{f}$,其中 $f_{i,1}=(-1)^{i+1},i=1,\cdots,2n$)

前面的分析蕴含 $\boldsymbol{N}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{N}-\lambda\boldsymbol{I})=\lambda^{n-2}(\lambda-(a+b))(\lambda-(a-b))$$

设 $\lambda=a-x$,那么

$$\det \boldsymbol{M}_n=\det(\boldsymbol{N}-(a-x)\boldsymbol{I})=$$
$$(a-x)^{2n}(a-x-n(a+b))(a-x-n(a-b))$$

由此得出

$$\lim_{x\to a}\frac{\det \boldsymbol{M}_n}{(x-a)^{2n-2}}=\lim_{x\to a}(a-x-n(a+b))(a-x-n(a-b))=$$
$$n^2(a^2-b^2)$$

A-4 把凸五边形 $P=ABCDE$ 的顶点顺序地标记在半径为 1 的圆周上,在弦 AC 和 BD 垂直的条件下求出 P 的最大面积.

解 设 $\theta=\text{arc } AB,\alpha=\text{arc } DE$ 和 $\beta=\text{arc } EA$,那么

$$\text{arc } CD=\pi-\theta$$
$$\text{arc } BC=\pi-\alpha-\beta$$

P 的面积是 5 个从圆心发出的三角形,因而是

$$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta+\frac{1}{2}\sin(\pi-\alpha-\beta)$$

这个表达式在 $\theta=\pi/2,\alpha=\beta=\pi/3$ 时达到最大,因此最大面积为

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

A－5　设 R 是由所有满足条件 $x+y+z\leqslant 1$ 的非负实数的三元组 (x,y,z) 组成的区域, $w=1-x-y-z$,把三重积分

$$\iiint_R x^1y^9z^8x^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

表示为 $a!b!c!d!/n!$ 的形式,其中 a,b,c,d 和 n 都是正整数.

解　对 $t>0$,设 R_t 是所有满足 $x+y+z\leqslant t$ 的所有非负三元组 (x,y,z) 组成的区域.又设

$$I(t)=\iiint_{R_t} x^1y^9z^8(t-x-y-z)^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

并作变量替换 $x=tu,y=tv,z=tw$,我们就可看出 $I(t)=I(1)t^{25}$.

设 $J=\int_0^\infty I(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$,那么

$$J=\int_0^\infty I(1)t^{25}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=I(1)\Gamma(26)=I(1)25!$$

同时还有

$$J=\int_0^\infty\iiint_{R_t}\mathrm{e}^{-t}x^1y^9z^8(t-x-y-z)^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

设 $s=t-x-y-z$,那么

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-z}x^1y^9z^8s^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s=$$
$$\Gamma(2)\Gamma(10)\Gamma(9)\Gamma(5)=1!9!8!4!$$

这样所求的积分即为

$$I(1)=J/25!=1!9!8!4!/25!$$

A－6 设 n 是一个正整数，$f(n)$ 表示 $n!$ 的十进位制数字的最后一个非零数字(例如 $f(5)=2$).

(1)说明如果 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是不同的非负整数，那么 $f(5^{a_1}+5^{a_2}+\cdots+5^{a_k})$ 仅依赖于和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$.

(2)假设(1)成立，我们可以定义 $g(s)=f(5^{a_1}+5^{a_2}+\cdots+5^{a_k})$，其中 $s=a_1+a_2+\cdots+a_k$，求出最小的使得对所有的 $s\geqslant 1$ 都有

$$g(s)=g(s+p)$$

的正整数 p 或者证明那种 p 不存在.

解 (1)以下所有的同余式都是对模 10 而言的.

引理 $f(5n)\equiv 2^nf(n)$.

引理的证明 我们有

$$(5n)!=10^nn!\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)}{2}\quad(*)$$

如果 i 是偶数，那么

$$\frac{(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)}{2}\equiv\frac{1}{2}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\equiv 2$$

如果 i 是奇数，那么

$$\frac{(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)}{2}\equiv\frac{1}{2}(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\equiv 2$$

因而上面的整个乘积同余于 2^n. 由式(*)显然可知 10 的最高次幂可以整除 $(5n)!$，同样显然的是 10 的最高次幂可以整除 $10^nn!$，这就证明了引理.

我们现在对 $5^{a_1}+\cdots+5^{a_k}$ 实行数学归纳法来证明 $f(5^{a_1}+\cdots+5^{a_k})\equiv 2^{a_1+\cdots+a_k}$. (这个表达式像我们所希望的那样，只依赖于 $a_1+\cdots+a_k$)

对 $5^{a_1}+\cdots+5^{a_k}=1$，由于 $f(5^0)\equiv 2^0\equiv 1$，故命题为真.

i 所有的 $a_i>0$，那么由引理和归纳法假设

$$\begin{aligned}f(5^{a_1}+\cdots+5^{a_k})&\equiv 2^{5^{a_1}+1+\cdots+5^{a_k}+1}f(5^{a_1-1}+\cdots+5^{a_k-1})\equiv\\&2^k\cdot 2^{(a_1-1)+\cdots+(a_k-1)}(\text{由于对 } i\geqslant 0,2^{5^j}\equiv 2)\equiv\\&2^{(a_1+\cdots+a_k)}\end{aligned}$$

ii 有某个 $a_i=0$，比如说 $a_1=0$，现在

$$(1+5m)!=(1+5m)(5m)!$$

因此
$$f(1+5m)\equiv(1+5m)f(5m)$$

但是对 $m\geqslant 1$，$f(5m)$ 是偶数，由于 $(5m)!$ 可被 2 的比 5 的幂更高的幂所整除. 但是 $(1+5m)\cdot(2j)\equiv 2j$，因此 $f(1+5m)\equiv f(5m)$，

设

$$m = 5^{a_2-1} + \cdots + 5^{a_k-1}$$

由数学归纳法即完成了证明.

(2) 对所有 $s \geqslant 1$,使 $2^{s+p} \equiv 2^2$ 成立的最小的 $p \geqslant 1$ 是 $p = 4$.

B－1　设 n 是一个正整数,定义

$$f(n) = 1! + 2! + \cdots + n!$$

求出多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 使得对所有 $n \geqslant 1$ 有

$$f(n+2) = P(n)f(n+1) + Q(n)f(n)$$

解　我们有

$$f(n+2) - f(n+1) = (n+2)! = (n+2)(n+1)! = (n+2)(f(n+1) - f(n))$$

由此得出　$P(x) = x + 3, Q(x) = -x - 2$

B－2　对 $0 < u < \sqrt{2}$ 和 $v > 0$ 求 $(u-v)^2 + \left(\sqrt{2-u^2} - \dfrac{9}{v}\right)^2$ 的最小值.

解　问题是求开的第一象限中的四分之一圆 $x^2 + y^2 = 2$ 和第一象限中的半支双曲线 $xy = 9$ 之间的最小距离. 由于过点 $(1,1)$ 和 $(3,3)$ 的切线把这两条曲线分开并都垂直于直线 $x = y$,因此所求的最小距离就是 8.

B－3　证明或否定命题:如果 F 是一个有两个或更多元素的有限集合,那么存在一个 F 上的二元算子 $*$ 使得对所有 F 中的 x, y, z 有

(1) $x * z = y * z$ 蕴含 $x = y$(右消去律成立),和

(2) $x * (y * z) \neq (x * y) * z$ (没有结合率成立的情况).

解　这个命题是对的. 设 ϕ 是没有不动点的 F 上的任意双射(即双边的单设),并令 $x * y = \phi(x)$.

B－4 求出所有定义在$[0,+\infty)$上的连续的,在$(0,+\infty)$上(函数)值是正实数的函数$y=g(x)$,使得对所有$x>0$,区域

$$R_x=\{(s,t)\mid 0\leqslant s\leqslant x,0\leqslant t\leqslant g(s)\}$$

的质心的y坐标和g在$[0,x]$上的平均值相同.并证明你的结论.

解 那种函数必须满足

$$\frac{\int_0^x \frac{1}{2}g^2(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

或等价地
$$\int_0^x \frac{1}{2}g^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

设$z=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$,那么$z'(x)=g(x)$,并且我们有

$$\int_0^x \frac{1}{2}(z')^2\mathrm{d}t=\frac{z^2}{x},x>0$$

微分上式,我们有

$$\frac{1}{2}(z')^2=\frac{x\cdot 2zz'-z^2}{x^2},x>0$$

$$x^2(z')^2-4xzz'+2z^2=0,x>0$$

$$(xz'-r_1z)(xz'-r_2z)=0,x>0$$

其中$r_1=2+\sqrt{2},r_2=2-\sqrt{2}$.

现在x,z'和z都是连续的,并且$z>0$,因此最后一个方程蕴含$xz'/z=r$,其中$r=r_1$或$r=r_2$.分离变量,我们有$z'/z=r/x$.由此得出

$$\ln z=r\ln x+C_0$$

或者等价地$z=C_1x^r,C_1>0$.微分此式,我们有$z'=g(x)=Cx^{r-1},C>0$.但是g在$[0,+\infty)$上连续,因此我们不可能有$r=r_2$(由于$r_2-1=1-\sqrt{2}<0$),那样

$$g(x)=Cx^{1+\sqrt{2}},C>0$$

可以检验,那种$g(x)$确实满足问题中的所有条件.

B－5　对每个非负整数 k，设 $d(k)$ 表示 k 的二进制展开式中 1 的个数（例如 $d(0)=0$，$d(5)=2$）．设 m 是正整数，把

$$\sum_{k=0}^{2^m-1}(-1)^{d(k)}k^m$$

表示成 $(-1)^m a^{f(m)}(g(m))!$ 的形式，其中 a 是一个整数，而 f 和 g 是多项式．

解　定义

$$D(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2^{n-1}})$$

由于两边的展开式是唯一的，因此单项式 $x^k(0\leqslant k\leqslant 2^n-1)$ 在 $D(x)$ 的展开式中恰只出现一次，系数是 $(-1)^{d(k)}$，即

$$D(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{d(k)}x^k$$

用算子 $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 对 $D(x)$ 作用 m 次，我们得到

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m D(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{d(k)}k^m x^k$$

因而

$$\left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m D(x)\right]_{x=1}=\sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{d(k)}k^m$$

定义 $F(x)=D(x+1)$，因而

$$\left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m D(x)\right]_{x=1}=\left[\left((x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m F(x)\right]_{x=0}$$

然而

$$\begin{aligned}F(x)&=\prod_{a=1}^{m}(1-(x+1)^{2^{a-1}})=\\&\prod_{a=1}^{m}(-2^{a-1}x+O(x^2))(x\to 0)=\\&(-1)^m 2^{m(m-1)/2}x^m+O(x^{m+1})\end{aligned}$$

由于观察到 $\left((x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)x^n=nx^n+nx^{n-1}$，我们看出

$$\left((x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m(Ax^m+O(x^{m+1}))=m!A+O(x)$$

因而

$$\begin{aligned}\left[\left((x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m F(x)\right]_{x=0}&=[(-1)^m 2^{m(m-1)/2}m!+O(x)]_{x=0}=\\&(-1)^m 2^{m(m-1)/2}m!\end{aligned}$$

B－6 归纳地定义一个凸多边形$\{P_n\}$，$n\geqslant 0$的叙列如下：P_0是边长为1的等边三角形.设P_n已被确定，把它的边三等份，P_{n+1}是在P_n的边内部的三分点，那样P_{n+1}可以通过割掉P_n的角而得到，它有$3\cdot 2^n$条边（P_1是边长为1/3的正六边形）.

把$\lim\limits_{n\to\infty}\text{Area}(P_n)$表示为$\sqrt{a}/b$的形式，其中$a$，$b$是正整数.

解 设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是P_n中连结一条边的两个向量，那么在P_{n+1}中，连接边的向量就是$\boldsymbol{u}/3$，$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})/3$和$\boldsymbol{v}/3$.此外（面积）

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{u}}{3}\times\frac{\boldsymbol{v}}{3}\right\|=\frac{1}{18}\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|$$

在构造P_{n+1}时从这个角被去掉了.但是在下一步从这三个连接向量所得的（面积）量是

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{u}}{9}\times\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{9}\right\|+\frac{1}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{9}\times\frac{\boldsymbol{v}}{9}\right\|=\frac{1}{81}\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|$$

那样，在第$k+1$步剪断中所移走的（面积）是在第k步剪断中所移走的（面积）的2/9倍.

注意在第一步中原面积的三分之一被去掉了，那样，所去掉的面积一共是原面积的

$$\frac{1}{3}(1+(2/9)+(2/9)^2+\cdots)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{3}{7}$$

由于原面积是$\sqrt{3}/4$，我们就有

$$\lim_{n\to\infty}\text{Area}(P_n)=\frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

这一问题中所产生的曲线已被 Georges de Rham 详细研究过（见 Un peu de mathmatiques a propos dune courbe plane, Elem. Math., 2(1947), 73-76, 89-97; Sur une courbe plane, J. Math. Pures Appl., 35(1956), 25-42 以及 Sur les courbes limites de polygonnes obtenus par trisection, Enseign. Math., 5(1959), 29-43）. de Rham 的结果如下：极限曲线是曲率几乎处处为零的C'曲线，但是每个子弧段又都含有曲率为无穷大的点.此外，那个曲线是无处解析的，de Rham 把曲线分段参数化了，那样切向量是和 Minkowski 函数密切相关的.如果我们重复上述构造，但是按比例（1/4，1/2，1/4）而不是（1/3，1/3，1/3）划分多边形的边，那么所得的极限曲线就是解析的，且由分段抛物线弧所组成.

第46届美国大学生数学竞赛

A－1　确定具有以下性质的有序三元数组(A_1,A_2,A_3)的集合的数目：

(1)$A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(2)$A_1\cap A_2\cap A_3=\varnothing$.

其中$\varnothing$表示空集，把答案表示成$2^a3^b5^c7^d$的形式，其中a,b,c和d都是非负整数，并证明你的结论.

解　每个整数$1\leqslant i\leqslant 10$都将落入下列6个互不相交的类之中：$A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3},\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3},\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3,\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$，$A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3$和$A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}$，因此共有$6^{10}=2^{10}3^{10}$个不同的有序三元组.

A－2　设T是一个锐角三角形，如图1所示，在T中放入一对矩形R,S.

设$A(X)$表示多边形X的面积.求出$\dfrac{A(R)+A(S)}{A(T)}$的最大值或证明那种最大值不存在.其中T是整个三角形，R,S是如上的矩形.

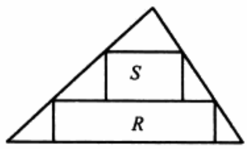


图1

解　如图2，用字母表示途中各线段的长度，那么

$$\frac{A(R)+A(S)}{A(T)}=\frac{ay+bz}{hx/2}$$

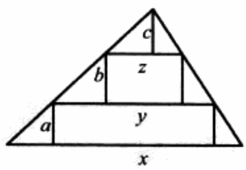


图2

其中$h=x+y+z$是T的高度.由图2中的相似三角形可知

$$\frac{x}{h}=\frac{y}{b+c}=\frac{z}{c}$$

因而

$$\frac{A(R)+A(S)}{A(T)}=\frac{a\dfrac{(b+c)x}{h}+b\dfrac{cx}{h}}{hx/2}=\frac{2}{h^2}(ab+bc+ac)$$

我们需要在$a+b+c=h$的条件下，极大化$ab+bc+ac$.解这问题的方法之一是固定a，因而$b+c=h-a$，那么

$$ab+bc+ac=a(h-a)+bc$$

而 bc 在 $b=c$ 时达到最大.现在我们欲在 $a+2b=h$ 的条件下极大化 $2ab+b^2$,这一直接的微积分计算问题给出 $a=b=c=h/3$.因此最大比例是 2/3(不依赖于 T).

A－3 设 d 是一个实数.对每个整数 $m\geqslant 0$,由条件

$$a_m(0)=d/2^m$$

和 $$a_m(j+1)=(a_m(j))^2+2a_m(j), j\geqslant 0$$

定义一个叙列 $\{a_m(j)\}, j=0,1,2,\cdots$.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(n)$.

解 我们有

$$a_n(j+1)+1=(a_n(j)+1)^2$$

由数学归纳法有

$$a_n(j)+1=(a_n(0)+1)^{2^j}$$

因而有 $$\lim_{n\to\infty}a_n(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{d}{2^n}\right)^{2^n}-1=e^d-1$$

A－4 由 $a_1=3$ 和 $a_{i+1}=3^{a_i}, i\geqslant 1$ 定义一个叙列,那么 00 至 99 之间的哪个数字可以在无穷多个 a_i 的最后两位数字中出现?

解 我们希望考虑 $a_i\equiv 3^{a_{i-1}}(\bmod 100)$.回忆只要 a 与 n 互素就有 $a^{\phi(n)}\equiv 1(\bmod n)$($\phi$ 是 Euler－ϕ 函数).因此由于 $\phi(100)=40$,我们可以通过已知 $a_{i-1}(\bmod 40)$ 而求出 $a_i(\bmod 100)$,类似的,我们可以通过求出 $a_{i-2}(\bmod 16)$ 而知道 $a_{i-1}(\bmod 40)$,由于 $a_{i-1}=3^{a_{i-2}}$ 以及 $\phi(40)=16, a_{i-2}=3^{a_{i-3}}$ 及 $\phi(16)=8$,因而

$$a_{i-3}\equiv 3^{a_{i-4}}\equiv 3^{奇数}\equiv 3(\bmod 8)$$

由此得出 $$a_{i-2}\equiv 3^3\equiv 11(\bmod 16)$$

以及 $$a_{i-1}\equiv 3^{11}\equiv 27(\bmod 40)$$

并且最后 $$a_i\equiv 3^{27}\equiv 87(\bmod 100)$$

上式对所有 $i\geqslant 4$ 有效.那样 87 是唯一的在无穷多个 a_i 的最后两位中出现的整数.

A－5 设 $I_m=\int_0^{2\pi}\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(mx)\mathrm{d}x$,对 $1\leqslant m\leqslant 10$ 中的哪个 $m, I_m\neq 0$?

解 我们写

$$I_m = \int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)dx = \sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\frac{1}{2^m}\int_0^{2\pi}e^{i(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+m\varepsilon_m)x}dx$$

如果 t 是一个非零整数,那么积分$\int_0^{2\pi}e^{itx}dx$ 是0,否则①是 2π.那样 $I_m \geqslant 0$ 并且当且仅当对某些 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m \in \{-1,1\}$,0 可被写成 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+m\varepsilon_m$ 的形式时,$I_m \neq 0$.在和 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+m\varepsilon_m$ 中,让 r 表示正项的和,而用 s 表示负项的绝对值的和,那么

$$r - s = m(m+1)/2$$

$r = s$ 的一个必要条件是 $m(m+1)/2$ 是偶数,即 $m \equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$.那样,在 $1 \leqslant m \leqslant 10$ 中满足这一条件的数仅有3,4,7或8.由于 $1+2-3=0$,$1-2-3+4=0$,$(1+2-3)+(4-5-6+7)=0$ 以及 $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)=0$,我们就得到对上述每一种情况都有 $I_m \neq 0$.(注意,这一解答可以容易地推广到所有使得 $m \equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$ 的数上去)

A-6 如果 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ 是一个实系数多项式,令

$$\Gamma(p(x)) = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2$$

设 $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$.求出对每个整数 $n \geqslant 1$ 使得

(1) $g(0) = 1$.

(2) $\Gamma(f(x)^n) = \Gamma(g(x)^n)$.

的实系数多项式 $g(x)$ 并证明你的结论.

解 注意 $\Gamma(p(x)) = \int_0^1 |p(e(\theta))|^2 d\theta$,其中 $e(\theta) = e^{2\pi i\theta}$.那样

$$\Gamma(f(x)^n) = \int_0^1 |f(e(\theta))|^{2n} d\theta = \int_0^1 |3e(\theta)+1|^{2n}|e(\theta)+2|^{2n} d\theta$$

但是
$$|e(\theta)+2| = |e(\theta)||1+2e(-\theta)| = |\overline{1+2e(\theta)}| = |1+2e(\theta)|$$

因此

$$\Gamma(f(x)^n) = \int_0^1 |3e(\theta)+1|^{2n}|2e(\theta)+1|^{2n} d\theta = \Gamma(g(x)^n)$$

因而我们就可设

① 即 $t=0$ 时.——译者注

$$g(x)=6x^2+5x+1$$

B-1 设 k 是具有以下性质的最小正整数：

存在不同的整数 m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 使得多项式

$$p(x)=(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)(x-m_5)$$

恰有 k 个非零系数.

对此达到最小的 k，求出整数 m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 的集合.并证明你的结论.

解 显然 $k>1$，否则 $p(x)=x^5$，因而 m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 不可能是不同的整数.假设 $k=2$，因此 $p(x)=x^5+ax^j$，其中 $0\leqslant j\leqslant 4$.不可能有 $j\geqslant 2$，否则至少有两个 m_i 等于 0.因此 $p(x)=x^5+a$①或 $p(x)=x(x^4+a)$，$a\neq 0$.但是 x^5+a 和 x^4+a 都至多有两个实零点，因此 $k\geqslant 3$.

设 $m_1=-2,m_2=-1,m_3=0,m_4=1,m_5=2$，那么

$$p(x)=x(x^2-1)(x^2-4)=x^5-5x^3+4x$$

因此 $k=3$，并且这个 k 值对所给的 m_i 是可以达到的.

B-2 对 $n\geqslant 0$，在条件 $f_0(x)=1,f_n(0)=0$ 下定义多项式 $f_n(x)$ 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{n+1}(x))=(n+1)f_n(x)$$

求出 $f_{100}(1)$ 的素因子分解式，并证明你的结论.

解 低阶情形的检验导致猜想 $f_n(x)=x(x+n)^{n-1}$.显然这一猜想对 $n\geqslant 1$ 满足 $f_0(x)=1,f_n(0)=1$.现在

$$\begin{aligned}f'_{n+1}(x)&=(x+n+1)^n+nx(x+n+1)^{n-1}=\\&(n+1)(x+1)(x+n+1)^{n-1}=\\&(n+1)f_n(x+1)\end{aligned}$$

因此像所猜想的那样有 $f_n(x)=x(x+n)^{n-1}$，故 $f_{100}(1)=101^{99}$.

---

① 此处原文有误，应为 $p(x)=x^5+ax$.—— 译者注

B－3 设

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

是双边无限的正整数阵且假设每个正整数在此数阵中恰出现8次.

证明:对某个正整数对(m,n),$a_{m,n} > mn$.

解 假设不然,即设对所有的(m,n)有$a_{m,n} \leqslant mn$.设

$$R(k) = \{(i,j) \mid a_{i,j} \leqslant k\}$$

由假设可知$|R(k)| \leqslant 8k$.但另一方面,$ij \leqslant k$蕴含$(i,j) \in R(k)$,而$R(k)$有

$$\left[\frac{k}{1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{k}\right] \geqslant$$

$$\left(\frac{k}{1} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{k}{1} - 1\right) > k(\ln k - 1)$$

那么多对.因此$8k > k(\ln k - 1)$,当$k > e^9$时,这是一个矛盾.

B－4 设C表示单位圆$x^2 + y^2 = 1$.在C的圆周上任取一点p,在C的内部另外任取一点q(这些点是互不依赖并一致地在各自的定义域中选取的).设R是以pq为对角线,而边分别平行于x轴和y轴的矩形.问R中的点不在C外的概率是多少?

解 设$p = (\cos\theta, \sin\theta)$及$q = (x,y)$,那么$R$的另外两个顶点是$(\cos\theta, y)$和$(x, \sin\theta)$,因此当且仅当$\cos^2\theta + y^2 \leqslant 1$和$\sin^2\theta + x^2 \leqslant 1$,或等价的,$|y| \leqslant |\sin\theta|$,$|x| \leqslant |\cos\theta|$时,$R$没有点位于$C$之外.注意这些条件蕴含$(x,y)$位于圆内,因此对任意$\theta$,$(x,y)$满足这些条件的概率是

$$\frac{2|\sin\theta||\cos\theta|}{\pi} = \frac{2}{\pi}|\sin 2\theta|$$

而全概率为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}|\sin 2\theta| \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 = \frac{4}{\pi^2}$$

B－5 计算$\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-1\,985(t+t^{-1})} \mathrm{d}t$,可以认为已知$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

解 设 $I(x)=\int_0^{\infty}t^{-1/2}e^{-at-xt^{-1}}dt$,其中 $a=1\ 985$,那么

$$I'(x)=-\int_0^{\infty}t^{-1/2}e^{-at-xt^{-1}}t^{-1}dt=-\int_0^{\infty}t^{-3/2}e^{-at-xt^{-1}}dt$$

做变量替换 $u=1/t$,那么最后的方程就成为

$$I'(x)=-\int_0^{\infty}u^{-1/2}e^{-au^{-1}-xu}du$$

现在设 $w=\frac{x}{a}u$,那么最后的方程成为

$$I'(x)=-\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}w^{-1/2}e^{-xw^{-1}-aw}dw=-\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}I(x)$$

因此 $$\ln I(x)=-2(ax)^{1/2}+C$$

或者等价的 $$I(x)=ke^{-2(ax)^{-1/2}}$$

也就有 $$k=I(0)=\int_0^{\infty}t^{-1/2}e^{-at}dt\int_0^{\infty}2e^{at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

这就得出 $$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-2a}$$

(注意:这个积分是基本的 K - Bessel 函数 $K_{1/2}(3\ 970)$)

B - 6 设 G 是矩阵乘法群中的实 $n\times n$ 矩阵 $\{M_i\}$,$1\leqslant i\leqslant r$ 组成的有限集合.设 $\sum_{i=1}^{r}tr(M_i)=0$,证明:$\sum_{i=1}^{r}M_i$ 是 $n\times n$ 零矩阵.

解 设 $S=\sum_{i=1}^{r}M_i$.对任意 j,$1\leqslant j\leqslant r$ 有

$$M_jS=\sum_{i=1}^{r}M_jM_i=\sum_{i=1}^{r}M_i=S$$

并且因此 $$S^2=\sum_{j=1}^{r}M_jS=rS$$

因此对于 S 的极小多项式 $p(x)$ 整除 x^2-rx 并且 S 的每个特征值或者是0或者是 r.由于 $tr(S)=0$,故 S 的每个特征值都是0.$S-rI$ 的每个特征值是 $-r$,因而 $S-rI$ 是可逆的.所以从 $S(S-rI)=0$ 就得到 $S=0$.

第 47 届美国大学生数学竞赛

A－1　求出所有满足条件 $x^4+36\leqslant 13x^2$ 并使得 $f(x)=x^3-3x$ 最大的实数值.

解　条件 $x^4+36\leqslant 13x^2$ 等价于

$$(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)\leqslant 0$$

后面的式子当且仅当 x 位于闭区间 $[-3,-2]$ 或闭区间 $[2,3]$ 时成立.由于对这些区间中的 x，$f'(x)=3(x^2-1)>0$，故函数 f 在这些区间上是递增的.这就得出 f 在这些区间上的最大值是 $\max\{f(-2),f(3)\}=18$.

A－2　$\left[\dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3}\right]$ 的个位数(即最右端的数)是什么?这里 $[x]$ 是小于等于 x 的最大整数.

解　最大整数①是

$$I=\frac{10^{20\,000}-3^{200}}{10^{100}+3}$$

由于余数是

$$\frac{3^{200}}{10^{100}+3}<1$$

我们有

$$I\equiv\frac{-3^{200}}{3}(\mathrm{mod}\ 10)\equiv -3^{199}(\mathrm{mod}\ 10)\equiv -3^3(3^4)^{49}(\mathrm{mod}\ 10)\equiv -27(\mathrm{mod}\ 10)\equiv 3(\mathrm{mod}\ 10)$$

故最后的数字是 3.

A－3　计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}(n^2+n+1)$，其中对 $t\geqslant 1$，$\operatorname{arccot} t$ 表示使得在区间 $0<\theta\leqslant 2\pi$ 中使得 $\cos\theta=t$ 的数 θ.

① 这里所说的最大整数是指小于或等于 $\dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3}$ 的最大整数，也就是 $\dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3}$ 的整数部分.—— 译者注

解 利用

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

可以看出

$$\operatorname{arccot}(1+n+n^2)=\operatorname{arccot} n-\operatorname{arccot}(n+1)$$

那样那个级数趋于

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arccot} 0-\operatorname{arccot}(n+1))=\pi/2$$

A-4 一个 $n\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 的一个横截是$\boldsymbol{A}$ 的n 个使得其中任意两个既不在同一行也不在同一列的元素. 设$f(n)$表示满足下列两个条件的 $n\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 的个数:

(1)$\boldsymbol{A}$ 的每个元素$\alpha_{i,j}$ 都在集合$\{-1,0,1\}$ 中.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的所有横截中的元素之和都相等.

一个那种矩阵的例子是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

确定 $f(n)$ 的形如

$$f(n)=a_1b_1^n+a_2b_2^n+a_3b_3^n+a_4$$

的公式,其中 a_i 和 b_i 都是有理数. 并证明你的结论.

解 我们首先证明

引理 如果一个 $n\times n$ 矩阵(α_{ij})满足(2),那么存在唯一的一些数

$$c_1=0,c_2,\cdots,c_n,d_1,d_2,\cdots,d_n$$

使得 $\alpha_{ij}=c_i+d_j$. 反过来任意选定 c_i 和d_i 就产生一个唯一的满足(2)的矩阵(α_{ij}).

引理的证明 如果 $\alpha_{ij}=c_i+d_j$,那么 $\boldsymbol{A}$ 的任意横截的和是

$$\sum_{i=1}^n c_i+\sum_{j=1}^n d_j$$

因此(2)满足.

反过来,设(α_{ij})满足(2). 定义 $d_j=\alpha_{1j}$ 及 $c_i=\alpha_{i1}-d_1=\alpha_{i1}-\alpha_{1j}$①(因此 $c_1=0$). 由于满足(2),我们有

$$\alpha_{ij}+\alpha_{11}=\alpha_{i1}+\alpha_{1j}$$

因而 $\alpha_{ij}=\alpha_{i1}+\alpha_{1j}-\alpha_{11}=(c_i+d_1)+d_j-d_1=c_i+d_j$

这就是我们想证的.

① 应为 $c_i=\alpha_{i1}-d_1=\alpha_{i1}-\alpha_{11}$.——译者注

c_i 和 d_i 是唯一的,由于 $c_1=0$ 和 $\alpha_{1j}=c_i+d_j$ 迫使 $d_j=\alpha_{1j}$,$\alpha_{i1}=c_i+d_1$ 迫使 $c_i=\alpha_{i1}-d_1$.这就证明了引理.

那样 $f(n)$ 对 $2n$ 个数$(c_1=0,c_2,\cdots,c_n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$是相等的.对这些数成立 $c_i+d_j=0,\pm 1$.我们列出如下的 8 种可能性:

不同的 c_i	可能的 d_i	c_i 的个数	d_i 的个数	乘积
0	$0,-1,1$	1	3^n	3^n
$0,-2$	1	$2^{n-1}-1$	1	$2^{n-1}-1$
$0,-2,-1$	1	$3^{n-1}-2^n+1$	1	$3^{n-1}-2^n+1$
$0,2$	-1	$2^{n-1}-1$	1	$2^{n-1}-1$
$0,1,2$	-1	$3^{n-1}-2^n+1$	1	$3^{n-1}-2^n+1$
$0,1$	$0,-1$	$2^{n-1}-1$	2^n	$\frac{1}{2}4^n-2^n$
$0,-1$	$0,1$	$2^{n-1}-1$	2^n	$\frac{1}{2}4^n-2^n$
$0,-1,-1$	0	$3^{n-1}-2^n+1$	1	$3^{n-1}-2^n+1$

对最后一列求和得出

$$f(n)=4^n+2\cdot 3^n-4\cdot 2^n+1$$

A-5 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个实变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的在 $\mathbf{R}^n$ 上处处有二阶连续偏导数的函数.此外进一步设存在常数 c_{ij} 使得对所有的 $i,1\leqslant i\leqslant n$ 和 $j,1\leqslant j\leqslant n$ 都有

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=c_{ij}$$

证明:存在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $g(x)$ 使得 $f_i+\partial g/\partial x_i$ 对所有的 $i,1\leqslant i\leqslant n$ 都是线性的.(线性函数是形如 $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的函数)

解 注意对所有的 i 和 j 有 $c_{ji}=-c_{ij}$.设 $h_i=\frac{1}{2}\sum_j c_{ij}x_j$,因而 $\partial h_i/\partial x_j=\frac{1}{2}c_{ij}$,那样

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}-\frac{\partial h_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2}c_{ij}-\frac{1}{2}c_{ji}=c_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

因而对所有的 i 和 j 有

$$\frac{\partial(h_i-f_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial(h_j-f_j)}{\partial x_i}$$

因此$(h_1-f_1,\cdots,h_n-f_n)$是梯度,因而存在一个函数 g 使得

$\partial g/\partial x_i = h_i - f_i$,换句话说,$f_i + \partial g/\partial x_i = h_i$ 是线性的.

A－6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是不同的正整数.假设存在多项式满足等式

$$(1-x)^n f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{b_i}$$

求出用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 和 n(但是不依赖于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$)表示 $f(1)$ 的最简单形式的表示式(不涉及任意形式的和).

解 写

$$(b)_j = b(b-1)\cdots(b-j+1)$$

微分 $(1-x)^n f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^b j (0 \leqslant j \leqslant n)$ 次并且令 $x = 1$ 得出

$$0 = 1 + \sum a_i$$

$$0 = \sum a_i b_i$$

$$0 = \sum a_i (b_i)_2$$

$$\vdots$$

$$0 = \sum a_i (b_i)_{n-1}$$

$$n!f(1) = \sum a_i (b_i)_n$$

用克莱姆法则对 $a_1,\cdots,a_n$ 解前 n 个方程,并代入最后一个方程得

$$n!f(1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (b_i)_n (-1)^i \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & \hat{b}_i & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (b_1)_{n-1} & \cdots & (\hat{b}_i)_{n-1} & \cdots & (b_n)_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (b_1)_{n-1} & \cdots & (b_2)_{n-1} & \cdots & (b_n)_{n-1} \end{vmatrix}}$$

其中 ^ 指出一个缺失的元素.分母 D 是 $b_1,\cdots,b_n$ 的阶为 $\binom{n}{2}$ 的多项式,它在 $b_i = b_j, i \neq j$ 时等于零.因此 $D = C\prod_{i<j}(b_i - b_j)$.常数 C 当考虑,比如说 $b_2 b_3^2 \cdots b_n^{n-1}$ 的系数时,可以看出是1.因此 $D = \prod_{i<j}(b_i - b_j)$(这也可以通过对范德蒙行列式实行行的初等变换来证明).

在分子中令 $b_i = b_j (i \neq j)$,那么除了两项之外,其它的项都

变为零.这两项的数量相等而符号相反.因此 $b_i - b_j$ 整除分子,因而分母整除分子.因此 $n!f(1)$ 是 $b_1,\cdots,b_n$ 的多项式.由于分子中的每一项的阶数比分母的阶数大 n,因此这个多项式的阶数小于等于 n.

现在,令 $b_i = 0$.那么分母不为零,但是分子的每一项是零.因此 b_i 整除 $n!f(1)$,因而对某个常数 k,$n!f(1) = kb_1b_2\cdots b_n$.由令 $f(x) = 1$(因此 $b_i = i$)我们看出 $k = 1$.那样 $n!f(1) = b_1b_2\cdots b_n$.

B－1　如图1,在单位圆中嵌入一个底为 b,高为 h 的矩形和一个以 b 为底的等腰三角形.对 h 的什么值,矩形和三角形的面积相等.

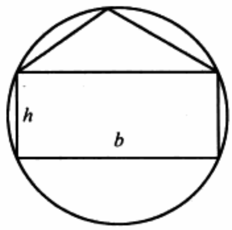


图 1

解　三角形的高是$\frac{1}{2}(2-h)$,面积相等意味着

$$h = \frac{1}{2}(\text{三角形的高}) = \frac{1}{4}(2-h)$$

因此 $h = 2/5$.

B－2　证明:只存在有限个有序三元组 $T = (x-y, y-z, z-x)$,其中 x,y 和 z 是满足以下方程组的复数.

$$x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2zx = z(z-1) + 2xy$$

并且列出所有那种三元组 T.

解　题目中的方程组等价于

$$(x-y)(x+y-1-2z) = (y-z)(y+z-1-2x) = (z-x)(z+x-1-2y)$$

如果 x,y,z 两两不相等,那么

$$x+y-1-2z = y+z-1-2x = z+x-1-2y$$

把这些式子相加得出矛盾 $-3 = 0$,因此 x,y,z 中至少有两个相等.如果 $x = y$ 而 $y \neq z$,那么

$$z = 2x + 1 - y = x + 1$$

在这种情况下我们求出 $x-y = 0, y-z = -1$ 以及 $z-x = 1$.当 $y = z$ 而 $z \neq x$ 以及 $z = x$ 而 $x \neq y$ 时有类似的结果.那样,这就使得 $(x-y, y-z, z-x)$ 仅可能是 $(0,0,0)$,$(0,-1,1)$,$(1,0,-1)$ 和 $(-1,1,0)$.容易说明这几种情况都确实会发生.

B - 3 设 Γ 由所有 x 的整系数多项式所组成.对 Γ 中的 f 和 g 以及整数 m, $f \equiv g \pmod m$ 意为 $f - g$ 的所有系数都是 m 的倍数.设 n, p 是正整数,而 p 是素数.在 Γ 中给定 f, g, h, r 和 s 并且 $rf + sg \equiv 1 \pmod p$ 以及 $fg \equiv h \pmod p$,证明在 Γ 中存在 F 和 G 使得 $F \equiv f \pmod p$, $G \equiv g \pmod p$ 以及 $FG \equiv h \pmod{p^n}$.

解 设对 $k \geqslant 1$ 我们有整系数多项式 F_k 和 G_k 使得 $F_k \equiv f \pmod p$, $G_k \equiv g \pmod p$ 以及 $F_kG_k \equiv h \pmod{p^k}$.对 $k = 1$,这可以令 $F_1 = f$, $G_1 = g$.设对某个 $t \in \Gamma$, $h - F_kG_k = tp^k$.设 $F_{k+1} = F_k + stp^k$ 以及 $G_{k+1} = G_k + rtp^k$,那么

$$F_{k+1} \equiv F_k \equiv f \pmod p$$

以及

$$G_{k+1} \equiv G_k \equiv g \pmod p$$

还有

$$F_{k+1}G_{k+1} = F_kG_k + tp^k(rF_k + sG_k) + rst^2p^{2k} \equiv F_kG_k + tp^k(rF_k + sG_k) \pmod{p^{k+1}}$$

由假设可知

$$rF_k + sG_k \equiv rf + sg \equiv 1 \pmod p$$

因而对某个 $q \in \Gamma$ 有 $rF_k + sG_k = 1 + qp$,那样

$$F_{k+1}G_{k+1} \equiv F_kG_k + tp^k(1 + qp) \pmod{p^{k+1}} \equiv F_kG_k + tp^k \pmod{p^{k+1}} \equiv h \pmod{p^{k+1}}$$

因此我们已完成了数学归纳法的步骤.(所得的结果无论 p 是否是素数都成立并且不依赖于多项式变量的数目)

B - 4 对正实数 r,设 $G(r)$ 是 $|r - \sqrt{m^2 + 2n^2}|$ 对所有整数 m, n 的最小值.证明或者否定断言: $\lim\limits_{r \to \infty} G(r)$ 存在并等于 0.

解 设 m 是 $N = \{0, 1, \cdots\}$ 中使得 $r^2 \geqslant m^2$ 的最大整数, n 是 N 中使得 $(r^2 - m^2)/2 \geqslant n^2$ 的最大整数.由此得出

$$r^2 - m^2 < 2m + 1 \leqslant 2r + 1$$

以及

$$\frac{r^2 - m^2}{2} - n^2 < 2n + 1 \leqslant 2\sqrt{\frac{r^2 - m^2}{2}} + 1 < 2\sqrt{\frac{2r + 1}{2}} + 1 = \sqrt{2(2r + 1)} + 1$$

因此

$$r^2 - m^2 - 2n^2 < 2\sqrt{2}\sqrt{2r + 1} + 2$$

由于 $r^2 - m^2 - 2n^2 = (r - \sqrt{m^2 + 2n^2})(r + \sqrt{m^2 + 2n^2})$

$$r^2 - \sqrt{m^2 + 2n^2} = \frac{r^2 - m^2 - 2n^2}{r + \sqrt{m^2 + 2n^2}} < \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2r+1} + 2}{r}$$

当 $r \to 0$ 时上式趋于零,因此

$$\lim_{r \to \infty} G(r) = \lim_{r \to \infty} | r - \sqrt{m^2 + 2n^2} | = 0$$

B-5　设 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$. $p(x,y,z)$, $q(x,y,z)$, $r(x,y,z)$ 是满足[①]

$$f(p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z)) = f(x,y,z)$$

的实系数多项式. 证明或者否定断言:叙列 p,q,r 是 $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ 的某种排列,其中减号的个数是 0 或 2.

解　这个断言是错的. 令 $p = x, q = y, r = -z - xy$. 我们可以由注意到如果 (p,q,r) 是一组解,那么 $(p,q,-r-pq)$ 也是一组解而生成一个无限叙列的反例.

B-6　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是域 F 中的 $n \times n$ 矩阵,满足条件 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{CD}^{\mathrm{T}}$ 是对称的,并且 $\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$. 其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $n \times n$ 单位阵,以及如果 $\boldsymbol{M}$ 是 $n \times n$ 阵, $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的转置. 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$.

解　问题的条件是

(1) $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{CD}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{CD}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{DC}^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$.

条件(1)蕴含 $\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = 0$($n \times n$ 矩阵). 条件(2)蕴含 $\boldsymbol{CD}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{DC}^{\mathrm{T}} = 0$, 而条件(3)的转置是 $\boldsymbol{DA}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{CB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$. 因此我们有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{CD}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{DC}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{CB}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{DA}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此得出

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

此式的右下角即是 $-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$.

---

① 满足等式.——译者注

第48届美国大学生数学竞赛

A－1 平面上的曲线 A,B,C 和 D 定义如下

$$A=\left\{(x,y)\mid x^2-y^2=\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

$$B=\left\{(x,y)\mid 2xy+\frac{x}{x^2+y^2}=3\right\}$$

$$C=\{(x,y)\mid x^3-3xy^2+3y=1\}$$

$$D=\{(x,y)\mid 3x^2y-3x-y^3=0\}$$

证明：$A\cap B=C\cap D$.

解法1 首先注意(0,0)不属于 $A\cap B$ 或 $C\cap D$，因此以下假设 $(x,y)\neq(0,0)$.

设 $Eq(i),i=1,2,3,4$ 分别表示定义集合 A,B,C,D 的方程，$f(x,y)Eq(i)$ 表示在 $Eq(i)$ 的两边乘以 $f(x,y)$ 所得的方程.

矩阵乘积

$$\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Eq(1)\\ Eq(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Eq(3)\\ Eq(4)\end{pmatrix}$$

说明 $A\cap B\subseteq C\cap D$，而

$$\begin{pmatrix}Eq(1)\\ Eq(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Eq(3)\\ Eq(4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Eq(3)\\ Eq(4)\end{pmatrix}$$

说明 $C\cap D\subseteq A\cap B$.

这两个包含关系就说明 $A\cap B=C\cap D$.

解法2 设 $z=x+\mathrm{i}y$，那么

$(x,y)\in A\cap B$ 当且仅当 $z^2=3\mathrm{i}+1/z$

当且仅当 $z^3=3\mathrm{i}z+1$

当且仅当 $(x,y)\in C\cap D$.

A－2　数字叙列 12345678910111213141516171819202l… 由顺序写下正整数而得到. 如果在这个叙列的第 10^n 项的数在顺序写下的某个 m 位数字中,那么定义 $f(n)=m$. 例如 $f(2)=2$,由于此叙列的第 100 项是 5,它在正整数 55 之中①,求出 $f(1\,987)$,并证明你的结论.

解　从 10^{r-1} 到 10^r-1 都是 r 位数,因此共有 10^r-10^{r-1} 个 r 位数. 那样,在全部数字中至多有 r 位数的数字个数对 $r\geqslant 1$ 是

$$g(r)=\sum_{k=1}^{r}k(10^k-10^{k-1})=-1+\sum_{k=1}^{r-1}(k-(k+1))10^k+r10^r=$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}10^k+r10^r=r10^r-(10^r-1)/9$$

但是

$$0<(10^r-1)/9<10^r$$

因此

$$(r-1)10^r<g(r)<r10^r$$

那样

$$g(1\,983)<1\,983\cdot 10^{1\,983}<10^4\cdot 10^{1\,983}=10^{1\,987}$$

而

$$g(1\,984)<1\,983\cdot 10^{1\,984}>10^3\cdot 10^{1\,984}=10^{1\,987}$$

这就得出

$$f(1\,987)=1\,984$$

A－3　对所有的实数 x,实值函数 $y=f(x)$ 满足

$$y''-2y'+y=2e^x$$

(1) 如果对所有的实数 x,$f(x)>0$,是否对所有的实数 x 必有 $f'(x)>0$?解释之.

(2) 如果对所有的实数 x,$f'(x)>0$,是否对所有的实数 x 必有 $f(x)>0$?解释之.

解　题目中的微分方程的一般解是

$$f(x)=(x^2+bx+c)e^x$$

其中 b 和 c 是实数. 对这个数

$$f'(x)=(x^2+(b+2)x+(b+c))e^x$$

显然当且仅当 $D=b^2-4ac<0$ 时②,对所有的 x,$f(x)>0$. 而当且仅当

$$D'=(b+2)^2-4(b+c)=$$

$$b^2+4b+4-4b-4c=D+4<0$$

时,对所有的 x,$f'(x)>0$.

---

① 如果你把第 100 项附近的数字都写出来就会发现,这个叙列的片断是

…		98	99	100	101	102	…
…5	3	5	4	5	5	5	6…

因此第 100 项的 5 这个数是位于你顺序写下的正整数 55 中,而这个 55 是一个二位数,因此,$f(2)=2$.

② 应是 $D=b^2-4c$ 时.

(1) 的答案是“不”,由于 $D<0$ 不蕴含 $D'<0$.(例如取 $b=c=1$,那么对所有的 x,$f(x)>0$,但是 $f'(-1)=0$)

(2) 的答案是“对”,由于 $D'<0$ 蕴含 $D<0$.

A－4 设 P 是一个三个变量的实系数多项式而 F 是一个两个变量的函数,使得对所有的 x,y,z,u 都有

$$P(ux,uy,uz)=u^2F(y-x,z-x)$$

并且 $P(1,0,0)=4$,$P(0,1,0)=5$ 以及 $P(0,0,1)=6$.此外令 A,B,C 是使得 $P(A,B,C)=0$ 和 $|B-A|=10$ 的复数.求 $|C-A|$.

解 设 $u=1$ 和 $x=0$,我们有 $F(y,z)=P(0,y,z)$ 是一个多项式.$F(uy,uz)=P(0,uy,uz)=u^2F(y,z)$,因此 F 是阶为 2 的齐次式.现在 $P(x,y,z)=F(y-x,z-x)$,蕴含

$$P(x,y,z)=a(y-x)^2+b(y-x)(z-x)+c(z-x)^2$$

其中 a,b,c 是实数.那么

$$4=P(1,0,0)=a+b+c$$

$$5=P(0,1,0)=a$$

以及

$$6=P(0,0,1)=c$$

这就得出 $4=P(1,0,0)=a+b+c=5+b+6$,因此 $b=-7$.

对假设中的复数 A,B,C,我们有

$$5(B-A)^2-7(B-A)(C-A)+6(C-A)^2=0$$

设 $m=(C-A)/(B-A)$,那么

$$5-7m+6m^2=0$$

$$6m^2-7m+5=0$$

的根是复的,因此 $|m|=\sqrt{5/6}$,因此

$$|C-A|=\sqrt{5/6}\,|B-A|=(5/3)\sqrt{30}$$

A－5 设

$$\boldsymbol{G}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+4y^2},\frac{x}{x^2+4y^2},0\right)$$

证明或者否定存在一个向量值函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(\boldsymbol{M}(x,y,z),\boldsymbol{N}(x,y,z),\boldsymbol{P}(x,y,z))$$

具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$ 对所有的 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 有连续偏导数.

(2) 对所有的 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 有 $Curl\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{F}(x,y,0)=\boldsymbol{G}(x,y)$.

解 注意 Curl $\boldsymbol{G}=0$除非(x,y,z)是在z轴上.如果$\boldsymbol{F}$存在,那么由斯托克斯定理可知

$$\int_C \boldsymbol{G}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S (\mathit{Curl}\ \boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

其中 C 是 xy 平面中的椭圆 $x^2+4y^2=1,z=0$,而 S 是椭球 $x^2+4y^2+z^2=1$ 的使得 $z\geqslant 0$ 的部分.然而这一积分不可能等于0.例如,在 C 上 $x^2+4y^2=1$,那样

$$\int_C \boldsymbol{G}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_E 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathit{Area}(E)$$

其中 E 是 C 的内部.因而 $\boldsymbol{F}$ 不存在.

A-6 对每个正整数 n,设 $a(n)$ 表示 n 的3进位数中0的个数.对哪些正实数 x,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$$

收敛?

解 对每个整数 $k\geqslant 0$,当且仅当 $3^k\leqslant n<3^{k+1}-1$ 时,n 的3进位数有 $k+1$ 位数字.在这个区间的整数中有 $\binom{k}{i}2^{k+1-i}$ 个使得 $a(n)=i$,因此

$$\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1}x^{a(n)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i 2^{k+1-i}=2(x+2)^k$$

那样
$$\frac{2(x+2)^k}{3^{3k+3}}<\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}<\frac{2(x+2)^k}{3^{3k}}$$

而因此
$$\frac{2}{27}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x+2}{27}\right)^k<\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}<2\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x+2}{27}\right)^k$$

这就得出(对 $x>0$)当且仅当$(x+2)/27<1$即 $0<x<25$ 时,级数收敛.

B-1 计算$\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$.

解法1 设 I 表示所求积分的值,替换 $9-x=y+3$ 给出

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(y+3)}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}$$

因此 $2I=\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}\mathrm{d}x=2$ 而 $I=1$.

解法 2 更一般的,如果

$$S=\int_a^b \frac{f(x)\mathrm{d}x}{f(x)+f(a+b-x)}$$

那么

$$S=\int_a^b\left(1-\frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\right)\mathrm{d}x$$

$$(b-a)-\int_b^a \frac{f(t)(-\mathrm{d}t)}{f(a+b-t)+f(t)}=(b-a)-S$$

因此 $S=(b-a)/2$.在这个问题中 $f(x)=\sqrt{\ln(9-x)}$,$a=2$,$b=4$,因此 $S=1$.

B-2 设 r,s 和 t 是整数 $0\leqslant r,0\leqslant s$ 以及 $r+s\leqslant t$.证明

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}}+\frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{t+1}}+\frac{\binom{s}{2}}{\binom{t}{t+2}}+\cdots+\frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{t+s}}=$$

$$\frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}$$

(注意:$\binom{n}{k}$表示二项式系数 $n(n-1)\cdots(n+1-k)/(k(k-1)\cdots3\cdot2\cdot1)$)

解法 1 设

$$F(r,s,t)=\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}}+\frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}}+\cdots+\frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}}$$

那么

$$F(r,s,t)=\frac{\binom{s-1}{0}}{\binom{t}{r}}+\frac{\binom{s-1}{0}+\binom{s-1}{1}}{\binom{t}{r+1}}+\cdots+$$

$$\frac{\binom{s-1}{s-2}+\binom{s-1}{s-1}}{\binom{t}{r+s-1}}+\frac{\binom{s-1}{s-1}}{\binom{t}{r+s}}=$$

$$F(r,s-1,t)+F(r+1,s-1,t)$$

现在容易用对 s 做归纳法得出证明.

解法 2 我们看出

$$\sum_{i=0}^{s}\frac{\binom{s}{i}}{\binom{t}{r+i}}=\frac{s!r!(t-r-s)!}{t!}\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{r}\binom{t-r-i}{t-r-s}$$

利用二项式的展开式,我们看出

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{t-s+1+j}{t-s+1}x^{j}=\frac{1}{(1-x)^{t-s+2}}=$$

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{t-r-s+1}}=$$

$$\left(\sum_{a=0}^{\infty}\binom{r+a}{r}x^{a}\right)\left(\sum_{bs=0}^{\infty}\binom{t-r-s-b}{t-r-s}x^{b}\right)=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{r+i}{r}\binom{t-r-s+j-i}{t-r-s}\right)x^{j}$$

让等式两边 x^s 的系数相等就得到

$$\binom{t+1}{t-s+1}=\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{r}\binom{t-r-i}{t-r-s}$$

因此

$$\sum_{i=0}^{s}\frac{\binom{s}{i}}{\binom{t}{r+i}}=\frac{s!r!(t-r-s)!}{t!}\cdot\frac{(t+1)!}{s!(t-s+1)!}=$$

$$\frac{t+1}{(t-s+1)\binom{t-s}{r}}$$

解法 3 问题等价于证明

$$\sum_{i=0}^{s}\frac{\binom{s}{i}\binom{t-s}{r}}{\binom{t}{r+i}}=\frac{t+1}{t+1-s}$$

可以直接说明

$$\frac{\binom{s}{i}\binom{t-s}{r}}{\binom{t}{r+i}}=\frac{t+1}{t+1-s}=\frac{\binom{r+i}{r}\binom{t-r-i}{t-s-r}}{\binom{t}{s}}$$

因此,设 $l=r+i$,我们就有

$$\sum_{i=0}^{s}\frac{\binom{s}{i}\binom{t-s}{r}}{\binom{t}{r+i}}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\binom{r+i}{r}\binom{t-r-i}{t-s-r}}{\binom{t}{s}}=$$

$$\frac{1}{\binom{t}{s}}\sum_{l=r}^{r+s}\binom{l}{r}\binom{t-l}{t-(s+r)}$$

现在$\sum_{l=r}^{r+s}\binom{l}{r}\binom{t-l}{t-(s+r)}$是在 t 个二进数字的叙列中,在第 l 个数字后插入逗号,使得有 r 个 1 在逗号之前(在前 l 个数字中)并且有 $t-(s+r)$ 个 1 在逗号后(最后的 $t-l$ 个数字)的安排方式的数目.

但是,把逗号看成叙列中的另一种符号,我们看出这是在含有 s 个 0 的 $t+1$ 个符号的叙列中,第 $r+1$ 个非 0 符号必是逗号的安排方式的数目.那样叙列完全由 0 的位置所确定,因而叙列的数目是$\binom{t+1}{s}$.

那样

$$\sum_{l=r}^{s+r}\binom{l}{r}\binom{t-l}{t-(s+r)}=\binom{t+1}{s}$$

这即可得出结果.

B-3 设 F 是使得 $1+1\neq 0$ 的域.证明:F 中方程 $x^2+y^2=1$ 对于 x 和 y 的解的集合由 $(x,y)=(1,0)$ 和

$$(x,y)=\left(\frac{r^2-1}{r^2+1},\frac{2r}{r^2+1}\right)$$

给出,其中 r 遍历 F 中 $r^2\neq -1$ 的元素.

解 设对域 F 中任意使得 $r^2\neq 1$ 的元素

$$x_r=\frac{r^2-1}{r^2+1},y_r=\frac{2r}{r^2+1}$$

容易验证 $(1,0)$ 和 (x_r,y_r) 满足 $x^2+y^2=1$.

现在问题成为说明如果 x,y 在 F 中,$(x,y)\neq(1,0)$,那么对某个 r 必有 $x=x_r,y=y_r$.我们观察到对 $x_r\neq 1,r=y_r/(1-x_r)$,而这建议我们令 $r=y/(1-x)$,然后我们有

$$r^2+1=\left(\frac{y}{1-x}\right)^2+1=\frac{y^2+(1-x)^2}{(1-x)^2}=$$
$$\frac{y^2+x^2-2x+1}{(1-x)^2}=\frac{2-2x}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x}\neq 0$$

而因此 $\quad r^2-1=2/(1-x)-2=2x/(1-x)$

这就得出

$$x_r=\frac{r^2-1}{r^2+1}=x,y_r=\frac{2r}{r^2+1}=y$$

B－4　设$(x_1,y_1)=(0.8,0.6)$，$x_{n+1}=x_n\cos y_n-y_n\sin x_n$和$y_{n+1}=x_n\sin y_n+y_n\cos x_n$.证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在并求出它们或证明它们不存在.

解　设$y_0=\arccos 0.8$，$\theta_n=y_0+y_1+\cdots+y_n$.那么$x_{n+1}=\cos\theta_n$，$y_{n+1}=\sin\theta_n$.由于对$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)\leqslant\pi-\theta$，因而容易用归纳法证明对$n=1,2,3,\cdots$成立$0<\theta_n\leqslant\theta_{n+1}\leqslant\pi$，这说明$\theta_0,\theta_1,\cdots$是单调有界叙列，因此$L=\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n$存在.这就得出$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

由于$\cos t$和$\sin t$对所有的实数t连续，故

$$0=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=\sin(\lim_{n\to\infty}\theta_n)=\sin L$$

由于$0<L\leqslant\pi$，上式就蕴含$L=\pi$，那样

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=\cos(\lim_{n\to\infty}\theta_n)=\cos L=\cos\pi=-1$$

B－5　设$\boldsymbol{O}_n$是n维零向量$(0,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{M}$是$2n\times n$复矩阵，使得$(z_1,z_2,\cdots,z_n)\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}_n$，其中复数$z_i$都不为零，那么$z_i$中至少有一个不是实数.证明：对任意实数$r_1,r_2,\cdots,r_{2n}$，存在复数$w_1,w_2,\cdots,w_n$使得

$$\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_{2n}\end{pmatrix}$$

（注意：如果$\boldsymbol{C}$是一个复矩阵，$\mathrm{Re}(\boldsymbol{C})$就是元素为$\boldsymbol{C}$的元素的实部的矩阵）

解　让$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}$其中$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是实$2n\times n$矩阵，$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$是实$2n\times 2n$矩阵以及

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v}$$

其中$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$是长度为$n$的实列向量，那么

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{w})=\mathrm{Re}((\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v}))=$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ -\boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

因此我们需要说明$\boldsymbol{N}$是可逆的.假设$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{2n})$是长度为$2n$并使得$\boldsymbol{x}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{O}_{2n}$的实向量，那么$\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_n$，$\boldsymbol{x}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}_n$，因此

$xM = x(A+\mathrm{i}B) = O_n$. 所以由假设可知 $x = O_{2n}$，而因此 N 是可逆的.

B-6 设 F 是 p^2 个元素的域，其中 p 是一个奇素数. 设 S 是 F 中 $(p^2-1)/2$ 个不同的非零元素，具有性质：对每一个 F 中的 $a\neq 0$，a 和 $-a$ 二者之中，恰有一个在 S 中. 设 N 是 $S\cap\{2a\mid a\in S\}$ 的元素的个数，证明 N 是偶数.

解法 1 对 S 中的 a，设 $2a=\varepsilon_a s_a$，其中 s_a 在 S 中，而 $\varepsilon_a=\pm 1$. 令 $M=(p^2-1)/2-N$，因此 M 是 S 中使得 $\varepsilon_a=-1$ 的 a 的数目. 如果 a,b 在 S 中并且 $s_a=s_b$，那么 $a=\pm b$，因而 $a=b$. 所以当 a 跑遍 S 时，s_a 也跑遍 S. 因此在 F 中

$$2^{(p^2-1)/2}\prod_{a\in S}a=\prod_{a\in S}(\varepsilon_a s_a)=(-1)^M\prod_{a\in S}s_a=(-1)^M\prod_{a\in S}a$$

因此 $(-1)^M=2^{(p^2-1)/2}$. 利用有限群的拉格朗日定理或欧拉定理或费马小定理就有

$$2^{(p^2-1)/2}=(2^{p-1})^{(p+1)/2}=(1)^{(p+1)/2}=1$$

而因此 M 是偶数. 但是 $(p^2-1)/2$ 也是偶数，所以 N 是偶数.

解法 2 设 Z_p 表示 p 个元素的有限域 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 而 F 的元素由 $\{a+bx\mid a,b\in Z_p\}$.

设 $H=\{1,2,\cdots,(p-1)/2\}$，$S_0=\{a+bx\mid b\in H, a\in Z_p$ 或 $b=0, a\in H\}$，$T_0=2S_0$. 那么 S_0 满足问题中的条件，因而 $|S_0\cap T_0|$ 是偶数.

注意任意其他的具有问题中条件的集合 S 可以通过对 S_0 连续地施行操作“从 S_0 中取出 α，并用 $-\alpha$ 替代它”而获得.

设 S 是一个满足问题中条件的集合，使得 $T=2S$，$|S\cap T|$ 是偶数. 又设 $\alpha\in S$，$S'=(S-\{\alpha\})\cup\{-\alpha\}$，$T'=2S'$.

如果 $\alpha/2\in S$，$2\alpha\in S$，那么

$|S'\cap T'|=|S\cap T|-2$（α 和 2α 都不在 $S'\cap T'$ 中）

如果 $\alpha/2\in S$，$-2\alpha\in S$，那么

$|S'\cap T'|=|S\cap T|$（2α 不在 $S'\cap T'$ 中，但是 $-\alpha$ 在）

如果 $-\alpha/2\in S$，$-2\alpha\in S$，那么

$|S'\cap T'|=|S\cap T|+2$（$-\alpha$ 和 -2α 都在 $S'\cap T'$ 中）

在每种情况下，集合的势的净改变是 $0\pmod 2$，因而由前面的注记就可得出结果.

第 49 届美国大学生数学竞赛

A－1　设 R 是由坐标平面中满足条件 $|x|-|y|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$ 的点 (x,y) 所组成的区域，画出区域 R 并求出它的面积.

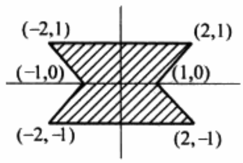


图 1

解　R 在第一象限内的部分的边界是 $x=0,y=0,x-y=1$ 和 $y=1$. 这是一个以 $(0,0),(1,0),(2,1)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的梯形（图 1），面积是 3/2. 由于当 (x,y) 在 R 中时，$(\pm x,\pm y)$ 也在 R 中，因此 R 在其他象限内的部分可由对称性获得，因而 R 的面积是 6.

A－2　一个并不罕见的微积分计算错误是相信导数的乘积法则，例如 $(fg)'=f'g'$. 如果 $f(x)=e^{x^2}$，确定并且证明是否存在一个开区间 (a,b) 和一个定义在 (a,b) 上的非零函数 g 使得这个错误的乘积对于 (a,b) 中的 x 是对的.

解　由 $g(x)=e^x\sqrt{2x-1}$ 定义的函数在 $\frac{1}{2}<a<x<b$ 上具有所需的性质，而由 $g(x)=e^x\sqrt{1-2x}$ 在 $a<x<b<\frac{1}{2}$ 上具有所需的性质.

为了导出结果，考虑方程 $(fg)'=f'g'$ 并把它重写成以下形式

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f'(x)g'(x)$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{-f'(x)/f(x)}{1-f'(x)/f(x)}$$

如果 $f(x)=e^{x^2}$，那么我们有

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{-2x}{1-2x}$$

$$\ln|g(x)|=x+\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$$

这里 C 是一个任意常数. 如果 $\frac{1}{2}<a<x<b$，由此就得出

$$g(x)=Ae^x\sqrt{2x-1}$$

其中 A 是一个任意的正实数. 如果 $a < x < b < \frac{1}{2}$，由此就得出

$$g(x) = Ae^x\sqrt{1-2x}$$

A－3 确定使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\csc\frac{1}{n}-1\right)^x$$

收敛的实数 x 的集合，并证明你的结论.

解 设

$$a_n = \frac{1}{n}\csc\frac{1}{n}-1$$

那么 $a_n = \frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}+\cdots\right)} - 1 =$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{120n^4}+\cdots} - 1 =$$

$$1 + -\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{n^2}g(n) - 1 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6}+g(n)\right)$$

其中，当 $n\to\infty$ 时，$g(n)\to 0$. 因此存在正实数 c, d 和 N 使得对 $n > N$

$$c\frac{1}{n^2} \leqslant a_n \leqslant d\frac{1}{n^2}$$

利用比较原理和 p－检验可求出 $\sum a_n^x$ 对 $x > \frac{1}{2}$ 收敛而对 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ 发散. 但是容易看出这个级数对 $x \leqslant 0$ 也发散，因此答案是 $\{x \mid x > \frac{1}{2}\}$.

A－4 (1) 如果平面上的每个点都被涂成三种颜色之一，那么是否一定存在着两个恰相隔一寸的具有相同颜色的点？

(2) 如果把三换成九，结论又是什么？

验证你的答案.

解 (1) 答案是“对”. 为证明这一点，设 A 是平面上任意一点，ABC 是任意边长为 1 的以 A 为一个顶点的等边三角形(这里的单位自然是寸). 如果 A, B, C 中的任意两点有相同的颜色，那么构造过程结束. 如果不是，设 A' 是 A 的以 BC 为对称轴经过反射所得的点. 如果 A' 与 B 或 C 有相同的颜色，那么构造过程结束. 如果

不是，那么 A 与 A' 有相同的颜色. 注意 A 与 A' 之间的距离是 $\sqrt{3}$ 并且任意两个距离是 $\sqrt{3}$ 的点可以做一个以这两点之一为顶点，边长为1的等边三角形，而另一个点可以以这个三角形的一条边为轴，通过反射而得到.

所得的结果蕴含，对任意初始点 A 或者上述的等边三角形的反射论证结束想得到的某个点 B 或 C 的构造；或者每个距离 A 为 $\sqrt{3}$ 的点和 A 有相同的颜色. 这些和 A 有相同的颜色的点 A' 的集合构成一个半径为 $\sqrt{3}$ 的圆. 这个圆的任何长度为1的弦就产生一对具有相同颜色并且相隔恰为一寸的点.

(2) 答案是"不". 为证此结论，用边长使得对角线长度略小于1然而不等于1的正方形铺满平面. 例如对角线长度是0.9即可. 这时每个正方形的边长将是 $0.9/\sqrt{2}$，比0.63稍微大一点. 用1号颜色给一个正方形染色，用2～9号颜色给与此正方形相邻的8个正方形染色，并重复这一过程，因而可把全平面全部染色. 这样我们就得出一种用大正方形(包含9个小正方形)染色的程序. (对我们目前的目的而言，正方形的边如何染色没有什么关系，可按使我们方便的方式实行，例如，可让正方形的左边和底边与内部的颜色相同)

平面的这种用9种颜色染色的结果是没有两个相同颜色的点恰相隔一寸远. 确实，在全部点中，同色的点或者彼此之间的距离在0.9寸之内，或者要大于 $2\times0.63=1.26$(寸).

A－5　证明：存在一个唯一的从正实数集 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的函数 g 使得对所有的 $x>0$ 成立

$$f(f(x))=6x-f(x),f(x)>0$$

解　对任意 $x>0$，设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，由 $a_0=x,a_{n+1}=f(a_n)$ 所定义. 那么对 $n=0,1,2,\cdots,a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$，这个差分方程的特征根是 -3 和2，因此 $a_n=(-3)^nc+2^nk$，其中 c 和 k 是某两个常数. 由于对所有的 n 有 $a_{n+1}=f(a_n)>0$，我们必须有 $c=0$，因此 $f(x)=2x$. 这个唯一的 f 满足条件. 由于它给出 $f(f(x))=f(2x)=4x=6x-f(x)$ 以及对 $x>0,2x>0$.

A－6　如果一个 n 维向量空间的线性变换 A 具有 $n+1$ 个特征向量使得它们之中任意 n 个都是线性无关的. 这是否能得出 A 一定是数量与恒同变换的乘积?证明你的回答.

解　A 必须是数量与恒同的乘积. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+1}$ 是 A 的

特征向量,使得它们之中任意 n 个是线性无关的,相应的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}$.设 $\boldsymbol{B}_i=\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+1}\}\setminus\{\boldsymbol{X}_i\}$,那么 $\boldsymbol{B}_i$ 是 n 维向量空间中的 n 个线性无关向量的集合,因此 $\boldsymbol{B}_i$ 是一组基.在这组基下,变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵是对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_n)$.那样 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{A})=S-\lambda_i$,其中 S 是特征值的和,$S=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}$.但是线性变换的迹是不依赖于基的选择的.那样,对所有的 i,j 有

$$S-\lambda_i=S-\lambda_j$$

$$\lambda_i=\lambda_j$$

设 λ 是这些特征值的公共值.那么在任何基 $\boldsymbol{B}_i$ 下,A 的矩阵都是对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,这就是说,它是数量与恒同的乘积.

B-1 一个复合的(正整数)是 $\{2,3,4,\cdots\}$ 中不一定不同的 a 和 b 的乘积 ab.证明:每一个合数都可表成 $xy+xz+yz+1$ 的形式,其中 x,y,z 都是正整数.

解 设 $z=1$,我们有

$$xy+xz+yz+1=xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$$

当 x,y 跑遍所有的正整数时,这就给出所有的正和数.

B-2 证明或者否定:如果 x,y 是实数,$y\geqslant 0$,$y(y+1)\leqslant(x+1)^2$,那么 $y(y-1)\leqslant x^2$.

解 所需的结论 $0\leqslant y\leqslant 1$ 是对的.因此不妨设 $y>1$,如果

$$(x+1)^2\geqslant y(y+1)$$

那么我们可以假设 $x>0$,因而

$$x\geqslant\sqrt{y(y+1)}-1\geqslant\sqrt{y(y-1)}$$

而得出结果.(这最后的不等式易于用下述事实验证:对正数 a,b,$\sqrt{ab}+1\leqslant\sqrt{(a+1)(b+1)}$)

B-3 对每一个正整数集合 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,\cdots\}$ 中的 n,设 r_n 是对所有的非负整数 $c,d,c+d=n$,$|c-d\sqrt{3}|$ 的最小值,对所有 $\mathbf{Z}^+$ 中的 n,求出让 $r_n\leqslant g$ 的最小正实数 g.并证明你的结论.

解 设 $g=(1+\sqrt{3})/2$.由于对每个固定的 n,叙列 $n,n-$

$1-\sqrt{3}, n-2-2\sqrt{3}, \cdots, -n\sqrt{3}$ 是以 $2g$ 为公差的算术级数,因而其中存在一个唯一的项 x_n 使得 $-g < x_n < g$,显然 $r_n = |x_n|$.设 $\varepsilon > 0$.由抽屉原理可知,必存在 a,b,使得 $a \neq b$,$|x_a - x_b| < \varepsilon$.设 $t = |a-b|$,在叙列 $r_t, r_{2t}, r_{3t}, \cdots$ 中,存在一个 r_{kt} 使得 $g - \varepsilon < r_{kt} \leqslant g$,因此 g 就是所需的 r_n 的最小上界.

B－4　证明:如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正实数的收敛级数,那么 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{n/(n+1)}$ 也是.

解　设 $S = \{n \mid a_n^{n/(n+1)} < 2a_n\}$.如果 $n \notin S$,那么 $a_n^{n/(n+1)} \geqslant 2a_n$,或者等价地 $1/2 \geqslant a_n^{1-n/(n+1)} = a_n^{1/(n+1)}$,这又等价于 $1/2^n \geqslant a_n^{n/(n+1)}$,这就得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{n/(n+1)} \leqslant \sum_{n\in S} a_n^{n/(n+1)} + \sum_{n \notin S} 1/2^n < \infty$$

B－5　对正整数 n,设 $\boldsymbol{M}_n$ 是 $2n+1$ 乘 $2n+1$ 斜对称矩阵,它的前 n 条主对角线下方的次主对角线中的每个元素都是1,而其余的次主对角线中的元素都是 -1.求出 $\boldsymbol{M}_n$ 的秩,并证明你的结论.(根据矩阵的秩的一种定义它是使得有非零行列式的 $k \times k$ 子矩阵的最大的 k)注意

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解　设 u 是1的第 k 个原根,其中 $k = 2n+1$.对 $1 \leqslant i \leqslant k$,设 $\boldsymbol{L}_i$ 表示列向量$(1, u^{i-1}, u^{2(i-1)}, \cdots, u^{(k-1)(i-1)})$.以 $\boldsymbol{L}_i$ 为第 i 列的 $k \times k$ 矩阵是范德蒙矩阵,因此 $\boldsymbol{L}_i$ 在复数域上是线性无关的.对 $1 \leqslant i \leqslant k$ 我们有 $\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{L}_i = c_i\boldsymbol{L}_i$,其中 c_i 是 $\boldsymbol{L}_i$ 和 $\boldsymbol{M}_n$ 的第一行的数量点积.注意 $c_i = 0$,但是对 $2 \leqslant i \leqslant k$

$$c_i = -\sum_{j=2}^{n+1} u^{(j-1)(i-1)} + \sum_{j=n+2}^{k} u^{(j-1)(i-1)} \neq 0$$

这就得出向量$\{c_2\boldsymbol{L}_2,\cdots,c_k\boldsymbol{L}_k\}$,因而向量$\{\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{L}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{L}_k\}$是线性无关的.但是$\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{L}_1=c_1\boldsymbol{L}_1=0$,因此$\boldsymbol{M}_n$的秩是$2n$.

B-6 证明:存在无穷多个有序整数对(a,b)使得对每个正整数t当且仅当t是一个三角数时,$at+b$也是一个三角数.

(三角数是对$\{0,1,2,\cdots\}$中的n,具有形式$t_n=n(n+1)/2$的数)

解法 1 容易看出$t_{3n+1}=1+9t_n$以及$t_{3n}\equiv t_{3n+2}\equiv 0(\bmod 3)$,这蕴含$(9,1)$是我们的有序对之一.如果数$a_m$和$b_m$由

$$f(x)=9x+1,f(9x+1)=a_2x+b_2,\cdots$$

$$f(a_mx+b_m)=a_{m+1}x+b_{m+1}$$

那么容易用对m的归纳法说明(a_m,b_m)对$m=2,3,\cdots$具有所说的性质.

解法 2 我们说明有序对$(8t_r+1,t_r)$具有所要的性质.设$T=\{0,1,3,6,\cdots\}$是三角数的集合,而$Q=\{1,9,25,49,\cdots\}$是奇整数平方数的集合.等式$(2n+1)^2=8(n^2+n)/2)+1$蕴含

$$当且仅当8t+1在Q中时,t在T中\qquad(*)$$

设$t_r=r(r+1)/2$在T中以及$q=8t_r+1$.

为证充分性,设t在T中,由于Q在乘法运算下是闭的以及由式$(*)$可知$8t+1$在Q中,我们看出

$$q(8t+1)=8qt+q=8qt+8t_r+1=8(qt+t_r)+1$$

在Q中并且由式$(*)$可知$qt+t_r$在T中,这就证明了充分性.

为证必要性,设t是一个整数并且$qt+t_r$在T中,那么

$$8(qt+t_r)+1=8((8t_r+1)t+t_r)+1=(8t_r+1)(8t+1)$$

在Q中.由于$8t+1$是一个整数并且平方的商在Q中,这就得出$8t+1$本身在Q中.那样由式$(*)$可知,t在T中.这就完成了证明.

第 50 届美国大学生数学竞赛

A－1　在用 10 进制写出的，以 1 开头，也以 1 结尾，中间 1 和 0 互相交替的正整数中，有多少个素数？

解　101.

相当容易.

设 k_n 表示叙列中有 n 个 1 的数. 显然 $101 \mid k_{2n}$，因此我们仅需考虑 k_{2n+1}. 但是

$$k_{2n+1} = 1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{4n} = \frac{10^{4n+2}-1}{99} = \frac{10^{2n+1}+1}{11} \cdot \frac{10^{2n+1}-1}{9}$$

上式右边中第一个数是 $1 - 10 + 10^2 - \cdots + 10^{2n}$，第二个数是 $11\cdots1$（$2n+1$ 个 1）.

A－2　计算 $\int_0^a\int_0^b e^{\max(b^2x^2,a^2y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，其中 a 和 b 是正的.

解　用从 $(0,0)$ 到 (a,b) 的对角线把矩形分成两部分，那么积分值就等于 $e^{b^2x^2}$ 在下半部分上的积分的 2 倍. 但是对 y 积分只给出一个 $\frac{bx}{a}$ 的因子，而对 x 的积分是平凡的，给出 $\frac{e^{a^2b^2}-1}{2ab}$，因此所求的值是这个值的两倍，即 $\frac{e^{a^2b^2}-1}{ab}$.

A－3　证明：如果

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$$

那么 $|z| = 1$.（其中 z 是一个复数而 $i^2 = -1$）

解　注意 $z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i}$，但是

$$|11 - 10iz|^2 = (121 + 100|z|^2) + 220\mathrm{Im}\, z$$

以及

$$|11z + 10i|^2 = (121|z|^2 + 100) + 220\mathrm{Im}\, z$$

换句话说,如果 $|z^9|=\frac{N}{D}$,那么

$$N-D=21(1-|z|^2)$$

因此如果 $|z|>1$,则 $N<D$,因而 $|z^9|<1$.同理如果 $|z|<1$,则 $|z^9|>1$,这就得出矛盾,所以 $|z|=1$.

A-4 如果 α 是一个无理数,$0<\alpha<1$,那么是否存在一个用公平的硬币所玩的有限的游戏,使得某一方赢的概率是 α?(一个公平的硬币是指正面和反面出现的概率都是 $\frac{1}{2}$ 的硬币.一个游戏是有限的如果它以 1 为概率在有限步内结束)

解 答案是"对".

设 α 的二进表示是 $0.p_1p_2p_3\cdots$.反复扔那个公平的硬币直到出现正面为止.考虑当且仅当 $p_n=1$ 时正面在扔 n 次后第一次出现的情况.

注意游戏在扔 n 次后结束的概率是$\frac{1}{2^n}$,因此在上述情况中游戏者赢的概率是 $\sum\frac{p_n}{2^n}=\alpha$,这就是所要证的.

最后需要扔硬币次数多于 n 的游戏的概率是$\frac{1}{2^n}$,因此仅需扔有限多次的游戏的概率是所需的 1.

A-5 设 m 是一个正整数,而 G 是一个内接于单位圆的 $2m+1$ 正多边形.证明存在一个不依赖于 G 的正常数 A 具有以下性质:对任意 G 内部的点 p,存在 G 的两个不同的顶点 v_1 和 v_2 使得

$$||p-v_1|-|p-v_2||<\frac{1}{m}-\frac{A}{m^3}$$

其中,$|s-t|$ 表示点 s 和 t 之间的距离.

解 存在 $2n+1$ 种距离,所有这些距离都小于2(圆的直径).因此由抽屉原则可知必有两种距离之差小于$\frac{2}{2n}$.这一结果几乎足够强并建议我们只须稍稍再改善一点就可达到目的了.

显然的一个改善是直径是稍微小于 2 的.事实上多边形的直径是多边形的最长的对角线长度 $2\cos\frac{\pi}{4n+2}$,因此我们需要说明对某个正数 A,$\cos\frac{\pi}{4n+2}<1-\frac{A}{n^2}$.但是容易证明对 $0<x<\frac{\pi}{2}$,$\cos x<1-\frac{x^2}{8}$.由此即可得出结果.

A-6　设 $\alpha = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ 是系数在两元素域中的形式级数.设 $a_n = 1$,如果在 n 的二进位表示中每个由 0 组成的段中都有偶数个 0,否则 $a_n = 0$.(例如 $a_{36} = 1$,由于 $36 = 100100_2$ 而 $a_{20} = 0$ 由于 $20 = 10100_2$)证明:$\alpha^3 + x\alpha + 1 = 0$.

解　由于 $2 = 0$,故 $\alpha^2 = 1 + \sum a_n^2 x^{2n}$,还有 $a_n^2 = a_n$,因此 $\alpha^2 = 1 + \sum a_n x^{2n}$.直接去算 α^3 的表达式是不方便的,但是我们注意如果在问题中的关系式两边都乘以 α 将得出 1,2,4 的幂.而显然

$$\alpha^4 = 1 + \sum a_n x^{4n}$$

因此现在我们考虑 $\alpha^4 + x\alpha^2 + \alpha$,它便于我们分别考虑 x^{4n},x^{4n+2} 和 x^{2n+1} 的系数.

显然 x^{4n} 的系数为 $a_n + a_{4n}$,但是 $a_{4n} = a_n$,由于 $4n$ 的二进表示只不过是在 n 的二进表示的后面添上两个 0.因此 $a_n + a_{4n} = 0$(这不涉及 x^0 的系数,但是显然也有 $1 + 1 = 0$).

x^{4n+2} 的系数恰好是 a_{4n+2},但是 $4n + 2$ 的二进表示的末尾是 $\cdots 10$,因此 $a_{4n+2} = 0$.

最后 x^{2n+1} 的系数是 $a_{2n+1} + a_n$.但是 $2n + 1$ 的二进表示与末尾加了一个 1 的 n 的二进表示相同,因此 $a_{2n+1} = a_n$,因而也有 $a_{2n+1} + a_n = 0$.

这样我们已证明了 $\alpha^4 + x\alpha^2 + \alpha = 0$,但是 $\alpha \neq 0$,故 $\alpha^3 + x\alpha + 1 = 0$.这就是所需证的.

B-1　向一个正方形靶随机地扔一个飞镖.假设靶中任意面积相等的两部分都等可能地被击中,求出那些距离中心比任何一条边距离更近的点被击中的概率.把你的答案表示成

$$\frac{a\sqrt{b} + c}{d}$$

的形式,其中 a,b,c,d 都是整数.

解　答案是 $\frac{4\sqrt{2} - 5}{3}$.

选取坐标轴使正方形的中心是原点.一个点距离中心比距离边 $y = \frac{1}{2}$ 更近,如果它在抛物线 $y = \frac{1}{4} - x^2$ 之下.类似的结果对其他三个边也成立.因此那种点所占的面积是由抛物线和 $y = x$,$y = -x$ 所界的区域 S 的面积的 4 倍.直线 $y = x$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$(=

k 为方便起见）处与抛物线相交. S 的面积是抛物线以下在 $x=-k$ 和 $x=k$ 之间的面积,因而

$$S=2\int_0^k\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x-k^2=\frac{k}{2}-k^2-\frac{2k^3}{3}$$

那样我们就得出所需的面积是$\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$.

B－2 设 S 是有结合运算的左右消去律成立的非空集合($xy=xz$ 蕴含 $y=z$, 并且 $yx=zx$ 蕴含 $y=z$).假设对每个 S 中的 a,集合$\{a^n\mid n=1,2,3,\cdots\}$都是有限的,$S$ 是否一定是群?

解 是.

设 a 是任意一个元素.我们说明对某个 $n>1$ 有 $a^n=a$. a 的幂的集合是有限的,因此对某个 $r>s$ 我们有 $a^r=a^s$.如果 $s=1$,结论已成立.如果 $s\neq 1$,令 $b=a^{s-1}$,那么 $ba^{r-s+1}=ba$,因此可由消去律得出 $a^n=a$,其中 $n=r-s+1>1$.现在设 $e=a^{n-1}$,那么我们有 $ea=ae=a$.

现在取一个任意的 b,我们有 $a(eb)=(ae)b=ab$,消去后得出 $eb=b$.同理$(be)a=b(ea)=ba$,因此 $be=b$.所以 e 是单位元.

a 也有逆.如果 $n-1=1$,那么 $a=e$,因此 a 就是它自己的逆.如果 $n-1>1$,那么 a^{n-2} 是它的逆.

现在如果 b 是任意的其它元素.我们可用同样的论证去求出一个另外的单位元 f 以及一个元素 c 使得 $cb=bc=f$.但是我们有 $e=ef=f$,因此单位元是唯一的,并且 c 就是 b 的逆.

B－3 设 f 是$[0,+\infty)$上可微而且对 $x>0$ 满足

$$f'(x)=-3f(x)+6f(2x)$$

的函数.设对 $x\geqslant 0$, $|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$(因此当 x 增加时,$f(x)$快速地趋于0).对非负整数 n,定义

$$\mu_n=\int_0^{\infty}x^nf(x)\mathrm{d}x$$

(有时称为 f 的 n 次矩).

(1) 用 μ_0 表出 μ_n.

(2) 证明叙列$\left\{\mu_n\frac{3^n}{n!}\right\}$总是收敛的并且仅当 $\mu_0=0$ 时,极限是0.

解 分部积分并利用所给的关系我们得到

$$\mu_n = \frac{3}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\mu_{n+1}$$

因此
$$\mu_n = \frac{n!\,u_0}{3^n}\prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^r}\right)$$

乘积 $\prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^r}\right)$ 收敛到某个正值，由于 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}$ 收敛. 因此 $\frac{3^n}{n!}\mu_n$ 收敛到 u_0 的某个正的倍数. 所以当且仅当 μ_0 是 0 时，极限为 0.

B－4　可数集合是否可有不可数个非空子集使得它们之中任意两个子集的交是有限的?

解　是.

首先考虑有理数集合 **Q**. 对区间 $(0,1)$ 中的每个正实数，取一串收敛到它的有理数叙列. 这给出 **Q** 的一个不可数的子集的集合. 显然任意两个这种集合至多只有有限多个公共元素. 为了得到正整数的对应的子集，只须简单利用正整数和有理数之间的 1－1 对应即可.

B－5　给内接于单位圆的梯形 T(有两个边平行的四边形)的顶点标上字母 A,B,C,D 使得 A,B,C,D 是反时针定向的并且 AB 平行于 CD. 设 s_1,s_2 和 d 表示线段 AB, CD 和 OE 的长度，其中 E 是 T 的对角线的交点而 O 是圆心. 对所有的 T 确定 $\frac{s_1-s_2}{d}$, $d\neq 0$ 的最小上界，指出所有可能达到此上界的情况.

解　解此问题的技巧在于决定用什么作为变量. 把坐标系的原点放在圆心. 设对角线交坐标轴于 $(0,h)$ 点并且对角线之一的斜率为 m，那么这条对角线的方程可写成 $y=mx+h$. 它交圆于两点 x_1,x_2，它们是二次方程

$$x^2+(mx+h)^2=1$$

或者
$$(m^2+1)x^2+2mhx-(1-h^2)=0$$

的两个根. 由于这个方程的一个根是正的而另一个根是负的. 故我们有 $d=2\times$ 两根之和 $=\frac{4mh}{m^2+1}$，因此 $\frac{d}{n}=2\frac{2m}{m^2+1}$. 但是 $(m-1)^2\geqslant 0$ 蕴含当且仅当 $m=1$ 时 $\frac{2m}{m^2+1}\geqslant 1$. 因此仅当等号成立时 $\sup\frac{d}{n}=2$，这时对角线是垂直的.

B－6 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是从由$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$所定义的n维区域中随机选取的一点.f是$[0,1]$上使得$f(1)=0$的连续函数.设$x_0=0,x_{n+1}=1$,证明:黎曼和

$$\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$$

的期望值是

$$\int_0^1 f(t)p(t)\mathrm{d}t$$

其中p是一个阶为n的不依赖于f的多项式,使得对$0\leqslant t\leqslant 1$有$0\leqslant p(t)\leqslant 1$.

解 期望值就是$\dfrac{\int S\mathrm{d}v}{\int \mathrm{d}v}$,其中积分在所允许的区域上进行而$S$是所给的和.

$\int \mathrm{d}v=\dfrac{1}{n!}$(首先从$x_1=0$到$x_2$积分,给出$\dfrac{x_2}{1!}$,然后再从$x_2=0$到$x_3$积分,给出$\dfrac{x_3^2}{2!}$,等).

我们现在处理主要的积分.把和号放到积分号外面就给出n个积分的和.现在在每个积分中至多有两个变量.处理的技巧是对每个积分使用不同的积分次序,使得第一个积分所得成为后一个积分的变量.从x_1开始到结束给我们一个因子$\dfrac{x^i}{i!}$,从x_n开始到结束,给我们另一个因子$\dfrac{(1-x)^j}{j!}$,然后我们在一个单个的从0到1的积分中剩下一个形如$f(x)\dfrac{x^{n-i}(1-x)^i}{(n-i)!i!}$的项.

现在,我们改变求和的次序并且再次积分就得到

$$\int_0^1\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}(1-x)}{(n-1)!1!}+\frac{x^{n-2}(1-x)^2}{(n-2)!2!}+\cdots+\frac{x(1-x)^{n-1}}{1!(n-1)!}\right)\mathrm{d}x$$

用另外一个积分去除这个积分之后(等价于用$n!$去乘),我们得到一个积分值,就是

$$(x+1-x)^n-(1-x)^n=1-(1-x)^n$$

因此就得出我们所需的结果,其中

$$p(x)=1-(1-x)^n$$

第 51 届美国大学生数学竞赛

A - 1 设 $T_0 = 2, T_1 = 3, T_2 = 6$,且对 $n \geqslant 3$

$$T_n = (n+4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n-8)T_{n-3}$$

这数列的前几项是 2,3,6,14,40,152,784,5 168,40 576,363 392.

求出 T_n 的形如 $T_n = A_n + B_n$ 的公式,其中 A_n 和 B_n 是众所周知的叙列.并证明你的结论.

解 T_n 的公式是

$$T_n = n! + 2^n$$

可以通过数学归纳法验证这一公式.或者设 $t_n = n! + 2^n$,那么显然 $t_0 = 2 = T_0, t_1 = 3 = T_1$ 以及 $t_2 = 6 = T_2$,还有

$$t_n - nt_{n-1} = 2^n - n2^{n-1}$$

容易通过直接代入验证 2^n 和 $n2^{n-1}$ 都是迭代方程

$$f_n - 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0 \qquad (*)$$

的解.因此由于 $t_n - nt_{n-1}$ 是式(*)的解的线性组合,因而也是解.因此

$$(t_n - nt_{n-1}) - 4(t_{n-1} - (n-1)t_{n-2}) + 4(t_{n-2} - (n-2)t_{n-3}) = 0$$

或者 $$t_n = (n+4)t_{n-1} - 4nt_{n-2} + (4n-8)t_{n-3}$$

因此 $t_n = T_n$,由于它们对 $n = 0,1,2$ 相等并且对 $n \geqslant 3$ 满足相同的三阶迭代方程(*).

A - 2 $\sqrt{2}$ 是否能是一个形如 $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}\,(n, m = 0,1,2,\cdots)$ 的数的叙列的极限?

解 由于

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}}$$

这就得出当 $n \to \infty$ 时,$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \to 0$,因此存在形如 $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}$ 的任意小的数.由于

$$k(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m})=\sqrt[3]{k^3n}-\sqrt[3]{k^3m}$$

这就得出那种形式的数的集合在乘以一个正数的运算下是封闭的.前面两个命题蕴含所考虑的那种形式的数(在实数中)是稠密的,因而每个实数都是一个那种数的叙列的极限.

A-3 证明:任意顶点的坐标为整数(没有三个顶点共线)的凸五边形的面积必大于等于$\frac{5}{2}$.

解 由 Pick 公式①,面积是 $I+B/2-1$,其中 I 是内部的格点数,B 是边界上的格点数.显然 $I\geqslant 0,B\geqslant 5$.如果 $I\geqslant 1$,结论已得证.

如果 $I=0$,那么根据坐标的奇偶性可把顶点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 分成4类②.那么某一类中必至少包含两个元素,比如说 v_1 和 v_2.因此它们的中点$\frac{1}{2}(v_1+v_2)$也是一个格点.称此格点为 v_0.由于 $I=0$,v_0 必在五边形的边界上.现在考虑5个点$\{v_0,v_2,v_3,v_4,v_5\}$.同理可得出第二个格点 v_0^*,它不是 v_1(由于 v_0^* 是中点),也不在内部(由于 $I=0$).那样,我们就得出了两个新的边界上的点.因此 $B\geqslant 7$,因而又得出面积大于等于5/2.

A-4 考虑一个(理想的)纸打孔机③,它的中心可放在平面上任意一点上,操作此打孔机可以精确地去掉平面上到其中心的距离是无理数的那些点.为了去掉平面上所有的点,需要多少个打孔机?

解 答案④是肯定大于2.理由:任意两个不同的点至少对应于一个点,这个点到所给的两个点之间的距离都是有理数.

以所给的点为圆心,以有理数为半径画圆,如果你选的圆不是太糟糕,那么它们必可相交.(半径要选的比所给两点之间的距离的一半大,但又比它们之间的距离小)

然而3个打孔机已足够了.确实,在不同的中心打两次.由于每个打孔机剩下可数个圆,因此两个打孔机剩下它们各自剩下的圆的交,一个可数集合.考虑所有以这个集合中的点为圆心,具有

① 指格点多边形的面积公式,例如可参看闵嗣鹤《格点与面积》.——译者注

② 指点的坐标形式可分为(奇,奇),(奇,偶),(偶,奇),(偶,偶)这4种类型.——译者注

③ 理想打孔机的构造是从它的中心伸出一个可无限延长的打孔臂,其作用是去掉平面上的一些点.至于它能去掉哪些点,则由它的特性决定.此外,理想打孔机不考虑操作的时间,也就是说,只要它的特性允许去掉的点,在执行命令后即可在瞬间将这些点全部去掉.——译者注

④ 打孔机的数目.——译者注

有理半径的圆.它们和任意直线的交构成一个可数集合.这条直线上不在这个可数集合中的点到所有剩余的点之间的距离都是无理数,以这个点为中心放置第3个打孔机即可.

A-5 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是大小相同的正方矩阵,使得 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{0}$,是否能得出 $\boldsymbol{BABA}=\boldsymbol{0}$.

解 答案是对 2×2 矩阵结论成立而对其它矩阵结论不成立.实际上由于 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{0}$,就得出 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{ABAB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{BA}$ 是幂 $\boldsymbol{0}$ 阵.如果一个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是幂 $\boldsymbol{0}$ 的,那么 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{0}$.(由于 $\boldsymbol{M}$ 的特征方程是2阶的或更低的)

一个对 3×3 矩阵的反例(并且因此只不过是用0去放大,因而适用于任意大小),可取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A-6 如果 X 是一个有限集,$|X|$ 表示 X 中元素的个数.称一个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的有序对 (S,T) 是可行的.如果对每个 $s\in S,s>|T|$ 以及对每个 $t\in T,t>|S|$,那么 $\{1,2,\cdots,10\}$ 有多少个可行的有序对?证明你的解答.

解 设 A_n 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的可行的有序对的个数.显然

$$A_n=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$$

定义

$$B_n=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n+1-i}{j}\binom{n-j}{i}$$

显然 $A_0=B_0=1$,并且

$$B_n-A_n=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n-i}{j-1}\binom{n-j}{i}=$$
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n-i}{j}\binom{n-1-j}{i}=B_{n-1}$$

而

$$A_n-B_{n-1}=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}\binom{n-i}{j}\binom{n-j-1}{i-1}+2=$$
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}\binom{n-i-1}{j}\binom{n-j-1}{i}+1=$$
$$A_{n-1}+1$$

因此我们立即可通过数学归纳法验证

$$A_n = F_{2n+2}, B_n = F_{2n+3} - 1$$

故 $A_{10} = F_{22} = 17\ 711$.($F_i$ 是由 $F_0 = 0, F_1 = 1$ 以及对 $n \geqslant 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 所定义的第 i 个斐波那契数)

B－1 求出所有定义在实直线上的连续可微函数 f 使得对所有的 x 成立

$$(f(x))^2 = \int_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2)\mathrm{d}t + 1\ 990$$

解 有两个那种函数，即 $f(x) = \sqrt{1\ 990}\mathrm{e}^x$ 和 $f(x) = -\sqrt{1\ 990}\mathrm{e}^x$. 为看出这点，假设等式成立，对两边微分得出

$$2f(x)f'(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$$

或等价的

$$(f(x) - f'(x))^2 = 0, f'(x) = f(x)$$

$$\ln|f(x)| = x + C, |f(x)| = e^C e^x$$

但是 f 是连续的并且 $f(0) = \pm\sqrt{1\ 990}$，这就蕴含 $f(x) = \pm\sqrt{1\ 990}\mathrm{e}^x$.

B－2 证明：对 $|x| < 1, |z| > 1$，成立

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty}(1 + x^j)\frac{(1 - z)(1 - zx)(1 - zx^2)\cdots(1 - zx^{j-1})}{(z - x)(z - x^2)(z - x^3)\cdots(z - x^j)} = 0$$

解 设 $S_0 = 1$，对 $n \geqslant 1$，设

$$S_n = 1 + \sum_{j=1}^{n}(1 + x^j)\frac{(1 - z)(1 - zx)(1 - zx^2)\cdots(1 - zx^{j-1})}{(z - x)(z - x^2)(z - x^3)\cdots(z - x^j)}$$

容易验证

$$S_1 = (1 - zx)/(z - x)$$

$$S_2 = (1 - zx)(1 - zx^2)/(z - x)(z - x^2)$$

由数学归纳法可得

$$S_n = \frac{(1 - z)(1 - zx)\cdots(1 - zx^n)}{(z - x)(z - x^2)\cdots(z - x^n)}$$

为了完成证明，我们需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. 为看出这点，注意

$$S_{n+1} = \left(\frac{1 - zx^{n+1}}{z - x^{n+1}}\right)S_n$$

当 $n \to \infty$ 时，$1 - zx^{n+1} \to 0$ 而 $z - x^{n+1} \to z$. 因而存在正数 N 和 ε 使得对所有 $n > N$ 的整数

$$\left|\frac{1 - zx^{n+1}}{z - x^{n+1}}\right| < \frac{1}{|z|} + \varepsilon < 1$$

这就得出所需的结果.

B－3　设 S 是 2×2 整数矩阵的集合，具有性质：

(1) 其元素 a_{ij} 都是整数的平方.

(2) $a_{ij}\leqslant 200$.

证明：如果 S 的元素个数多于 50 387($=15^4-15^2-15+2$)，那么必有两个元素是可交换的.

解　设 U 表示所有的 2×2 矩阵，D 是对角阵而 J 是所有 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 的乘积组成的集合. 注意：

i D 中的任意两个矩阵是可交换的；

ii J 中的任意两个矩阵是可交换的；

iii $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ 是可交换的.

显然

$$|U\cap(D\cup J)^c|=|U|-|D|-|J|+|D\cap J|=15^4-15^2-15+1$$

假设 S 中任意两个元素都不可交换并写

$$S=(S\cap(D\cup J))\cup(S\cap(D\cup J)^c)$$

显然 $|S\cap(D\cup J)|\leqslant 2$，并且(由上面的 iii)

$$|S\cap(D\cup J)^c|\leqslant|U\cap(D\cup J)^c|\leqslant 15^4-15^2-15+1$$

由此即可得出结果.(这里 X^c 表示 X 的余)

数 50 387 远不是最好的并且存在许多可能的潜在的解. 西密歇根大学的 Liu Jiuqiang 和 Allen J. Schwenk 已经利用包括－排除证法说明任意两个元素不可交换的 U 中元素的最大数目是 32 390.

B－4　设 G 是由 a,b 生成的 n 阶有限群. 证明或者否定：存在一个叙列

$$g_1,g_2,g_3,\cdots,g_{2n}$$

使得：

(1) G 中的每个元素恰在此叙列中出现两次.

(2) 对 $i=1,2,\cdots,2n$(把 g_{2n+1} 看成 g_1)，$g_{i+1}=g_ia$ 或 g_ib.

解　构造一个图，它的顶点是用 G 的元素来标记的，因此对每个顶点 g，存在两条"外"弧，一个是到顶点 ga，另一个是到顶点 gb(反过来，每个顶点 g 有两条通向它的"内"弧，一条是从 ga^{-1} 而来，而另一条是从 gb^{-1} 而来). 所得的图是连通的并且每个顶点有外度 2 和内度 2. 因此存在一条经过每个顶点一次并且仅一次然

后再回到起点的欧拉弧.这样列出和顶点相连的群的元素而得出一条路径,当我们沿着这条路径走时就可得出结果.

B-5 是否存在无穷多个非零实数 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 使得对 $n=1,2,3,\cdots$ 多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

恰有 n 个不同的实根?

解 取 $a_0=1,a_1=-1$ 并且归纳地继续下去.我们说 $p_n(x)$ 具有所说的性质并且当 $x\to\infty$ 时视 n 的奇偶性的不同而分别有 $p_n(x)\to\infty$ 或 $p_n(x)\to-\infty$,那么当 M 充分大时

$$p_{n+1}(x)\equiv p_n(x)+\frac{(-x)^{n+1}}{M}$$

有任意接近 $p_n(x)$ 的每个根的变号,同时在 x_n^*+1 处和 $p_n(x)$ 同号,其中 x_n^* 是 $p_n(x)$ 的最大根.但是现在(M 已经固定)对充分大的 x,$p_{n+1}(x)$ 有另外的变号.由于 $p_n(x)$ 至多有 $n+1$ 有个根,这就得出结果.

B-6 设 S 是平面上的非空有界闭集.K 是一条直线,t 是一个正数.设 L_1 和 L_2 是 S 的平行于 K 的支直线.$\overline{L}$ 是平行于 K 的,位于 L_1 和 L_2 正中的直线.设 $B_S(K,t)$ 是距离 $\overline{L}$ 至多为 $\left(\frac{t}{2}\right)w$ 的点的边界,其中 w 是 L_1 和 L_2 之间的距离,如图 1 所示.对所有的 S,使得

$$S\bigcap_K B_S(K,t)\neq\varnothing$$

成立的最小的 t 是多少(K 跑过平面中所有的直线).

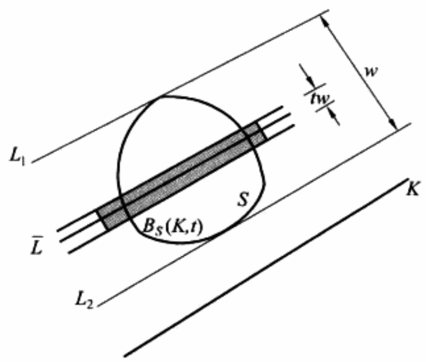


图 1

解 如图 2,把等边三角形划分成 9 个全等的等边三角形.

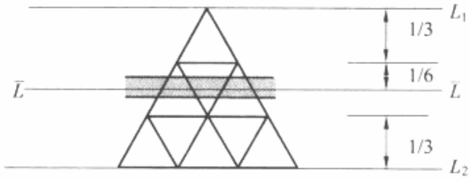


图 2

图 2 说明,任意 $t < 1/3$ 将产生一个空的交.

我们现在说明当 $t \geqslant 1/3$ 时,由于交总包含 S 的质心,因此交是非空的.

设 L_1 是上支线(图 3),设 P_1 是 L_1 和 S 的切点,P_2 是 L_2 和 S 的切点,从 P_1 作延长至直线 L_2 上的点 Q_1,Q_2 的直线,使得 S 中 P_1Q_1"上方"的区域 A_1 的面积和 S 外 P_1Q_1"下方"的区域 B_1 的面积相等.如果通过用 B_1 代替 A_1(类似的用 B_2 代替 A_2)而重组一个新的 S(这是一个三角形),那么新的 S 将有较"低"的质心.但是这个新的质心仍然在距离 L_2(在到 L_1 的方向上)1/3 的平行直线上.因此如果 β 是由 L_1 和 L_2 之间中间的 1/3 的窄条组成的区域,它必包含 S 的质心.所以对 $t = 1/3$,交必不空.这就说明 $t = 1/3$ 是那种值的最小值.

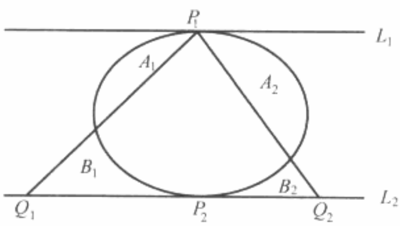


图 3

第52届美国大学生数学竞赛

A-1 一个2×3长方形以(0,0),(2,0),(0,3)和(2,3)为顶点.它先围绕点(2,0)顺时针旋转90°,然后围绕点(5,0)顺时针旋转90°,再围绕点(7,0)顺时针旋转90°,最后再围绕点(10,0)顺时针旋转90°(本来在x轴上的边现在翻过来仍在x轴上).求出最初位置为(1,1)的点的运动曲线以下及x轴以上所含区域之面积.

解 点(1,1)绕(2,0)转到(3,1),再绕(5,0)转到(6,2),再绕(7,0)转到(9,1),再绕(10,0)转到(11,1).所关心的面积包括4个面积为$\frac{1}{2}$的1×1直角三角形,4个面积为1的1×2直角三角形,两个面积为$(\pi/4)(\sqrt{2})^2=\pi/2$的1/4圆,以及两个面积为$(\pi/4)(\sqrt{5})^2=5\pi/4$的1/4圆.因此总面积是$7\pi/2+6$.

A-2 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个不同的$n\times n$实矩阵.如果$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{B}^3$,并且$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$,问$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$是否可逆?

解 否.如果是,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2)^{-1}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\\&(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2)^{-1}(\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^3)=\\&(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2)^{-1}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,矛盾.

A-3 求出所有满足以下要求的$n(n\geqslant2)$阶实多项式,即对每个$p(x)$,存在实数$r_1<r_2<\cdots<r_n$,使得

(1)$p(r_i)=0,i=1,2,\cdots,n$.

(2)$p'\left(\frac{r_i+r_{i+1}}{2}\right)=0,i=1,2,\cdots,n-1$.

这里$p'(x)$是$p(x)$是导数.

解 多项式之集合为$\{ax^2+bx+c \mid a\neq 0, b^2-4ac>0\}$.

首先,如果 $p(x)$ 是这样的多项式,则必有两个不同的实根 r_1,r_2,设 $r_1<r_2$,易于验证,这样的多项式符合条件. 为了证明没有别的多项式符合条件,记

$$p(x)=a(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

这里 $r_1<r_2<\cdots<r_n, n\geqslant 3$,于是

$$p'(x)=a(2x-(r_1+r_2))q(x)+a(x-r_1)(x-r_2)q'(x)$$

这里
$$q(x)=(x-r_3)\cdots(x-r_n)$$

由 Rolle 定理,$q'(x)$ 的所有零点在 r_3 与 r_n 之间,因此$(r_1+r_2)/2$ 不是 $q'(x)$ 的零点,即 $p(x)$ 不符合条件.

A－4 平面上是否存在闭圆盘无穷序列 $D_1,D_2,D_3,\cdots$,它们的圆心分别为 $c_1,c_2,c_3,\cdots$,使得

(1) 在有限平面内,$\{c_i\}$ 没有极限点.

(2) $\{D_i\}$ 的面积和有穷.

(3) 平面上每条直线至少与$\{D_i\}$ 中的一个相交.

解 令$\{a_i\}$ 是一个正数递降序列,$a_1\leqslant 1, \sum a_i=+\infty$,以及$\sum a_i^2<+\infty$(例如,$a_i=1/i$). 令 D_i 是半径为 a_i 的圆盘. 移动 $D_1,D_2,\cdots,D_{m_1}(m_1<+\infty)$(使其中每个圆盘与 $x^2+y^2=1$ 相交),从而覆盖 $x^2+y^2=1$. 这是可能做到的,因为

$$\sum \operatorname{diam}(D_i)=2\sum a_i=+\infty$$

类似地,移动 $D_{m_1}+1,\cdots,D_{m_2}(m_2<+\infty)$ 来覆盖 $x^2+y^2=2$(同样的论证),$\cdots$,移动 $D_{m_{k-1}+1}\cdots,D_{m_k}$ 覆盖 $x^2+y^2=k$,如此下去.

显然,每条直线必相交于某个圆 $x^2+y^2=k$,此外,$\sum a_i^2<+\infty$ 蕴含$\sum \operatorname{area}(D_i)=\pi\sum a_i^2$ 是有限的.

最后,任意圆盘必在某一圆盘 $x^2+y^2\leqslant k_0$①的内部,并且对于$\sqrt{h}>\sqrt{k_0}+4$②,覆盖 $x^2+y^2=h$③的圆盘不能与 $x^2+y^2\leqslant k_0$ 相交(回忆$\{a_i\}$ 是递减的,$a_i\leqslant 1$). 从而$\{c_i\}$ 没有极限点,因为没有圆盘可以包含这们之中的无穷多个.

A－5 求$\int_0^y \sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant y\leqslant 1$ 中的极大值.

---

① 原文是 $x^2+y^2=k_0$.—— 译者注
② 原文是 $h>k_0+4$.—— 译者注
③ 原文是 $x^2+y^2\leqslant h$.—— 译者注

解 令 $I(y)=\int_0^y\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\mathrm{d}x,0\leqslant y\leqslant 1$. 断言 $I'(y)\geqslant 0$. 等式成立仅当 $y=0$(显然,不是所要的最优情况).

为了证明,考察

$$I'(y)=\sqrt{y^4+(y-y^2)^2}+\int_0^y\frac{(y-y^2)(1-2y)}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}\mathrm{d}x$$

如果 $0<y\leqslant\frac{1}{2}$,显然 $I'(y)$ 是正的. 于是假设 $y>\frac{1}{2}$,则 $I'(y)>0$ 等价于

$$\sqrt{y^4+(y-y^2)^2}>(y-y^2)(2y-1)\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}$$

由于 $$\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}\leqslant\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(y-y^2)^2}}=\frac{y}{y-y^2}$$

只须证明 $$\sqrt{y^4+(y-y^2)^2}\geqslant(2y-1)y,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$$

这等同于
$$\begin{aligned}y^4+(y-y^2)^2\geqslant(2y-1)^2y^2&\Leftrightarrow\\ y^2+(1-y)^2\geqslant(2y-1)^2&\Leftrightarrow\\ 2y^2-2y+1\geqslant 4y^2-4y+1&\Leftrightarrow\\ 2y\geqslant 2y^2&\end{aligned}$$

其中最后的式子显然是成立的.

于是当 $y<1,I(y)<I(1)=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=1/3$,故1/3是极大值.

注 如果 $y_0<\frac{1}{2}$,由于被积函数是非负的,以及 $(y(1-y))^2$ 在变换 $y\to 1-y$ 之下是不变的,易于看出 $I(y_0)<I(1-y_0)$,因此,从一开始我们可以只考虑 $y\geqslant\frac{1}{2}$.

A-6 令 $A(n)$ 表示正整数和数 $a_1+a_2+\cdots+a_r$ 为 n 的个数,这里 $a_1>a_2+a_3,a_2>a_3+a_4,\cdots,a_{r-2}>a_{r-1}+a_r$, $a_{r-1}>a_r$. 令 $B(n)$ 表示和数 $b_1+b_2+\cdots+b_s$ 为 n 的个数,并且

(1) $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_s$;

(2) 定义 $g_1=1,g_2=2,g_j=g_{j-1}+g_{j-2}+1$,则每个 b_i 在序列 $\{1,2,4,\cdots,g_j,\cdots\}$ 之中;

(3) 如果 $b_1=g_k$,则 $\{1,2,4,\cdots,g_k\}$ 的每个元至少在 $\{b_i\}$ 中出现一次.

试证明:对每个 $n\geqslant 1,A(n)=B(n)$.

解 用 $A(n)$ 表示的各个和数可以利用斐波那契数给出一

个“排阵”①的表示.用两个由1排成的行来表示 a_{r-1} 和 a_r.下面一行表示 a_r,上面一行表示 a_{r-1}:

$$a_{r-1}:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_r:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

上一行比下一行长,因为 $a_{r-1} > a_r$.

由于 $a_{r-2} > a_{r-1} + a_r$,因此我们能写出②

$$a_{r-2}:\quad 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_{r-1}:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_r:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

紧跟着,$a_{r-3} > a_{r-2} + a_{r-1}$,故

$$a_{r-3}:\quad 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_{r-2}:\quad 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_{r-1}:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$a_r:\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

如此表示的整个排阵包含的各列具形式 $F_1 + F_2 + \cdots + F_s$,易于看出这恰等于 g_s.于是,通过读出各列我们可以看出:由 $A(n)$ 列出的分解和 $B(n)$ 列出的分解是一一对应.

因此,对一切 n,$A(n) = B(n)$.

B-1 对每个整数 $n \geqslant 0$,令 $S(n) = n - m^2$,这里 m 是满足 $m^2 \leqslant n$ 的最大整数.定义序列 $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ 如下:$a_0 = A$,$a_{k+1} = a_k + S(a_k)$,$k \geqslant 0$.问 A 是什么样的正整数才能使这个序列最终成为常数?

解 如果 A 是完全平方,该序列最终是常数,因为它等同于 A.如果它设有一项是完全平方,很显然,序列发散到无穷.现在设 a_n 不是完全平方,但 $a_{n+1} = (r+1)^2$.若 $a_n \geqslant r^2$,则

$$a_{n+1} = a_n + S(a_n)$$
$$(r+1)^2 = a_n + (a_n - r^2)$$
$$r^2 + (r+1)^2 = 2a_n$$

由于左边是奇数而右边是偶数,从而矛盾.另一方面,若 $a_n < r^2$,我们有

① 原文为 array.
② 原文是“唯一地写出.”—— 译者注

$$(r+1)^2=a_n+S(a_n)<r^2+(r^2-1-(r-1)^2)=$$
$$r^2+2r-2$$

再一次矛盾.因此只要 A 不是完全平方,就没有 a_n 是完全平方.

B－2 假设 f 和 g 是 **R** 上的非常数的可微分实值函数,并且假设对每对实数 x 和 y,有

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$$

如果 $f'(0)=0$,求证:对一切 x,有 $(f(x))^2+(g(x))^2=1$.

解 两个方程的两边对 y 微分,得到

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)-g(x)g'(y)$$
$$g'(x+y)=f(x)g'(y)+g(x)f'(y)$$

令 $y=0$,我们有

$$f'(x)=-g'(0)g(x)$$

以及
$$g'(x)=g'(0)f(x)$$

因此
$$2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$$

于是
$$(f(x))^2+(g(x))^2=C$$

C 是某常数.因为 f 和 g 是非常数,故 $C\neq 0$.由等式

$$(f(x+y))^2+(g(x+y))^2=$$
$$((f(x))^2+(g(x))^2)((f(y))^2+(g(y))^2)$$

我们可知 $C=C^2$.由于 $C\neq 0$,必然 $C=1$.

B－3 如果 m 和 n 是大于实数 L 的正整数,则 $m\times n$ 长方形可以表示成若干 4×6 长方形与 5×7 长方形的拼,并且这些长方形之中任意两个至多在它们的边界上相交.问这样的 L 存在吗?

解 存在.

断言:如果 a 和 b 是正整数,则存在数 L_0,使 (a,b)(即 a 和 b 的最大公因子)的每个大于 L_0 的倍数,可以写成形式 $ra+sb$,这里 r 和 s 是非负整数.

断言之证明:首先假设 $(a,b)=1$,则 $0,a,2a,\cdots,(b-1)a$ 是模 b 的一个完全剩余系.因此,对任意大于 $(b-1)a-1$ 的整数 k,有某个 $q\geqslant 0$,$j=0,1,2,\cdots,b-1$,使 $k-qb=ja$.于是对这种特别情况,断言成立.

一般情况,由于 $a/(a,b)$ 和 $b/(a,b)$ 是互素的,利用上面结

论可知,有某个 L_1,每个大于 L_1 的整数可以用形式 $ra/(a,b)+sb/(a,b)$ 写出来,再乘上(a,b),即得到断言.

为了解出问题,开始我们拼出 20×6 和 20×7 长方形.由断言,对充分大的 n,我们可拼出 $20\times n$ 长方形.同样我们可以拼出 35×5 和 35×7 长方形,从而对充分大的 n,拼出 $35\times n$ 长方形.进而,我们可拼出 42×4 和 42×5 长方形,从而对充分大的 n 拼出 $42\times n$ 长方形.

由于$(20,35)=5$,存在 5 的某个倍数 m_0,与 42 互素,m_0 与充分大的 n 无关,于是我们可以拼出 $m_0\times n$ 长方形①.最后,由于$(m_0,42)=1$,当 m 和 n 充分大,我们可拼出一切 $m\times n$ 长方形.

B-4　假设 p 是奇素数,求证:

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}\equiv 2^p+1\pmod{p^2}$$

解法 1　左边等于 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{p}$,这正是$((1+x)+1)^p(1+x)^p$ 中 x^p 的系数,为了证明这一点,我们知道,对每个 j,$\binom{p}{j}$ 是第一个乘因子中$(1+x)^j$ 的系数,而$\binom{p+j}{p}$②是$(1+x)^{p+j}$ 中 x^p 的系数.对 j 求和,要得到刚才的断言.

另一方面,$(2+x)^p(1+x)^p$ 中 x^p 的系数是 $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p}{p-k}2^k$.但是对于 $k\neq 0,p$,p 整除$\binom{p}{k}$,因此

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{p}\equiv\binom{p}{0}\binom{p}{p}2^0+\binom{p}{p}\binom{p}{0}2^p\equiv 1+2^p\pmod{p^2}$$

解法 2　通过 Vandermonde 卷积

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=\sum_{j\geqslant 0}\binom{p}{j}\sum_{h\geqslant 0}\binom{j}{h}\binom{p}{p-h}=$$

$$\sum_{h\geqslant 0}\binom{p}{p-h}\frac{p!}{h!(p-h)!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{(p-h)!}{(p-j)!(j-h)!}=$$

① 这一句我们理解如下,由前述,存在 n_0,当 $n\geqslant n_0$,我们可拼出 $20\times n$,$35\times n$ 以及 $42\times n$ 长方形,现在找到的 m_0 与 n_0 无关,于是对于 $n>n_0$,我们可拼出 $m_0\times n$ 长方形.——译者注

② 原文是$\binom{p}{j}\binom{p+j}{p}$.——译者注

$$\sum_{h\geqslant 0}\binom{p}{h}^2 2^{p-h}\equiv 2^p+1 \pmod{p^2}$$

这是因为素数 p 整数$\binom{p}{h}$,其中 $0<h<p$.

> B－5 令 p 是奇素数,Z_p 表示模 p 的正整数(之域).问集合 $\{x^2 \mid x\in Z_p\}\cap\{y^2+1\mid y\in Z_p\}$ 有多少元素?

解 在此交集中有 $(p+3)/4$ 个元素.

首先考虑

$$x^2=y^2+1 \tag{$*$}$$

的解集合.把它写成 $(x+y)(x-y)=1$,于是可知,对 Z_p 中每个非零元 r,恰存在上述方程的一个解,即 $x+y=r$,$x-y=r^{-1}$,或者

$$x=\left(\frac{p+1}{2}\right)(r+r^{-1}),y=\left(\frac{p+1}{2}\right)(r-r^{-1})$$

因此,式($*$)有 $p-1$ 个解.

另一方面,在此交集中的元素 $x^2=y^2+1$ 除了对应于解 (x,y),还对应于解 $(x,-y)$,$(-x,y)$ 以及 $(-x,-y)$.这四对是不同的,除非 $x=0$ 或者 $y=0$.在 $x=0$ 或 $y=0$ 的情况,则有不同的两对.注意此交集中的 1 对应于 $(1,0)$ 以及 $(-1,0)$.如果存在一个解,它的 $x=0$,我们令 $c=1$,否则令 $c=0$.于是该交集有 $1+c+d$ 个元素.由上述可知,$p-1=2+2c+4d$.

我们看出 $c=1$ 当且仅当 $p-1$ 被 4 整数.对每种情况解出 d,获得

$$1+c+d=(p+3)/4$$

注 Minnesota 大学的 Ian Richards 指出这个问题是下述问题的一种特别情况($k=1$):如果 χ 是模 p 的二次特征标,则 $\sum_{n=0}^{p-1}\chi(n)\chi(n+k)=-1$,与 k 无关.这可由 Jacobi 或 Gauss 和的理论推知.

B－6　令 a 和 b 是正整数，求出最大的数 c，仅依赖于 a 和 b，使得

$$a^x b^{1-x} \leqslant a\frac{\sinh ux}{\sinh u} + b\frac{\sinh u(1-x)}{\sinh u}$$

对所有的 u，$0 < |u| < c$ 及所有的 x，$0 < x < 1$ 成立.（注意：$\sinh u = (e^u - e^{-u})/2$）

解　不等式成立当且仅当

$$0 < |u| \leqslant |(\ln)(a/b)|$$

不等式右边是 u 的偶函数，因此，只需要考虑 $u > 0$. 用 $1-x$ 代替 x，并交换 a 和 b，则不等式不变. 由此我们可假定 $a \geqslant b$，令

$$F(u) = a\frac{\sinh ux}{\sinh u} + b\frac{\sin u(1-x)}{\sinh u} - a^x b^{1-x}$$

微分

$$f(u) = \frac{\sinh ux}{\sinh u}$$

我们可知：$f'(u) < 0$ 当且仅当 $g(u) = x\tanh u - \tanh xu < 0$. 后面的不等式是成立的，因为 $g(0) = 0$ 以及 $g'(u) < 0$ 凡 $u > 0$. 因此 $f(u)$ 对于 u 是严格递减的，因而 $F(u)$ 也是如此. 若 $a > b$，则 $F(\ln(a/b)) = 0$，若 $a = b$，则 $\lim_{u\to 0+} F(u) = 0$. 证毕.

注　令 $u \to 0$，取极限，我们可得到算术平均与几何平均不等式的加权形式的一个证明.

第53届美国大学生数学竞赛

A－1 证明：$f(n)=1-n$ 是定义在整数集上满足下述条件

(1) 对所有整数 n 有 $f(f(n))=n$.

(2) 对所有整数 n 有 $f(f(n+2)+2)=n$.

(3) $f(0)=1$.

的唯一整数值函数.

证明 若 $f(n)=1-n$，则

$$f(f(n))=f(1-n)=1-(1-n)=n$$

因而(1)成立.类似地

$$f(f(n+2)+2)=f((n-1)+2)=f(1-n)=n$$

因而(2)成立.显然(3)成立，因而，$f(n)=1-n$ 满足所有条件.

反之，假设 f 满足所给的三个条件.从条件(2)，有

$$f(f(f(n+2)+2))=f(n)$$

应用(1)，得到 $f(n+2)+2=f(n)$，即 $f(n+2)=f(n)-2$.由归纳法容易得到

$$f(n)=\begin{cases}f(0)-n & ,\text{若 } n \text{ 为偶数}\\ f(1)+1-n & ,\text{若 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

若 $f(0)=1$，则由(1)即得 $f(1)=0$，因而 $f(n)=1-n$.

A－2 定义 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式中 $x^{1\,992}$ 的系数.求积分

$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+1\,992}\right)\mathrm{d}y$$

的值.

解 由二项式级数我们看到

$$C(-y-1)=\frac{(-y-1)(-y-2)\cdots(-y-1\,992)}{1\,992!}=$$

$$\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+1\,992)}{1\,992!}$$

因而

$$C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\cdots+\frac{1}{y+1\ 992}\right)=$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+1\ 992)}{1\ 992!}\right)$$

因此,所论的积分为

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+1\ 992)}{1\ 992!}\right)\mathrm{d}y=$$
$$\left.\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+1\ 992)}{1\ 992!}\right|_0^1=1\ 993-1=1\ 992$$

A - 3　对于给定的整数 m,求所有的正整数三数组(n,x,y),其中 n 与 m 互素,并满足$(x^2+y^2)^m=(xy)^n$.

解　当 m 是奇数时解不存在.当 m 是偶数时唯一解为

$$(n,x,y)=(m+1,2^{m/2},2^{m/2})$$

因而 $n>m$.令 p 是一素数,并令 a 和 b 分别是整数 x 和 y 的 p 的最大幂次,那么整除$(xy)^n$的 p 的最大幂次为$(a+b)n$.若 $a>b$,则整除$(x^2+y^2)^m$ 的 p 的最大幂次为 $2am$.这蕴涵着$(a+b)n=2am$,与 $n>m$ 矛盾.类似地,假设 $a>b$ 也导致矛盾,因而对所有素数 p 有 $a=b$,所以得到 $x=y$.这样,原方程化为$(2x^2)^m=x^{2n}$,或者等价地,$x^{2(n-m)}=2^m$.由此得到 x 是 2 的正数幂,设为 2^a.这蕴涵着 $2(n-m)a=m$,亦即 $2an=(2a+1)m$.由于 $\gcd(m,n)=\gcd(2a,2a+1)=1$,必定有 $m=2a$ 和 $n=2a+1$.这样,m 必定为偶数,所求的解即为所断言的.

A - 4　令 f 是定义在实数集上的一个无穷次可微实值函数.如果

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1},n=1,2,3,\cdots$$

请计算各个导数 $f^{(k)}(0)(k=1,2,3,\cdots)$ 的值.

解　我们将证明

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}(-1)^{(k/2)}k! & ,\text{当 } k \text{ 为偶数时}\\ 0 & ,\text{当 } k \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

首先我们注意,如果 $h(x)$ 是一个可微函数,$x_1,x_2,\cdots$ 是一个使得 $h(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$ 的严格递减于 0 的序列,那么由 Rolle 定理,存在一个严格递减于 0 的序列 $y_1,y_2,\cdots$,使得 $x_{n+1}<y_n<x_n$,且 $h'(y_n)=0,n=1,2,\cdots$.

现令 $g(x)=f(x)-1/(1+x^2)$,则 $g(1/n)=0,n=1,2,\cdots$. 对 $g,g',g'',\cdots$ 应用上一段中所述的结果,并得用 $g^{(k)}$ 在0处的连续性,我们即看到 $g^{(k)}(0)=0,k=0,1,2,3,\cdots$,这样

$$f^{(k)}(0)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\bigg|_{x=0}$$

$1/(1+x^2)$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$,因而 $f^{(k)}(0)$ 等于一开始所给出的值.

A-5 对于每个正整数 n,令

$$a_n=\begin{cases}0 & ,\text{当 } n \text{ 的二进制表示中 1 的个数是偶数时}\\ 1 & ,\text{当 } n \text{ 的二进制表示中 1 的个数是奇数时}\end{cases}$$

证明:不存在正整数 k 和 m,使得

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j},0\leqslant j\leqslant m-1$$

证明 注意到 $a_{2n}=a_n$ 以及 $a_{2n+1}=1-a_{2n}=1-a_n$.

假设存在题中所述的 k,m,那么我们不妨设 m 为这些m 中的最小者.

首先设 m 为奇数.我们将假定 $a_k=a_{k+m}=a_{k+2m}=0$;显然,可以类似地处理 $a_k=1$的情形.由于 k 和$k+m$ 中有一个为偶数,因而

$$a_{k+1}=a_{k+m+1}=a_{k+2m+1}=1$$

此外,由于 $k+1$ 和 $k+m+1$ 中有一个为偶数,因而

$$a_{k+2}=a_{k+m+2}=a_{k+2m+2}$$

由此我们看到,诸项 $a_k,a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{k+m-1}$ 交替地等于 0 和 1. 那么由于 $m-1$ 是偶数,因而

$$a_{k+m-1}=a_{k+2m-1}=a_{k+3m-1}=0$$

然而,由于 $k+m-1$和 $k+2m-1$ 中有一个为偶数,这就蕴涵着 $a_{k+m}=a_{k+2m}=1$①,与 $a_{k+m}=a_{k+2m}=0$ 矛盾.

这样,m 必定为偶数,从

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j},0\leqslant j\leqslant m-1$$

中抽出下标为偶数的那些项,并利用对于偶数 r 有 $a_r=a_{r/2}$ 这一事实,我们得到

$$a_{[k/2]+i}=a_{[k/2]+(m/2)+i}=a_{[k/2]+m+i},0\leqslant i\leqslant(m/2)-1$$

(不小于 k 的偶数为$2[k/2],2[k/2]+2,\cdots$)②这与 m 的最小性矛盾.

---

① 这一小段中多次用到下述事实:若 $n>0$ 为偶数,则 $a_{n+1}=1-a_n$,从任一偶数的二进制表示中个位数是0这一事实及 a_n 的定义即可得上述结论.—— 译者注

② 符号$[x]$表示不小于 x 的最小整数.—— 译者注

因而，不存在满足题设条件的 k 和 m.

A-6 在一球面上随机地选取四个点.球心位于以此四点为顶点的四面体内部的概率是多少?(选点的方式被理解为:关于球面上的一致分布独立地选取每个点)

解 首先回忆一下，如果点 A,B,C,D 是三维空间中不在同一平面上的四个点，那么一点 E 位于 $ABCD$ 的内部，当且仅当 E 关于 A,B,C,D 的重心坐标是正的.即，如果把 E(唯一地表为)

$$\vec{E}=w\vec{A}+x\vec{B}+y\vec{C}+z\vec{D}$$

其中 $w+x+y+z=1$(箭头表示把点的三个坐标作为向量考虑)，那么 E 在四面体 $ABCD$ 的内部，当且仅当 $w>0,x>0,y>0$ 和 $z>0$.因而，如果 E 是原点，那么 E 在 $ABCD$ 的内部，当且仅当

$$\mathbf{0}=w\vec{A}+x\vec{B}+y\vec{C}+z\vec{D} \quad ①$$

有一个解 (w,x,y,z)，其中 w,x,y,z 有相同的符号.由于 ① 的解空间是一维的，因而对于一个非零解这个条件成立，当且仅当对于所有非零解这个条件成立.

现在假设球心位于原点，并且固定球面上第一个选取的点 P 作为北极，其余三个点 P_1,P_2,P_3 是随机的.

我们不妨认为每个 P_i 的选取分为两步，第一步选取一条随机直径 $Q_{i_1}Q_{i_2}$，第二步在端点 Q_{i_1},Q_{i_2} 中随机地选取一个点作为 P_j.由于三条直径端点的 $2^3=8$ 种可能的选择是等可能性的，因而 8 个四面体 $PQ_{1_{j1}},PQ_{2_{j2}},PQ_{3_{j3}}(j_i=1$ 或 $2)$ 也是等可能性的.因为退化情形的概率为 0，我们不妨进一步假设每个四面体的顶点不在同一平面上.类似地，我们可以假设球心不在四面体的表面.

令 (w,x,y,z) 是方程

$$\mathbf{0}=w\vec{P}+x\vec{Q}_{1_1}+y\vec{Q}_{2_1}+z\vec{Q}_{3_1}$$

的一个非零解.那么，由于 $\vec{Q}_{i_1}=-\vec{Q}_{i_2}$，八个方程

$$\mathbf{0}=w\vec{P}+x\vec{Q}_{1_{j1}}+y\vec{Q}_{2_{j2}}+z\vec{Q}_{3_{j3}}$$

有各自的解

$$(w,x,y,z),(w,x,y,-z),(w,x,-y,z),(w,-x,y,z)$$
$$(w,x,-y,-z),(w,-x,-y,z)$$
$$(w,-x,y,-z),(w,-x,-y,-z)$$

因而，八个方程中只有一个方程的解有相同符号的坐标.

由此推得，这八个等可能的四面体中只有一个包含原点.这样，对于三个直径的所有初始选择，包含球心的概率是 1/8.我们得到结论:对于一个随机四面体，所论的概率为 1/8.

B－1 令 S 是 n 个不同实数的集合. 令 A_S 是由 S 中每两个不同元素的平均值所组成的数集. 对于给定的整数 $n \geqslant 2$，A_S 中不同元素的最少可能数目是多少？

解 A_S 中元素的最少可能数目是 $2n-3$.

令 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 表示 S 的所有元素，则

$$\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{x_1+x_3}{2} < \cdots < \frac{x_1+x_n}{2} < \frac{x_2+x_n}{2} < \frac{x_3+x_n}{2} < \cdots < \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

表示 A_S 中 $(n-1)+(n-2)=2n-3$ 个不同的元素，因而 A_S 至少有 $2n-3$ 个不同的元素.

另一方面，如果我们取 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，那么 A_S 的所有元素为 $\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},\cdots,\frac{2n-1}{2}$，只有 $(2n-1)-2=2n-3$ 个不同的数；这样，存在一个集合 A_S，它至多有 $2n-3$ 个不同的元素. 这就完成了证明.

B－2 对于非负整数 n 和 k，定义 $Q(n,k)$ 为 $(1+x+x^2+x^3)^n$ 的展开式中 x^k 的系数. 证明：

$$Q(n,k)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{k-2j}$$

其中，$\binom{a}{b}$ 是标准的二项式系数.（注意：对于整数 a 和 b，其中 $a \geqslant 0$，当 $0 \leqslant b \leqslant a$ 时 $\binom{a}{b}=a!/(b!(a-b)!)$，在其它情形 $\left(\binom{a}{b}\right)=0$）

解 我们有

$$\sum_{k\geqslant 0}Q(n,k)x^k=(1+x+x^2+x^3)^n=$$
$$(1+x^2)^n(1+x)^n=$$
$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}x^{2j}\cdot\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{i}x^i=$$
$$\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 0}x^{2j+i}\binom{n}{j}\binom{n}{i}=$$
$$\sum_{k\geqslant 0}x^k\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}\binom{n}{k-2j}$$

比较 x^k 的系数即得所希望的结果.

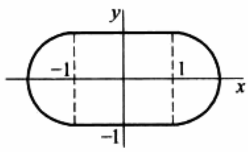
B－3　对于任何实数对(x,y),如下定义序列$(a_n(x,y))_n \geq 0$:

$$a_0(x,y) = x$$

$$a_{n+1}(x,y) = \frac{(a_n(x,y)^2) + y^2}{2},\text{对于所有 } n \geq 0$$

求区域$\{(x,y) \mid (a_n(x,y))_{n\geq 0}$ 收敛$\}$ 的面积.

解　所求面积为 $4+\pi$.收敛域为



即,一个边长为2的(闭)正方形$\{(x,y) \mid -1 \leq x,y \leq 1\}$与在其两条相对边上的、圆心在$(\pm 1,0)$、半径为1的两个(闭)半圆盘的并.

如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x,y) = L$,那么 L 必定满足$L = (L^2 + y^2)/2$,即 L 必为方程

$$r^2 - 2r + y^2 = 0 \qquad ①$$

的根.在这样的情形,此方程必有实根,因而它的判别式$4-4y^2$是非负的.这样,$(a_n(x,y))$收敛的一个必要条件为$|y| \leq 1$.

固定 y 于 $|y| \leq 1$.此时①的两个根为$1-\sqrt{1-y^2}$和$1+\sqrt{1-y^2}$,它们是实的并且非负.由于$a_1(-x,y) = a_1(x,y)$,因而收敛区间关于$x=0$对称.因而我们将假设$x \geq 0$;这样,对于所有 $n \geq 0$,有 $a_n(x,y) \geq 0$.

若$r_0 = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$,则根据$a_n(x,y)$小于、等于或大于r_0,$a_{n+1}(x,y)$即小于、等于或大于$r_0(=(r_0^2+y^2)/2)$.

若$a_n(x,y)$位于闭区间$[1-\sqrt{1-y^2},1+\sqrt{1-y^2}]$中,即位于①的两个根之间,则

$$a_n(x,y)^2 - 2a_n(x,y) + y^2 \leq 0$$

因而
$$1-\sqrt{1-y^2} \leq a_{n+1}(x,y) \leq a_n(x,y)$$

由此即得:若 x 在闭区间$[1-\sqrt{1-y^2},1+\sqrt{1-y^2}]$中,则$(a_n(x,y))_{n\geq 0}$收敛.

若$a_n(x,y)$不在区间$[1-\sqrt{1-y^2},1+\sqrt{1-y^2}]$中,则

$$a_n(x,y)^2 - 2a_n(x,y) + y^2 > 0$$

因而 $$a_{n+1}(x,y) > a_n(x,y)$$

这样,如果 x,因而所有的 $a_n(x,y)$,大于 $1+\sqrt{1-y^2}$,那么序列 $(a_n(x,y))_{n\geqslant 0}$ 发散.另一方面,如果 x,因而所有的 $a_n(x,y)$,位于 0 与 $1-\sqrt{1-y^2}$ 之间,那么序列 $(a_n(x,y))_{n\geqslant 0}$ 单调地收敛到 $1-\sqrt{1-y^2}$.

扼要地讲,$(a_n(x,y))_{n\geqslant 0}$ 收敛,当且仅当

$$-1 \leqslant y \leqslant 1$$

并且 $$-(1+\sqrt{1-y^2}) \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{1-y^2}$$

B-4 令 $p(x)$ 是一个次数小于 1 992 的非零多项式,它与 x^3-x 无非常数的公共因子.令

$$\frac{\mathrm{d}^{1\,992}}{\mathrm{d}x^{1\,992}}\left(\frac{p(x)}{x^3-x}\right)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是多项式.求 $f(x)$ 的最小可能次数.

解 $f(x)$ 的最小可能次数是 3 984.

由带余除法,我们可以写成

$$p(x)=(x^3-x)q(x)+r(x)$$

其中 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是多项式,$r(x)$ 的次数小于 3,$q(x)$ 的次数小于 1 989.因此

$$\frac{\mathrm{d}^{1\,992}}{\mathrm{d}x^{1\,992}}\left(\frac{p(x)}{x^3-x}\right)=\frac{\mathrm{d}^{1\,992}}{\mathrm{d}x^{1\,992}}\left(\frac{r(x)}{x^3-x}\right)$$

把 $r(x)/(x^3-x)$ 写成

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$$

因为 $p(x)$ 与 x^3-x 无非常数的公共因子,所以 $r(x)$ 与 x^3-x 亦无非常数的公共因子,因而 $ABC\neq 0$.这样

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{1\,992}}{\mathrm{d}x^{1\,992}}\left(\frac{r(x)}{x^3-x}\right)&=1\,992!\left(\frac{A}{(x-1)^{1\,993}}+\frac{B}{x^{1\,993}}+\frac{C}{(x+1)^{1\,993}}\right)=\\&1\,992!((Ax^{1\,993}(x+1)^{1\,993}+\\&B(x-1)^{1\,993}(x+1)^{1\,993}+\\&C(x-1)^{1\,993}x^{1\,993})/(x^3-x)^{1\,993}\end{aligned}$$

由于 $ABC\neq 0$,因此上式右端的分子与分母显然无公共因子.把分子展开后得到表达式

$$\begin{aligned}&(A+B+C)x^{3\,986}+1\,993(A-C)x^{3\,985}+\\&1\,993(996A-B+996C)x^{3\,984}+\cdots\end{aligned}$$

从 $A=C=1,B=-2$ 我们看到它的次数可以低至 3 984.更低的次数蕴涵着 $A+B+C=0,A-C=0,996A-B+996C=0$,这

导致一个矛盾:$A = B = C = 0$.

B-5 令 D_n 表示 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$$

的值.数集 $\{D_n/n!\}_{n\geqslant 2}$ 是有界的吗?

解法 1 集合 $\{D_n/n!\}_{n\geqslant 2}$ 构成一个严格增加到无穷的序列,因而它是无界的.

注意到 $D_2 = 3$ 和 $D_3 = 11$,我们得到 D_{n+1} 的一个递推式.从 D_{n+1} 的最后一列减去倒数第二列,再从最后一行减去倒数第二列,我们得到

$$D_{n+1} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & n+1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & -n & 2n+1 \end{pmatrix}$$

把此行列式按其最后一行展开,我们得到

$$D_{n+1} = (2n+1)D_n - n^2 D_{n-1}$$

令 $r_n = D_n/n!$,则此递推式可以写为

$$r_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} r_n - \frac{n}{n+1} r_{n-1}$$

或者

$$r_{n+1} - r_n = \frac{n}{n+1}(r_n - r_{n-1})$$

由此得到

$$r_{n+1} - r_n = \frac{3}{n+1}(r_3 - r_2) = \frac{1}{n+1}$$

因而 $r_{n+1} = r_2 + (r_3 - r_2) + (r_4 - r_3) + \cdots + (r_{n+1} - r_n) =$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

因此序列 $\{r_n\}$ 发散到无穷.

解法 2 利用公式

$D_{n+1}(a_1, \cdots, a_n) =$

$$\det\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{pmatrix}=$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j$$

令 $a_i = i + 1$,即可求得问题中的 D_n.这个公式从递推式

$$D_{n+1}(a_1,\cdots,a_n) = a_nD_n(a_1,\cdots,a_{n-1}) + a_{n-1}D_n(a_1,\cdots,a_{n-2},0)$$

直接而得.为了证明此递推式,可先从第 n 列减去第 $n-1$ 列,然后再按第 n 列展开.

如果所有的 a_i 都不为 0,我们就可把多项式 $D_n(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 写成

$$D_n(a_1,\cdots,a_{n-1}) = a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

的形式.由此即得

$$\frac{D_n}{n!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

因而序列 $\{D_n/n!\}$ 是无界的.

B－6 令 $\boldsymbol{M}$ 是一个实 $n\times n$ 矩阵的集合,它满足

(1)$\boldsymbol{I}\in\boldsymbol{M}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $n\times n$ 单位矩阵.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}$,那么或者 $\boldsymbol{AB}\in\boldsymbol{M}$,或者 $-\boldsymbol{AB}\in\boldsymbol{M}$,但两者不同时成立.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}$,那么或者 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,或者 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$.

(4) 如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$,那么至少存在一个 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$.

证明:$\boldsymbol{M}$ 至多包含 n^2 个矩阵.

证法 1 更一般地,我们对于复矩阵来证明所述结论(因为在证明中应用 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是方便的).

此证明利用关于 n 的归纳法.

若 $n=1$，则 $\boldsymbol{M}$ 的元素可交换，以致除非 $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{I}\}$ 不能满足(4). 假设 $n>1$，并假设对于较小维数的复矩阵集合结论成立.

我们不妨假设 $|\boldsymbol{M}|>1$，因而由(4)知存在 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{M}$，使得 $\boldsymbol{CD}=-\boldsymbol{DC}$. 固定 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$. 如第一种解法那样①，$\boldsymbol{C}^2=\pm\boldsymbol{I}$.②因而 $\boldsymbol{C}$ 的特征值是 $\pm\lambda$，其中 $\lambda=1$ 或 i. 再者，$\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{V}_\lambda\oplus\boldsymbol{V}_{-\lambda}$，其中 $\boldsymbol{V}_\lambda$，$\boldsymbol{V}_{-\lambda}$ 分别是 $\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{C}+\lambda\boldsymbol{I}$ 的零空间. 我们注意，如果 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{M}$，那么

$$\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{XC}\Rightarrow(\boldsymbol{C}\pm\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{C}\pm\lambda\boldsymbol{I})\Rightarrow\boldsymbol{V}_{\pm\lambda}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{V}_{\pm\lambda}$$

$$\boldsymbol{CX}=-\boldsymbol{XC}\Rightarrow(\boldsymbol{C}\pm\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=(-1)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{C}\mp\lambda\boldsymbol{I})\Rightarrow\boldsymbol{V}_{\pm\lambda}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{V}_{\pm\lambda}$$

特别，由于 $\boldsymbol{V}_\lambda\boldsymbol{D}=\boldsymbol{V}_{-\lambda}$，因而 $\dim(\boldsymbol{V}_\lambda)=\dim(\boldsymbol{V}_{-\lambda})=n/2$.

令 $\boldsymbol{N}=\{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{M}\mid\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{XC},\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{XD}\}$. 若 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{M}$，则 $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{YC}$，$\boldsymbol{YD}$，$\boldsymbol{YCD}$ 中恰有一个在 $\boldsymbol{N}$ 中. 由此即得 $|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{M}|/4$.

对于 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{M}$，令 $\phi(\boldsymbol{X})$ 是一个 $(n/2)\times(n/2)$ 矩阵，关于 $\boldsymbol{V}_\lambda$ 的某个固定的基，当 $v\in\boldsymbol{V}_\lambda$ 时它表示由 $v\to v\boldsymbol{X}$ 给出的线性变换. 则 ϕ 是单射的. 为了看出此点，假设 $\phi(\boldsymbol{X})=\phi(\boldsymbol{Y})$，以致对于 $v\in\boldsymbol{V}_\lambda$ 有 $v\boldsymbol{X}=v\boldsymbol{Y}$. 但是若 $v\in\boldsymbol{V}_{-\lambda}$，则 $v\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{V}_\lambda$，以致 $v\boldsymbol{XD}=v\boldsymbol{DX}=v\boldsymbol{DY}=v\boldsymbol{YD}$，这又蕴涵着 $v\boldsymbol{X}=v\boldsymbol{Y}$. 由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{V}_\lambda$ 上以及在 $\boldsymbol{V}_{-\lambda}$ 上都诱导相同的变换，因而即得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

最后只须证明 $(n/2)\times(n/2)$ 复矩阵的集合 $\phi(\boldsymbol{N})$ 满足(1)，(2)，(3)，(4)，因为由归纳法，有 $|\phi(\boldsymbol{N})|\leqslant(n/2)^2$，此时 $|\boldsymbol{M}|=4|\boldsymbol{N}|=4|\phi(\boldsymbol{N})|\leqslant n^2$.

对于 $\phi(\boldsymbol{N})$，条件(1)，(2)，(3)显然从 $\boldsymbol{M}$ 的相应条件承袭而得. 为了证明(4)，令 $\phi(\boldsymbol{A})\in\phi(\boldsymbol{N})$，$\phi(\boldsymbol{A})$ 不是 $(n/2)\times(n/2)$ 单位矩阵. 则 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$（由于 ϕ 是单射的），并且对于某个 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}$，有 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$. 令 $\boldsymbol{B}'$ 是 $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{BC},\boldsymbol{BD},\boldsymbol{BCD}\}$ 中属于 $\boldsymbol{N}$ 的元素. 因为 $\boldsymbol{AB}'=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$，所以 $\phi(\boldsymbol{A})\phi(\boldsymbol{B}')=-\phi(\boldsymbol{B}')\phi(\boldsymbol{A})$.

证法 2 令 $\boldsymbol{G}$ 是群 $\{\pm\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}\}$. 我们必须证明 $|\boldsymbol{G}|\leqslant 2n^2$.

$\boldsymbol{G}$ 的中心 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$ 由 $\pm\boldsymbol{I}$ 组成，并且如果 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}\setminus\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$，那么 $\boldsymbol{X}$ 恰有两个共轭，即其本身与 $-\boldsymbol{X}$. 这样，$\boldsymbol{G}$ 有 $1+|\boldsymbol{G}|/2$ 个共轭类，因而，在 $\boldsymbol{C}$ 上 $\boldsymbol{G}$ 有 $1+|\boldsymbol{G}|/2$ 个不等价的不可约表示.

一维不等价表示的数目是 $|\boldsymbol{G}/\boldsymbol{G}'|$，其中 $\boldsymbol{G}'$ 是换位子子群. 由于 $\boldsymbol{G}'=\{\pm\boldsymbol{I}\}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$，此数即为 $|\boldsymbol{G}|/2$.

---

① 原文如此. —— 译者注

② 由(2)得 $\boldsymbol{C}^2\in\boldsymbol{M}$ 或 $-\boldsymbol{C}^2\in\boldsymbol{M}$. 记 $\boldsymbol{C}^2$，$-\boldsymbol{C}^2$ 中属于 $\boldsymbol{M}$ 者为 $\boldsymbol{C}_0$. 由(3)易得对 $\forall\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}$，有 $\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BC}_0$. 现设 $\boldsymbol{C}_0\neq\boldsymbol{I}$. 则由(4)知存在 $\boldsymbol{B}_0\in\boldsymbol{M}$，使得 $\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{B}_0=-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$. 因而 $\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0=-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$，与(2)矛盾. 因此 $\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{C}^2=\pm\boldsymbol{I}$.
—— 校者注

这样，余下的不可约表示的维数为$\sqrt{|G|/2}$（因为不可约表示的维数的平方和为$|G|$）. 这个表示必定被包含在G用$n\times n$矩阵给出的表示中，因为在所有一维表示中$Z(G)$在核中. 因而$n\geqslant\sqrt{|G|/2}$，或者$2n^2\geqslant|G|$.

第 54 届美国大学生数学竞赛

A－1　如图 1,水平直线 $y=c$ 与 $y=2x-3x^3$ 相交于第一象限.求使得两个阴影区域面积相等的数 c.

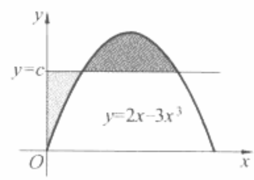


图 1

解　c 的值为 4/9.令 (b,c) 表示水平线 $y=c$ 与曲线 $y=2x-3x^3$ 的第二个交点.我们想要找到 c,使得

$$\int_0^b (c-(2x-3x^3))\mathrm{d}x=0$$

这导致 $cb-b^2+(3/4)b^4=0$.在此式中作替换 $c=2b-3b^3$,解之,我们得到 $b=2/3$,因而即得 c 之值.

A－2　令 $(x_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个满足

$$x_n^2-x_{n-1}x_{n+1}=1, n=1,2,3,\cdots$$

的非零实数序列.证明:存在一个实数 a,使得对所有 $n\geqslant 1$ 有

$$x_{n+1}=ax_n-x_{n-1}$$

解法 1　所欲求证者等价于

$$\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}$$

与 n 无关.这从

$$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}}-\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}=\frac{(x_nx_{n+2}+x_n^2)-(x_{n+1}^2+x_nx_{n+1})}{x_nx_{n+1}}=$$

$$\frac{-(x_{n+1}^2-x_nx_{n+2})+(x_n^2-x_{n-1}x_{n+1})}{x_nx_{n+1}}=$$

$$\frac{-1+1}{x_nx_{n+1}}=0$$

(由归纳法)即得.

解法 2　对于所有的 n,有

$$\det\begin{pmatrix} x_{n-1}+x_{n+1} & x_n+x_{n+2} \\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix} x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_{n+1} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} \\ x_n & x_{n+1} \end{pmatrix} = -1+1=0$$

这样，有$(x_{n-1}+x_{n+1},x_n+x_{n+2})=c_n(x_n,x_{n+1})$，其中$c_n$为实数．用$n-1$替代$n$，并比较它们的坐标表达式，我们(利用$x_n\neq 0$)即看到$c_n=c_{n-1}$．

注 用类似的方法我们可以证明，如果$(x_n)_{n\geqslant 0}$是一个使得

$$\det\begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+k} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+k} & x_{n+k+1} & \cdots & x_{n+2k} \end{pmatrix} = cr^n, n=1,2,3,\cdots$$

的非零实数序列，那么存在实数$a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得

$$x_{n+k+1}=a_1x_{n+k}+a_2x_{n+k-1}+\cdots+a_kx_{n+1}+(-1)^krx_n$$

A－3 令P_n是$\{1,2,\cdots,n\}$的所有子集的集合．令$c(n,m)$是满足$f(A\cap B)=\min\{f(A),f(B)\}$的函数$f:P_n\to\{1,2,\cdots,m\}$的个数．证明

$$c(n,m)=\sum_{j=1}^{m}j^n$$

解 令$S=\{1,2,\cdots,n\}$，并设f是一个满足题设条件的函数，且$f(S)=j$．这样，$f(A\cap B)=\min\{f(A),f(B)\}$蕴涵着由诸$f(S-\{i\})$的值确定了$f(A)$的值(对任意$A\subset S$)，这是因为$f(A)=\min\limits_{i\notin A}\{f(S-\{i\})\}$．反之，任意选取$f(S-\{i\})\leqslant j$也导致这样的一个函数．因为对于每个$f(S-\{i\})$有$j$个独立的选择，因此有$j^n$个这样的函数，它们都满足$f(S)=j$．对于$f(S)$的所有可能的个数求和，即得$c(n,m)=\sum\limits_{j=1}^{m}j^n$．

A－4 令$x_1,x_2,\cdots,x_{19}$是一些正整数，它们中的每一个都小于或等于93．令$y_1,y_2,\cdots,y_{93}$是一些正整数，它们中的每一个都小于或等于19．证明：存在某些x_i(非空的)和某些y_j，它们的和相等．

解 为了表达的对称性，我们在问题的叙述中分别用m和n代替19和93．不失一般性，我们假设$\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}y_j$．这样，对于

$0 \leqslant k \leqslant n$,即有 $f(k)$ 满足 $0 \leqslant f(k) \leqslant m$ 和

$$\sum_{i=1}^{f(k)} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{k} y_j < \sum_{i=1}^{f(k)+1} x_i$$

令 $g(k) = \sum_{j=1}^{k} y_j - \sum_{i=1}^{f(k)} x_i$,则对于 $0 \leqslant k \leqslant n$ 有

$$0 \leqslant g(k) < x_{f(k)+1} \leqslant n$$

若对于某个 k 有 $g(k) = 0$,则结论已得.否则,由鸽巢原理①知存在 $k_0 < k_1$,使得 $g(k_0) = g(k_1)$,此时即有

$$\sum_{i=f(k_0)+1}^{f(k_1)} x_i = \sum_{j=k_0+1}^{k_1} y_j$$

A - 5　证明

$$\int_{-100}^{-10}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x +$$
$$\int_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x$$

是一个有理数.

解法 1　首先注意,$x^3 - 3x + 1$ 的三个根皆在三个积分区间之外,即,此多项式在区间 $[-2, -1]$,$[1/3, 1/2]$,$[3/2, 2]$ 中都改变了符号.因而被积函数有意义,且在积分区间中处处连续.令

$$f(t) = \int_{-100}^{t}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{101}}^{1/(1-t)}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x +$$
$$\int_{\frac{101}{100}}^{1-1/t}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 \mathrm{d}x$$

其中 $-100 \leqslant t \leqslant -10$.我们想要计算 $f(-10)$.从微积分的基本定理知

$$f'(t) = Q(t) + Q\left(\frac{1}{1-t}\right)\frac{1}{(1-t)^2} + Q\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$$

其中　$Q(x) = ((x^2 - x)/(x^3 - 3x + 1))^2$

我们发现　$Q(1/(1-t)) = Q(1 - 1/t) = Q(t)$

因而 $f(-10) = \int_{-100}^{-10}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x$

注意到　$\frac{1}{Q(x)} = \left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)^2$

我们即知最后的积分有形式 $\int \mathrm{d}u/(u^2)$,因而其值为

---

① 鸽巢原理又称抽屉原理.—— 校者注

$$-\left.\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right|_{-100}^{-10}$$

这是一个有理数.

解法2 通过替换 $x=-1/(t-1)$ 和 $x=1-1/t$,在区间[1] $[101/100,11/10]$ 和 $[1/101,1/11]$ 上的积分分别变为 $[-100,-10]$ 上的积分. 此时亦可看到,在替换 $x\to 1-1/x$ 和替换 $x\to -1/(x-1)$ 下,函数

$$\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2$$

是不变的(事实上,这两个替换互为逆). 因而三个给出的积分之和可以表示为

$$\int_{-100}^{-10}\left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x$$

以下如解法1中所述.

注 更一般地可以证明,如果 $f(x)$ 是一个至多4次的有理多项式,那么

$$\int_{-100}^{-10}\left(\frac{f(x)}{x^3-3x+1}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}}\left(\frac{f(x)}{x^3-3x+1}\right)^2\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}}\left(\frac{f(x)}{x^3-3x+1}\right)^2\mathrm{d}x$$

是有理数.

A－6 由2和3组成的无限序列

2,3,3,2,3,3,3,2,3,3,3,2,3,3,2,3,3,3,2,3,3,3,2,3,3,3,2,3,3,2,3,3,3,2,…

具有下述性质:如果把相邻两个2之间的3的个数组成第二个序列,那么所得结果等同于原先给定的序列. 证明:存在一个实数 r,使得对自然数 n,该序列的第 n 项是2的充要条件为对于某个非负整数 m 有 $n=1+[rm]$.(注意:$[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数)

解 我们证明,对于 $r=2+\sqrt{3}$ 结论成立.

假设结论成立,我们先来推导 r 的值. 我们注意到,渐近而言,在前 n 项中2所占的比例为 $1/r$. 这样,在假设了前 $n\approx rm$ 项中大约有 m 个2后,其中应该大约有 $(r-1)m$ 个3. 这两个数给出了在前 n 个2之后的区间中3的近似个数,即为

[1] 原文把两个区间次序颠倒了.——校者注

$$2m+3(r-1)m=(3r-1)m$$

个.因而,在前 $rm+(3r-1)m=(4r-1)m$ 项中2所占的比例为

$$rm/(4r-1)m=r/(4r-1)$$

所以 r 应该满足 $1/r=r/(4r-1)$,或者,$r^2-4r+1=0$.由于 r 必须大于1,因而得 $r=2+\sqrt{3}$.

注意到在公式 $n=1+[rm]$ 中令 $m=0$ 产生第1个2(第1项),$m=1$ 产生第2个2(第4项).假设对于 $j\leqslant m$,第 j 个2是第 $1+[r(j-1)]$ 项.解 $1+[r(j-1)]\leqslant m<1+[rj]$,得到:在所给序列的前 m 项中有 $j=[m/(2+\sqrt{3})]+1$ 个2.这样,第 $m+1$ 个2即在第

$$\begin{aligned}(m+1)+2([m/(2+\sqrt{3})]+1)+3(m-[m/(2+\sqrt{3})]-1)=\\4m-[m/(2+\sqrt{3})]=\\[4m-(2-\sqrt{3})m]=[(2+\sqrt{3})m]\end{aligned}$$

项.由归纳法,论断即得证.

B-1 求对于每个满足 $0<m<1\,993$ 的整数 m,存在整数 k,使得

$$\frac{m}{1\,993}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{1\,994}$$

成立的最小正整数 n.

解 首先,容易验证

$$\frac{m}{1\,993}<\frac{2m+1}{1\,993+1\,994}<\frac{m+1}{1\,994}$$

因而至多 $n=1\,993+1\,994=3\,987$.现考虑 $m=1\,992$,并设

$$\frac{1\,992}{1\,993}<\frac{k}{n}<\frac{1\,993}{1\,994}$$

由于当 $x>0$ 时,$x/(x+1)$ 是严格增的,我们必须有 $k\leqslant n-2$(注意:$n>1\,994$).然而

$$\frac{1\,992}{1\,993}<\frac{n-2}{n}$$

蕴涵 $3\,986<n$,因而 $n\geqslant 3\,987$,这就完成了证明①.

① 即所求的 n 为3 987.—— 译者注

B－2 一副纸牌有 $2n$ 张,这些牌上分别记以数 1 到 $2n$.考虑下面这种纸牌游戏.随机地洗牌,给 A、B 两个游戏者每人发 n 张牌.从 A 开始,两人轮流出牌并报出所出牌上的数.一旦所有已出的牌上的数之和能被 $2n+1$ 整除时就结束游戏,最后一个出牌的为胜者.假设 A 和 B 都取最优策略,问 A 赢的概率是多少?

解 A 赢的概率是零.

显然,第一轮 A 不会赢.假设轮到 B 出牌,并假设所报数之总和为 T,此时 A 手中有牌 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,B 有牌 $y_1,y_2,\cdots,y_{k+1}$.因为诸整数 $T+y_1,\cdots,T+y_{k+1}$ 除以 $2n+1$ 有互不相同的余数,因而它们中至少有一个 y_i 有不同于 $2n+1-x_1,\cdots,2n+1-x_k$ 的余数.如果 B 就出那张 y_i,那么 A 再出牌时就不可能使总和被 $2n+1$ 整除.因而,当 B 取最优策略时 A 不会赢.

B－3 在区间(0,1)中关于一致分布随机地选取两个实数 x 和 y.最接近于 x/y 的整数是偶数的概率是多少?把答案表成 $r+s\pi$ 的形式,其中 r 和 s 是有理数.

解 结果为 $(5-\pi)/4$(即 $r=5/4,s=-1/4$).

注意:“x/y 为奇整数的一半”的概率为 0,因此我们不妨不考虑这种可能性.

对于任意选取的 x,最接近 x/y 的整数是偶数,仅当 $x/y<0.5$,或者对于某个正整数 n,$2n-0.5<x/y<2n+0.5$.

事件 $x/y<0.5$,或者 $2x<y$,仅当 $x<0.5$ 时才能出现.这样,它的概率为

$$\int_0^{0.5}(1-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

对于一个正整数 n,$2n-0.5<x/y<2n+0.5$ 的概率,即 $2x/(4n+1)<y<2x/(4n-1)$ 的概率,为

$$\int_0^1\left(\frac{2x}{4n-1}-\frac{2x}{4n+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}$$

将它对 n 从 1 到 $+\infty$ 求和,我们得到

$$\sum_1^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}=1-\arctan 1=1-\frac{\pi}{4}$$

因而总的概率为

$$1/4+1-\pi/4=(5-\pi)/4$$

B－4 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上函数 $K(x,y)$ 是正的且连续的，在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正的且连续的. 假设对于所有满足 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 的 x 有

$$\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y = g(x)$$

和

$$\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y = f(x)$$

证明：对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 有 $f(x) = g(x)$.

解 对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$，有

$$f(x) = \int_0^1 g(t)K(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 f(y)K(t,y)K(x,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int_0^1 f(y)L(x,y)\mathrm{d}y$$

其中对于 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 有

$$L(x,y) = \int_0^1 K(x,t)K(t,y)\mathrm{d}t$$

类似地

$$g(x) = \int_0^1 g(y)L(x,y)\mathrm{d}y$$

由于当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$\int_0^1 \frac{L(x,y)f(y)}{f(x)}\mathrm{d}y = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{L(x,y)f(y)}{f(x)}\right)\frac{g(y)}{f(y)}\mathrm{d}y = \frac{g(x)}{f(x)}$$

因而即得 $g/f = c$ 为一常数. 这样

$$g(x) = cf(x) = c\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y = c^2\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y = c^2 g(x)$$

因而，$c = 1$.

B－5 证明：在欧氏平面上不存在四个点，使得这些点两两之间的距离都是奇数.

解 假设存在这样的四个点. 取其中一个点为原点，并令 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 为从原点到其它三个点的向量. 因为 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$ 和 $|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j|^2 = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i - 2\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{v}_j (i \neq j)$ 是奇整数的平方，我们即知 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$ 和 $2\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j (j \neq i)$ 都是同余于 $1 \pmod 8$ 的整数.

显然这们之中无三点共线,因而对于某两个(非零)实数 x,y 有 $v_3 = xv_1 + yv_2$.这样

$$\begin{aligned}2v_1\cdot v_3 &= 2xv_1\cdot v_1 + 2yv_1\cdot v_2\\ 2v_2\cdot v_3 &= 2xv_2\cdot v_1 + 2yv_2\cdot v_2\\ 2v_3\cdot v_3 &= 2xv_3\cdot v_1 + 2yv_3\cdot v_2\end{aligned} \qquad ①$$

由于 v_1 不是 v_2 的(实)常数倍,因此

$$\det\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2\\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2\end{pmatrix} > 0$$

以至 ① 中的前两个方程关于 x,y 有一个唯一的有理数解,记为 $x = X/D, y = Y/D$,其中 X,Y 和 D 皆为整数.我们不妨设 $\gcd(X,Y,D) = 1$.用 D 乘以 ①,我们即得

$$\begin{aligned}D &\equiv 2X + Y \pmod 8\\ D &\equiv X + 2Y \pmod 8\\ 2D &\equiv X + Y \pmod 8\end{aligned}$$

把前两个同余式相加并减去第三式,得到 $2X + 2Y \equiv 0 \pmod 8$.因而,由第三个同余式得 D 是偶数.然而此时前两个同余式分别导致 Y 和 X 也是偶数,得一矛盾.

B-6　令 S 是三个不必互不相同的正整数的集合.证明:可以通过下述变换有限次的应用把 S 变为一个包含 0 的集合:选取 S 的三个整数中的两个,记为 x 和 y,且有 $x \leqslant y$,用 $2x$ 和 $y - x$ 替代 x 和 y.

解　把所给的三个数记为 a,b,c.首先,我们把问题归化为 a,b,c 中恰有一个是奇数的情形.即

(1) 若两个是奇数,对这两个数应用变换规则,则无数为奇数.

(2) 若无数为奇数,把三个数都除以 2,并应用归纳法.

(3) 若三个皆为奇数,应用一次变换规则后恰有一个是奇数.一旦恰有一个是奇数,则将永远如此.

现设 a 是奇数,b 和 c 是偶数.我们要使 $b + c$ 中 2 的幂尽可能大.如果 b 和 c 中 2 的幂相同,那么对 b,c 这两个数应用变换规则,或者产生两个被 2 的一个较高幂整除的数,或者,一个数中的 2 的幂小于另一数中的 2 的幂.既然在变换过程中 $b + c$ 是一个常数,在有限次应用变换规则后,b 和 c 中 2 的因子数将不相等.此外容易看到,也许在几次附加的变换后,或者有 $bc = 0$(此时目的已达到,停止),或者 b,c 中 2 的幂小者本身也比另一数小,设此小的数

是 b,即有 $b < c$.

i $a > b$.此时变换 a,b,那么 a 仍为奇数,b 被加了一倍,并且 $b + c$ 被 2 的一个较高幂整除.

ii $a < b$.首先应用变换规则于 a 和 b,然后再应用于 $b - a$ 和 c(注意,$c > b > b - a$),我们得到

$$\begin{matrix} a & b & c \\ 2a & b-a & c \\ 2a & 2b-2a & c-b+a \end{matrix}$$

此时奇数是 $c - b + a$,而两个偶数的和为 $2b$,它比 $b + c$ 有更多的 2 的因子.

第 55 届美国大学生数学竞赛

A－1 假设序列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足：对所有的 $n\geqslant 1$，$0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$．证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

解 令 $b_1=a_1$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_4+a_5+a_6+a_7$，一般地

$$b_n=a_{2^{n-1}}+a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n-1}$$

利用条件 $a_n\leqslant a_{2n}+a_{2n+1}$，容易导出 $b_n<b_{n+1}$ 对所有的 $n\geqslant 1$ 成立．于是，对任意正整数 t

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n>\sum_{n=1}^{2^t-1}a_n=\sum_{n=1}^{t}b_n\geqslant tb_1=ta_1$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的．

A－2 令 A 是第一象限中直线 $y=\frac{1}{2}x$，x 轴和椭圆 $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$ 所围成的区域的面积．试找出正数 m，使得 A 等于第一象限中直线 $y=mx$，y 轴和椭圆 $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$ 所围成的区域的面积．

解 线性变换 $x_1=\frac{1}{3}x$，$y_1=y$ 将由 $y=\frac{1}{2}x$，x 轴和椭圆 $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$ 所围成的区域 R 变成了区域 R'，R' 是由 $y_1=\frac{3}{2}x_1$，x_1 轴和圆 $x_1^2+y_1^2=1$ 所围成的；它也将由 $y=mx$，y 轴和 $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$ 所围成的区域 S 变成了由 $y_1=3mx_1$，y_1 轴和圆所围成的区域 S'．既然在这变换之下所有的面积均乘以同一个(非零)因子，为了 R 和 S 有相同的面积，必须且只须 R' 和 S' 有相同的面积．然而，从关于直线 $y_1=x_1$ 的对称性，必须且只须 $3m=\frac{2}{3}$，即 $m=\frac{2}{9}$．

A－3　如果在一个直角边长为 1 的等腰三角形中，对每个点都染上四种颜色中的一种，证明：一定存在有相同颜色的两点，它们至少相距 $2-\sqrt{2}$.

解　假设等腰直角三角形的顶点是(0,0)，(1,0)，(0,1). 如果三角形的点已染上了四种颜色，并且相同颜色的点之间的距离总在 $2-\sqrt{2}$ 之内. 那么这四个点 $(0,1)$，$(0,\sqrt{2}-1)$，$(\sqrt{2}-1,0)$，$(1,0)$ 必须有不同的颜色，比如说分别是颜色 A,B,C,D. 于是点(0,0) 必须带有颜色 B 或 C. 不失普遍性，可设(0,0) 是 B 色的. 那么点 $(\sqrt{2}-1,2-\sqrt{2})$ 与带有每种颜色的点的距离至少是 $2-\sqrt{2}$，这是不可能的.

A－4　$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 2×2 的矩阵，其元为整数，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵，其逆矩阵的元也均为整数. 证明：$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B}$ 可逆，其逆矩阵元为整数.

解　为了一个其元是整数的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有逆，且其逆矩阵元也为整数，必须且只须 $\det \boldsymbol{C}=\pm 1$. 所以，如果我们考虑函数 $f(x)=\det(\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{B})$，五个函数值 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ 和 $f(4)$ 必须是 1 或 -1，从而 f 取其中的一个值至少三次. 然而，$f(x)$ 是 x 的小于等于 2 次多项式，f 能取同一个值多于两次，f 必须是常数. 从而 $f(x)$ 是常数 1 或 -1；特别，$\det(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B})=\pm 1$，所以 $\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B}$ 可逆，其逆矩阵元是整数.

A－5　令 $(r_n)_{n\geqslant 0}$ 为一正实数序列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. S 是数集合，其中的元可表示成和

$$r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_{1\,994}}$$

这里 $i_1<i_2<\cdots<i_{1\,994}$. 证明：每个非空的区间 (a,b) 包含一个非空的子区间 (c,d)，它和 S 不交.

解法 1　只须证明 S 中的任意一个序列都含有一个单调非增子序列. 如果这样，令 $(t_n)_{n\geqslant 0}$ 是 (a,b) 内的任一严格增的序列，某些(事实上，除了有限个以外的) 交集 $S\cap(t_n,t_{n+1})$ 会是空的，因为不然，取 $s_n\in S\cap(t_n,t_{n+1})$，我们得到一个严格增的序列 $(s_n)_{n\geqslant 0}$.

令 $(s_n)_{n\geqslant 0}$ 是 S 中的一个序列. 对 $n=0,1,2,\cdots$，将 s_n 写成

$s_n = r_{f(n,1)} + r_{f(n,2)} + \cdots r_{f(n,1\,994)}$，这里

$$f(n,1) < f(n,2) < \cdots < f(n,1\,994)$$

序列$(r_{f(n,1)})_{n\geqslant 0}$有一个单调非增的子序列（由于$(r_n)_{n\geqslant 0}$是收敛于0的正序列）. 于是我们可以用$(s_n)_{n\geqslant 0}$的一个子序列来代替它，对于这个子序列，它的$(r_{f(n,1)})_{n\geqslant 0}$是单调非增的. 同样地，我们续次这样做，得到一个子序列，对于它，每个$(r_{f(n,2)})_{n\geqslant 0}$，$(r_{f(n,3)})_{n\geqslant 0}$，…，$(r_{f(n,1\,994)})_{n\geqslant 0}$都是单调非增的. 得到的这个$(s_n)_{n\geqslant 0}$是单调非增的.

解法 2 令 C 是集合$\{r_n\}_{n\geqslant 0} \cup \{0\}$. 既然 C 是紧的，用 C 的 1 994 个元的和数所构成的集合 S' 也是紧的（例如，它是 $C^{1\,994}$ 的一个连续象）. 显然 $S \subseteq S'$.

令(a,b)是一个非空开区间，既然 S' 可数，$(a,b) \setminus S'$ 非空；它是开的，因为 S' 闭. 所以$(a,b) \setminus S'$ 含有一个非空的开区间.

注 这个证明推广到对任意收敛序列$(r_n)_{n\geqslant 0}$，得到相同的结论.

A－6 令$f_1, f_2, \cdots, f_{10}$是整数集的双射，满足：对每个整数 n，存在这些函数（允许重复出现）的某个复合$f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_m}$，它映 0 成 n. 考虑含有 1 024 个函数的集合

$$F = \{f_1^{e_1} \circ f_2^{e_2} \circ \cdots \circ f_{10}^{e_{10}}\}$$

这里 $e_i = 0$ 或 $1, 1 \leqslant i \leqslant 10$（$f_i^0$是恒等函数，$f_i^1 = f_i$）. 证明：如果 A 是任意一个整数的非空有限集合，那么 F 中至多有 512 个函数映 A 到自身.

解 令 A 是整数 Z 的一个非空的有限子集. 依鸽巢原理，一个 Z 的双射，如果映 A 到自身，那么当它限制在 A 上时，也是一个双射；特别，它的逆也映 A 到自身. 注意，并不是所有的双射 f_1，f_2，…，f_{10} 都能映 A 到自身的，因为如若不然，如$0 \in A$我们不能用一个复合映射 $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_m}$ 映 0 到任意的 $n \notin A$，而如果 $0 \notin A$ 我们也不能用一个这样的复合映射映 0 到任意的 $n \in A$.

令 k 是最大①的整数使得 f_k 不映 A 到自身，又设 F 中有多于 512 个函数能映 A 到自身. 我们将 F 看成是没有次序的函数对的互不相交的并，两个复合函数 $f_1^{e_1} \circ f_1^{e_2} \circ \cdots \circ f_{10}^{e_{10}}$ 和 $f_1^{d_1} \circ f_2^{d_2} \circ \cdots \circ f_{10}^{d_{10}}$ 属于同一对仅当它们在第 k 个指数上不同，即 $e_i = d_i, i \neq k$. 依鸽巢原理，这些 512 个函数对中，至少有一对的两个函数都映 A 到自

① 原文误为"最小". —— 译者注

身.由于所有的 f_l,$l > k$,也映 A 到自身,我们用这些 f_l 的逆作复合,得出:对某些 $e_1,\cdots,e_{k-1}$,$F_1 = f_1^{e_1}\circ f_1^{e_2}\circ\cdots\circ f_{k-1}^{e_{k-1}}$ 和 $F_2 = f_1^{e_1}\circ f_2^{e_2}\circ\cdots\circ f_{k-1}^{e_{k-1}}\circ f_k$ 都映 A 到自身.但是,这时有:$F_1^{-1}\circ F_2 = f_k$ 也映 A 到自身,矛盾.

B-1　找出所有的正整数,距离它 250 之内恰有 15 个完全平方数.

解　设 $N > 0$, 距离它 250 之内有 15 个平方数 m^2, $(m+1)^2,\cdots,(m+14)^2$,这里我们可设 $m \geqslant 0$.事实上 m 会是正的,如若不然,多出一个平方数 225,它距离 N 在 250 之内.我们有必要充分条件

$$(m+14)^2 \leqslant N+250 \leqslant (m+15)^2-1$$
$$(m-1)^2+1 \leqslant N-250 \leqslant m^2$$

上两式相减(将第二行的不等式反向),我们得出

$$28m+196 \leqslant 500 \leqslant 32m+222$$

从它导出 $m = 9$ 或 10.

如 $m = 9$

$$23^2 \leqslant N+250 \leqslant 24^2-1$$
$$8^2+1 \leqslant N-250 \leqslant 9^2$$

即 $315 \leqslant N \leqslant 325$.

如 $m = 10$

$$24^2 \leqslant N+250 \leqslant 25^2-1$$
$$9^2+1 \leqslant N-250 \leqslant 10^2$$

即 $332 \leqslant N \leqslant 350$.

B-2　对哪些实数 c,存在一条直线,它与曲线

$$y = x^4+9x^3+cx^2+9x+4$$

在四个不同的点相交?

解　在决定是否有一条直线和四次曲线 $y = p(x)$ 相交于四个点时,$p(x)$ 中的常数项和 x 项的系数是无关紧要的.我们也可以对任意实数 α 用 $p(x-\alpha)$ 来替代 $p(x)$.于是我们将给定的四次函数 $p(x) = x^4+9x^3+cx^2+9x+4$ 用 $p(x-9/4) = x^4+(c-243/8)x^2+\cdots$ 来代替,这里我们略去了最后两个系数(我们根本不必计算出它们来).

从而,问题就是决定 c 的值使得有一条直线与 $y = x^4+(c-243/8)x^2$ 相交于四个不同的点.从曲线 $y = x^4+ax^2$ 的形状可以

清楚地看出答案来.例如,如 $a<0$,这条"W - 形状"的曲线在 $x=0$ 处有一个相对极大值,所以水平线 $y=-\varepsilon$ 对于小的正数 ε 和曲线有四个交点,而如 $a\geqslant 0$,曲线总是向上凹的,所以没有一条直线能和它交两点以上.

B - 3 求满足以下性质的实数 k 所构成的集合:对任一正、可微函数 f,它对任意 x 都有 $f'(x)>f(x)$,存在某个数 N,使得凡 $x>N$ 都有 $f(x)>e^{kx}$.

解 所求的集合是 $(-\infty,1)$.首先,我们注意到,如 $k>1$ 在集合中,那么 $k=1$ 也在集合中.然而,如 f 是任意形如 $f(x)=g(x)e^x$ 的函数,其中 g 是一个正、增的可微函数,以0和1为界(例如 $g(x)=(1/\pi)\arctan x+\frac{1}{2}$),于是我们有 $f'(x)=e^x(g'(x)+g(x))>f(x)$,并且 $f(x)<e^x$ 对一切 x 成立,所以 $k=1$ 不在集合中.

另一方面,如对一切 x 都有 $f'(x)>f(x)$,那么(f 是正的)我们有:

对一切 x,$\dfrac{f'(x)}{f(x)}>1$;

对凡 $x\geqslant 0$,$\int_0^x \dfrac{f'(t)}{f(t)}dt>\int_0^x 1dt$;

对凡 $x\geqslant 0$,$\ln(f(x))>x+\ln(f(0))$;

对凡 $x\geqslant 0$,$f(x)>f(0)e^x$.

如 k 是任一小于1的数,那么对充分大的 x,我们有 $f(0)e^x>e^{kx}$(既然 $f(0)$ 是正的),这就证明了 k 属于这个集合.

B - 4 对 $n\geqslant 1$,令 d_n 是矩阵 $\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{I}$ 的元的最大公因数,这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix},\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

证明:$\min\limits_{n\to\infty} d_n=\infty$.

解法1 经过计算(然后对 n 进行归纳),我们看出 $\boldsymbol{A}^n$ 取以下的形式

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\2b_n&a_n\end{pmatrix}$$

其中 a_n 是奇数,因为 $\det \boldsymbol{A}^n=1$,所以 $a_n^2-1=2b_n^2$.于是 a_n-1 能整除 $2b_n^2$,从而

$$d_n = (a_n - 1, b_n) \geqslant \sqrt{(a_n - 1)/2}$$

既然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$（例如，$a_n > 3a_{n-1}$），结论成立.

解法 2 定义序列 $r_0, r_1, r_2, \cdots$，如下：$r_0 = 0, r_1 = 1$，对 $k > 1, r_k = 6r_{k-1} - r_{k-2}$. 首先我们对 k 归纳证明

$$A^n - I = r_{k+1}(A^{n-k} - A^k) - r_k(A^{n-k-1} - A^{k+1}), k \geqslant 0 \quad ①$$

$k = 0$ 时这是对的，利用 $A^2 - 6A + I = 0$（特征方程），进行归纳时我们有

$$\begin{aligned} & r_{k+1}(A^{n-k} - A^k) - r_k(A^{n-k-1} - A^{k+1}) = \\ & \quad r_{k+1}((6A^{n-k-1} - A^{n-k-2}) - (6A^{k+1} - A^{k+2})) - \\ & \quad r_k(A^{n-k-1} - A^{k+1}) = \\ & \quad (6r_{k+1} - r_k)(A^{n-k-1} - A^{k+1}) - r_{k+1}(A^{n-k-2} - A^{k+2}) = \\ & \quad r_{k+2}(A^{n-k-1} - A^{k+1}) - r_{k+1}(A^{n-k-2} - A^{k+2}) \end{aligned}$$

在式 ① 中取 $k = [n/2]$，我们得出

$$A^n - I = \begin{cases} r_{n/2}(A^{n/2+1} - A^{n/2-1}), \text{如 } n \text{ 是偶数} \\ (r_{(n+1)/2} + r_{(n-1)/2})(A^{(n+1)/2} - A^{(n-1)/2}), \text{如 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$（例如，$r_n > 5r_{n-1}, n > 1$），无论在哪种情形，$A^n - I$ 的矩阵元的最大公因数都趋于 ∞.

解法 3 我们知道，A^n 的矩阵元都可以表示成 $\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$，这里 $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$（$A$ 的特征值）. 所以，利用 $n = 1, 2$ 的矩阵元，我们得到

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} & \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{2}} & \dfrac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} \end{pmatrix}$$

注意到 $\lambda_i = \mu_i^2$，其中 $\mu_1 = 1 + \sqrt{2}, \mu_2 = 1 - \sqrt{2}$，并且 $(\mu_1^n - \mu_2^n)/\sqrt{2}$ 和 $(\mu_1^n + \mu_2^n)/2$ 是有理整数，我们有①

$$\begin{aligned} d_n &= \left(\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} - 1, \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2\sqrt{2}}\right) = \\ & \left(\frac{(\mu_1^n - \mu_2^n)^2}{2}, \frac{(\mu_1^n - \mu_2^n)(\mu_1^n + \mu_2^n)}{2\sqrt{2}}\right) = \\ & \left(\frac{(\mu_1^n - \mu_2^n)}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\mu_1^n - \mu_2^n}{\sqrt{2}}, \frac{\mu_1^n + \mu_2^n}{2}\right) \end{aligned}$$

由于 $|\mu_1| > 1$ 和 $|\mu_2| < 1$，我们得出 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_1^n - \mu_2^n) = \infty$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

① 这时的推导有误，需对以下的讨论作稍许改动. —— 译者注

注 证明可推广到满足行列式为1,并且 $|\operatorname{trace}(A)|>1$(这条件保证 $r_n\to\infty$,这里 $r_n=\operatorname{trace}(A)r_{n-1}-r_{n-2}$)的整数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,用一个类似的讨论,对 $\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{I}$ 的矩阵元得出相同的结论.

> B-5 对任一实数 α,定义函数 $f_\alpha(x)=[\alpha x]$. n 是一正整数,证明:存在一个 α,使得对 $1\leqslant k\leqslant n$,有
> $$f_\alpha^k(n^2)=n^2-k=f_{\alpha^k}(n^2)$$

解 对任意 $\alpha\geqslant 0$ 和任意正整数 k,我们有

$$f_\alpha^k(n^2)=[\alpha[\alpha[\cdots[\alpha n^2]\cdots]]]\leqslant[\alpha\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot\alpha n^2]=f_{\alpha^k}(n^2)$$

所以只须证明存在 $\alpha\geqslant 0$,使得对 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$f_\alpha^k(n^2)\geqslant n^2-k,\quad \alpha^k n^2<n^2-k+1$$

$k=1$ 时,从第一个不等式推出 $\alpha n^2\geqslant n^2-1$;我们将证明 $\alpha=(n^2-1)/n^2=1-1/n^2$ 适合要求.取了这个 α 值,我们对 k 用归纳法证明对 $1\leqslant k\leqslant n$,有 $f_\alpha^k(n^2)\geqslant n^2-k$;事实上,如它对 k 已成立,我们有

$$f_\alpha^{k+1}(n^2)\geqslant f_\alpha(n^2-k)=((1-\frac{1}{n^2})(n^2-k))\geqslant$$
$$((1-\frac{1}{n^2-k})(n^2-k))=$$
$$n^2-(k+1)$$

完成了归纳法证明.

为了证明 $\alpha^k n^2<n^2-k+1$,注意该不等式对 $n=1$ 从而 $k=1,\alpha=0$ 成立;对于 $n>1$,这个不等式等价于①

$$\alpha^k<1-\frac{k-1}{n^2}$$
$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^k<1-\frac{k-1}{n^2}$$
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^k>\frac{1}{1-\frac{k-1}{n^2}}$$
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{k-1}>\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{k-1}{n^2}}=\frac{n^2-1}{n^2-k+1}$$

但是
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{k-1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{k-1}\geqslant$$
$$1+\frac{k-1}{n^2-1}=\frac{n^2+k-2}{n^2-1}$$

① 原文有误,已代为改正.—— 译者注

用交叉相乘方法,容易看出对 $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\frac{n^2+k-2}{n^2-1} > \frac{n^2-1}{n^2-k+1}$$

证毕.

B－6　对任一整数 a,令

$$n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$$

证明:对 $0 \leqslant a,b,c,d \leqslant 99$, $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10\ 100}$ 蕴涵 $\{a,b\} = \{c,d\}$.

解　注意到 $n_a \equiv a \pmod{100}$ 和 $n_a \equiv 2^a \pmod{101}$. 如果

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10\ 100}$$

那么

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{101}$$

所以

$$2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \pmod{101} \qquad ①$$

同样, $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{100}$, 所以 $a+b \equiv c+d \pmod{100}$, 从而应用费马定理(101 是素数), $2^{a+b} \equiv 2^{c+d} \pmod{101}$, 即有

$$2^a \cdot 2^b \equiv 2^c \cdot 2^d \pmod{101} \qquad ②$$

从①和②两式我们看出 $\{2^a,2^b\}$ 和 $\{2^c,2^d\}$ 是同一个模 101 集合, 也就是二次多项式

$$(x-2^a)(x-2^b) = x^2-(2^a+2^b)x+2^a2^b = (x-2^c)(x-2^d)$$

在域 Z_{101} 中的根集合. 为了 $\{a,b\} = \{c,d\}$, 只须证明对于 $a \in \{0,1,\cdots,99\}$, 2^a 对模 101 都不同余. 为此, 我们要证明 2 对于模 101 所属的方次数恰好是 100. 这就只须证明 $2^{20} \not\equiv 1 \pmod{101}$ 和 $2^{50} \not\equiv 1 \pmod{101}$. 我们有

$$2^{10} = 1\ 024 \equiv 14 \pmod{101}$$

所以

$$2^{20} \equiv 14^2 \equiv -6 \pmod{101}$$

由此

$$2^{50} \equiv 2^{20}2^{20}2^{10} \equiv 36 \cdot 14 \equiv -1 \pmod{101}$$

第56届美国大学生数学竞赛

A－1 设 S 是一个实数集合，它对于乘法封闭（即，如果 a 与 b 都属于 S，则 ab 也属于 S）．设 T 与 U 是 S 的两个不相交子集，且其并集为 S．T 中任意三个元素（可以相同）的乘积仍在 T 中，U 中任意三个元素的乘积也在 U 中．证明：T 与 U 中至少有一个对乘法是封闭的．

解 假设 T 对乘法是不封闭的，那么存在 $t_1,t_2\in T$ 且 $t_1t_2\notin T$．又因为 S 对乘法是封闭的，所以 $t_1t_2\in U$．现考虑 U 中任何两个元素 u_1 和 u_2，我们要证明 $u_1u_2\in U$（这样的话 U 对乘法就是封闭的）．假设 $u_1u_2\notin U$，那么 $u_1u_2\in T$，所以 $t_1\cdot t_2\cdot u_1u_2\in T$（因为它是 T 中三个元素之积），但是 $t_1\cdot t_2\cdot u_1u_2=(t_1t_2)\cdot u_1\cdot u_2\in U$（作为 U 中三个元素之积），这与已知的 T 与 U 不相交矛盾，所以 $u_1u_2\in U$．证毕．

T,U 不必都是封闭的．例如取 T 为模 4 后余 1 的所有正整数之集，而 U 为模 4 后余为 3 的所有正整数之集，那么 $S=T\cup U$，T 是封闭的，U 则不是．

A－2 对什么样的正实数 a,b，广义积分

$$\int_b^\infty\left(\sqrt{\sqrt{(x+a)}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)\mathrm{d}x$$

是收敛的？

解法 1 积分收敛当且仅当 $a=b$．

注意到对所有的 $x\geqslant b$，被积函数是有定义且连续的，所以唯一的问题是讨论 ∞ 处的收敛性问题．

因为 $(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})=a$ 且 $(\sqrt{x}-\sqrt{x-b})(\sqrt{x}+\sqrt{x-b})=b$，所以被积函数可写为

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{b}{x}}}}\right]$$

如果 $a\neq b$，当 $x\to\infty$ 时，括号里的值就趋向于一个非零数 $\sqrt{a/2}-\sqrt{b/2}$．对足够大的 x，被积函数的绝对值至少为 $c/2\sqrt[4]{x}$，

其中 $c=|\sqrt{a/2}-\sqrt{b/2}|$. 此时通过与发散积分$\int_1^{\infty}(1/\sqrt[4]{x})\mathrm{d}x$ 比较可知原积分发散.

另一方面,如果 $a=b$,则被积函数为

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}}-\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}}\cdot$$

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}-\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}}\cdot$$

$$\frac{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}-\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}+\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}}=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\left(\sqrt{1-\frac{a}{x}}-\sqrt{1+\frac{a}{x}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\frac{a}{x}-\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{a}{x}}}=$$

$$\frac{-2a\sqrt{a}}{x\sqrt[4]{x}\varphi(x)\left(\sqrt{1-\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{a}{x}}\right)}$$

其中

$$\varphi(x)=\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}+\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\right)$$

因为 $x\to\infty$ 时,$\varphi(x)\to\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})=4\sqrt{2}$,被积函数的绝对值小于 $a\sqrt{a}/x^{5/4}$,所以与积分$\int_1^{\infty}(1/x^{5/4})\mathrm{d}x$ 比较可得原积分收敛.

解法 2 被积函数为

$$x^{1/4}\left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1/2}-1}-\sqrt{1-\left(1-\frac{b}{x}\right)^{1/2}}\right)=$$

$$x^{1/4}\left(\sqrt{\frac{a}{2x}-\frac{a^2}{8x^2}+O(x^{-3})}-\sqrt{\frac{b}{2x}+\frac{b^2}{8x^2}+O(x^{-3})}\right)=$$

$$x^{-1/4}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\frac{a}{4x}+O(x^{-2})}-\sqrt{\frac{b}{2}}\sqrt{1+\frac{b}{4x}+O(x^{-2})}\right)=$$

$$x^{-1/4}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\left[1-\frac{a}{8x}+O(x^{-2})\right]-\sqrt{\frac{b}{2}}\left[1+\frac{b}{8x}+O(x^{-2})\right]\right)=$$

$$x^{-1/4}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)+O(x^{-5/4})$$

因为$\int_1^{\infty}x^{-1/4}\mathrm{d}x$发散,$\int_1^{\infty}x^{-5/4}$收敛,所以只有当$a=b$时,原积分收敛.

解法3 令$f(x)=\sqrt{x}$,由中值定理可知存在一个数h(依赖于x),$0<h<a$,使得

$$f(x+a)-f(x)=f'(x+h)a$$

而且也存在数k(依赖于x),$0<k<b$,使得

$$f(x)-f(x-b)=f'(x-k)b$$

所以有

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{2\sqrt{x+h}},\text{对某个 }h,0<h<a$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-b}=\frac{b}{2\sqrt{x-k}},\text{对某个 }k,0<k<b$$

所以有

$$\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}(x+h)^{1/4}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}(x-k)^{1/4}}=$$

$$\frac{(x-k)^{1/4}\sqrt{a}-(x+h)^{1/4}\sqrt{b}}{\sqrt{2}(x+h)^{1/4}(x-k)^{1/4}}=((a^2-b^2)x-(ka^2+hb^2))/$$

$$(\sqrt{2}(x+h)^{1/4}(x-k)^{1/4}((x-k)^{1/4}\sqrt{a}+$$

$$(x+h)^{1/4}\sqrt{b})((x-k)^{1/2}a+(x+h)^{1/2}b))$$

这样当$a\neq b$时,被积函数为$O(x^{-1/4})$,当$a=b$时,被积函数为$O(x^{-5/4})$.余下的讨论与解答2相同.

A－3　数 $d_1d_2\cdots d_9$ 是 9 位（可以相同）的十进制数. 数 $e_1e_2\cdots e_9$ 是这样的数：对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant 9)$，在 $d_1d_2\cdots d_9$ 中用 e_i 代替 d_i 后所得的数能被 7 整除. 数 $f_1f_2\cdots f_9$ 可用同样的规则由 $e_1e_2\cdots e_9$ 得到，即把 $e_1e_2\cdots e_9$ 中的 e_i 用 f_i 代替后所得的数能被 7 整除. 证明：对每个 i，d_i-f_i 可被 7 整除.（例如，如果 $d_1d_2\cdots d_9=199\ 501\ 996$，则 e_6 可为 2 或 9，因为 199 502 996 和 199 509 996 是 7 的倍数）

解　假设 $d_1d_2\cdots d_9\equiv a\pmod 7$，那么对每个 $i,1\leqslant i\leqslant 9$，有

$$a\equiv a-0\equiv(d_1\cdots d_i\cdots d_9)-(d_1\cdots e_i\cdots d_9)\pmod 7=$$
$$10^{9-i}d_i-10^{9-i}e_i\pmod 7$$

把这些同余式加起来就有

$$9a\equiv(d_1d_2\cdots d_9)-(e_1e_2\cdots e_9)\pmod 7$$

所以

$$e_1e_2\cdots e_9\equiv -a\pmod 7$$

利用同样的办法，从 $e_1e_2\cdots e_9\equiv -a\pmod 7$ 开始，我们有

$$-a\equiv 10^{9-i}e_i-10^{9-i}f_i\pmod 7$$

所以

$$-a\equiv(10^{9-i}d_i-a)-10^{9-i}f_i\pmod 7$$

等价于

$$10^{9-i}d_i\equiv 10^{9-i}f_i\pmod 7$$

因为 7 与 10 是互素的，所以 $d_i\equiv f_i\pmod 7$.

A－4　给定 n 个珠子的项链，每个珠子标上一个整数，所有的这些整数之和为 $n-1$. 证明：可以把项链从某处剪断得到一串珠子，按先后顺序，其标上的整数依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足下列不等式

$$\sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant k-1,k=1,2,\cdots,n$$

解法 1　我们将证明只有两个地方可以剪断项链，使其达到我们的要求.

首先任意选取一个起始点，和一个旋转方向，并依次用整数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 作标号，其中 $\sum_{i=1}^{n}y_i=n-1$.

考虑坐标平面上一条道路，从原点(0,0)出发，向右移动一个单位，然后竖直到达点 $(1,y_1)$，再向右移动一个单位，竖直到达点 $(2,y_1+y_2)$，如此继续得到点 $(3,y_1+y_2+y_3),\cdots,(k,\sum_{i=1}^{k}y_i),\cdots$,

$(n,\sum_{i=1}^{n} y_i = n-1)$.在项链上继续这种办法就得:$(n+1, n-1+y_1),(n+2,n-1+y_1+y_2),\cdots$,选取点$(K,\sum_{i=1}^{K} y_i)$,它是直线 $y=((n-1)/n)x$ 上方的最高点,即使$\sum_{i=1}^{n} y_i-((n-1)/n)k$ 取最大值.因为 $n+1$ 与 n 是互素的整数,模去 n,k 是唯一的.重标这些整数,下标按 k 递减.也就是,把原点移到所选取的点.因为从原点开始到其它点的直线的斜率最多为$(n-1)/n$(相等发生在每个周期的端点),于是我们达到了目的:如果$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant k$,斜率至少为 1.

例:假设$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}=\{3,-2,-2,3,6,0,0,1,-1\}$,相应的道路如图 1 所示.

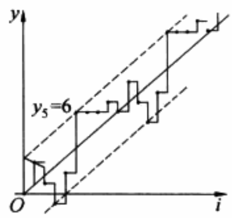


图 1

移位序列0,0,1,-1,3,-2,-2,3,6有部分和0,0,1,0,3,1,-1,2,8 $\leqslant k-1=0,1,2,3,4,5,6,7,8$.

为了找到在相反意义下项链的剪断点的位置,不需要另画一个图,只需要在直线下方选取最低点得到移位序列 -2,-2,3,-1,1,0,0,6,3,其部分和 -2,-4,-1,-2,-1,-1,-1,5,8 $\leqslant$ 0,1,2,3,4,5,6,7,8.

解法2 假设标号用整数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 表示.如果没有 k 满足以上命题,那么对每个 k,存在一个最小数 $\alpha_k \geqslant 1$ 使得

$$\sum_{i=k}^{k-1+\alpha_k} y_i \geqslant \alpha_k$$

其中下标 i 是模 n 后得到的数(注意和中有 α_k 项).可以假定标号是满足 $\alpha_1 \geqslant \alpha_i, i=1,2,3,\cdots,n$.现在选取 k_i 如下:

首先,定 $k_1=1$,让 β_1 为使下式成立的最小数

$$\sum_{i=1}^{\beta_1} y_i \geqslant \beta_1$$

(此时,$\beta_1=\alpha_1$).明显地 $\beta_1<n$,这样 $I_1=\{1,2,\cdots,\beta_1\}$ 是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集.

假设我们已定义了 k_j,β_j 及 $I_j, j<i$,而且 $k_1<k_2<\cdots<k_{i-1}$.并假定 I_j 是一些不相交子集,其并集为$\{1,2,\cdots,k_{i-1}-1+\beta_{i-1}\}$,这个并集是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集.于是定义 $k_i=k_{i-1}+\beta_{i-1}$,选取 β_i 为使下式成立的最小整数

$$\sum_{j=k_i}^{k_i-1+\beta_i} y_j \geqslant \beta_i$$

(注意到 $\beta_i = \alpha_{k_i}$)令 $I_i = \{k_i, k_i + 1, \cdots, k_i - 1 + \beta_i\}$, I_i 有 β_i 个元素,我们断言 $k_i - 1 + \beta_i < n$.

i 假设 $k_i - 1 + \beta_i = n$,此时

$$n - 1 = \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{r=k_j}^{k_{j+1}-1} y_r\right) + \sum_{j=k_i}^{k_i-1+\beta_i} y_j \geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j + \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1}(k_{j+1} - k_j) + \beta_i = n$$

矛盾.

ii 假设 $k_i - 1 + \beta_i > n$.令 $s = n + 1 - k_i$, $t = k_i - 1 + \beta_i - n$(注意到 $\beta_i = s + t$),并假设 $t < \beta_1$,则

$$\beta_i \leqslant \sum_{j=k_i}^{k_i-1+\beta_i} y_j = \sum_{j=k_i}^{k_i-1+s} y_j + \sum_{j=1}^{t} y_j \leqslant$$
$$(s - 1) + (t - 1) = \beta_i - 2$$

得出矛盾.所以 $t \geqslant \beta_1$,从而 $\beta_i > \beta_1$,这也是一个矛盾,因为 $\beta_i = \alpha_{k_i} \leqslant \alpha_1 = \beta_1$.

总之有 $k_i - 1 + \beta_i < n$,所以 I_i 不能覆盖整个集合 $\{1,2,\cdots,n\}$,这显然是不合理的.

所以项链能按希望的方式剪断.

A - 5　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是单变量 t 的可微的(实值)函数,满足

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

其中 $a_{ij} \geqslant 0$.假如对任何 i,当 $t \to \infty$ 时,$x_i(t) \to 0$.问函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必定是线性相关的吗?

解　我们将证明函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必是线性相关的.令

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

及

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有 $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{Ax}$.考虑线性组合 $y = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n$,其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是待定常数,可能是复数.如果令 $\boldsymbol{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,则有 $y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$(T 表示转置),这样

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

特别地,如果 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的关于特征值 λ 的一个特征向量,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\lambda\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$$

所以此时 γ 有形式 $\gamma = C\mathrm{e}^{\lambda t}$,$C$ 为某个常数.因为 $a_{ij} \geqslant 0$,特别地 $\mathrm{Trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \geqslant 0$,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 至少有一个特征值,其实部是非负的.设 λ 为这样的特征值,令 $\boldsymbol{v} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的相应于 λ 的特征向量,那么由上讨论可知 $\gamma = C\mathrm{e}^{\lambda t}$,$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$.另一方面,因为 $t \to \infty$ 时,$x_i(t) \to 0$,γ 是 x_i 的线性组合,所以 $t \to \infty$ 时,$\gamma(t) \to 0$.但是当 $t \geqslant 0$ 时 $|\mathrm{e}^{\lambda t}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \geqslant 1$,所以由 $C\mathrm{e}^{\lambda t} \to 0$ 可得 $C = 0$,所以 x_i 的非平凡线性组合为0(注意到 $\boldsymbol{v} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是非零的,因为它是一个特征向量),所以 x_i 是线性相关的.证毕.

A－6 设 n 个人中的任一个把三个数1,2,3随机地写在 $3 \times n$ 矩阵的某一列上.n 个人的写法是相互独立的.设三行的和分别为 a,b,c,并且重新排列(如若有必要的话)使得 $a \leqslant b \leqslant c$.证明:对某个 $n \geqslant 1\,995$,出现 $b = a + 1$ 和 $c = a + 2$ 的情况至少为出现 $a = b = c$ 的情况的四倍.

解 对正整数 n,令 $S(n)$ 表示命题"出现 $b = a + 1$ 及 $c = a + 2$ 的情形至少为出现 $a = b = c$ 情形的4倍".我们将证明如果命题 $S(n)$ 是假的,则 $S(n+1)$ 就是真的.特别地,$S(n)$ 对 $n = 1\,995$ 和 $n = 1\,996$ 至少有一个是真的.

对任何正整数 n,令 X_n 表示形成 $b = a + 1$ 和 $c = a + 2$ 的矩阵的方式的数目(其中 a,b,c 是重排后矩阵每行之和,$a \leqslant b \leqslant c$,附带地有 $a + b + c = 6n$).令 Y_n 表示形成 $a = b = c$ 的矩阵的方式的数目,令 Z_n 表示形成 $a = b$ 和 $c = a + 3$ 的矩阵的方式的数目.

如果 $S(n)$ 是假的,则 $4Y_n > X_n$.现在注意到如果有一个 $n + 1$ 列的矩阵,其每行之和相等,那么前面 n 列所形成的矩阵应归入 X_n.相反地,对由以 X_n 中的方式形成的每个矩阵,恰有一种 Y_{n+1} 中的方式去"实现"它,所以 $Y_{n+1} = X_n$.类似的讨论可知 $Z_{n+1} \geqslant X_n$(因为对行和 $a,a+1,a+2$ 可以分别加上2,1,3得到 $a+2,a+2,a+5$),有

$$X_{n+1} \geqslant 6Y_n + 2X_n + 2Z_n$$

(因为 $a+2,a+3,a+4$ 可由1,2,3按任意顺序加到 $a+1,a+1,a+1$ 上得到(可以重排),或者把2,3,1或3,1,2(按同样的顺序)

加到 $a,a+1,a+2$ 上得到(可以重排),也可以把 3,2,1 或 2,3,1 加到 $a,a,a+3$ 上得到(可以重排)).

所以,我们有

$$\frac{X_{n+1}}{Y_{n+1}}=\frac{X_{n+1}}{X_n}\geqslant 6\frac{Y_n}{X_n}+2+2\frac{Z_n}{X_n}\geqslant$$
$$6\frac{Y_n}{X_n}+2+2\frac{X_{n-1}}{X_n}=$$
$$6\frac{Y_n}{X_n}+2+2\frac{Y_n}{X_n}=8\frac{Y_n}{X_n}+2$$

由假设有 $Y_n/X_n>1/4$,所以 $X_{n+1}/Y_{n+1}\geqslant 8/4+2=4$,所以 $X_{n+1}\geqslant 4Y_{n+1}$.证毕.

B-1 设 π 是集合{1,2,3,4,5,6,7,8,9}的一个划分,$\pi(x)$ 为包含 x 的那部分中元素的个数.证明:对任何两个划分 π 和 π',在{1,2,3,4,5,6,7,8,9}中存在两个不同的数 x 和 y,使得 $\pi(x)=\pi(y)$ 且 $\pi'(x)=\pi'(y)$.(集合 S 的一个划分是指把 S 分成一些不相交子集的并集)

解 假设{1,2,3,4,5,6,7,8,9}中没有所要求的两个数,那么 π 中同一部分的任何两个数必定包含在 π' 中数目不同的两部分之中,反之亦真.这说明 π 和 π' 中的最大部分的元素的个数最多为 3(因为 $1+2+3+4>9$).事实上,π 中元素个数相同的两个部分的任意两个数必定包含在 π' 中元素个数不同的两部分之中,所以 π 最多有一个部分的元素个数为 3;有一个部分的元素个数为 2,至多有三个部分的元素个数为 1.而这对于 9 个数的集合的划分是不可能的.

B-2 一个半轴长分别为 a 和 b 的椭圆在曲线 $y=c\sin(x/a)$ 上滚动而不滑动.问 a,b,c 之间的关系怎样时,椭圆在曲线上滚动了曲线的一个周期的同时,它本身正好转了一圈?

解 我们将证明 $b^2=a^2+c^2$.

椭圆的参数形式为 $x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$.用熟知的关于弧长的公式,椭圆的周长为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

正弦曲线的一个周期的长度为

$$\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{x}{a}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

由等式 $a^2+c^2\cos^2\theta=a^2\sin^2\theta+(a^2+c^2)\cos^2\theta$,我们得到,两个弧长相等当且仅当 $b^2=a^2+c^2$.证毕.

B－3　每个 n^2 位的十进制数,对应一个矩阵的行列式.例如 $n=2$ 时,整数 8 617 对应于 $\det\begin{pmatrix}8&6\\1&7\end{pmatrix}=50$.试找出一个自变量为 n 的函数,它对应于所有 n^2 位十进制数的行列式的和.(首位数字假定非零,例如对 $n=2$,共有 9 000 个行列式.)

解　$n=1$ 时,和为 45;$n=2$ 时,和为 20 250;$n\geqslant 3$ 时,和为 0.

$n=1$ 的情形是平凡的:$1+2+\cdots+9=45$.现设 $n\geqslant 2$.那么对元素取自 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 中的每个 $n\times n$ 矩阵,总对应另外一个矩阵,它由交换这个矩阵的最后两列所得(如果这个矩阵与原来的矩阵相等,则其行列式为 0),因为交换两列改变行列式的符号,所以取自 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 的所有矩阵的行列式之和为 0.然而,我们不是取所有的矩阵,而只取左上角不为 0 的那些.如果 $n\geqslant 3$,则交换最后两列不影响左上角,所以所求的和为 0.另一方面,如果 $n=2$,则对和有贡献的只有形如$\begin{pmatrix}\bullet&0\\\bullet&\bullet\end{pmatrix}$的矩阵的行列式.这些行列式只依赖于对角线上的元素,对对角线上的每对元素对应着 10 个矩阵,所以它们的和为

$$10\sum_{i,j=1}^{9}ij=10\left(\sum_{i=1}^{9}i\right)\left(\sum_{j=1}^{9}j\right)=10\cdot 45\cdot 45=20\ 250$$

证毕.

B－4　计算

$$\sqrt[8]{2\ 207-\cfrac{1}{2\ 207-\cfrac{1}{2\ 207-\cdots}}}$$

并把答案表示成 $(a+b\sqrt{c})/d$ 的形式,其中 a,b,c,d 均为整数.

解　答案为 $(3+\sqrt{5})/2$.

令

$$F(n)=n-\cfrac{1}{n-\cfrac{1}{n-\cdots}}$$

所以我们的问题是求$\sqrt[8]{F(2\,207)}$.注意到$F(n)=n-1/F(n)$,对$F(n)$解这个二次方程得到$F(n)=(n\pm\sqrt{n^2-4})/2$.

对$n>2$,有

$$\frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}=\frac{2}{n+\sqrt{n^2-4}}<\frac{2}{n}<1<F(n)$$

所以我们必须取加号的值:$F(n)=(n+\sqrt{n^2-4})/2$.注意到对$n>2$

$$(F(n))^2=\frac{n^2+2n\sqrt{n^2-4}+n^2-4}{4}=\frac{n^2-2+n\sqrt{n^2-4}}{2}=$$

$$\frac{n^2-2+\sqrt{(n^2-2)^2-4}}{2}=F(n^2-2)$$

因为$n>2$可得$n^2-2>2$.

相反地,如果$k>2$,我们有$k=n^2-2,n=\sqrt{k+2}>2$,所以$F(k)=(F(n))^2,\sqrt{F(k)}=F(n)=F(\sqrt{k+2})$.特别地

$$\sqrt{F(2\,207)}=F(\sqrt{2\,209})=F(47)$$

$$\sqrt[4]{F(2\,207)}=\sqrt{F(47)}=F(\sqrt{49})=F(7)$$

及
$$\sqrt[8]{F(2\,207)}=\sqrt{F(7)}=F(\sqrt{9})=F(3)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

B-5 有4堆豆子,每堆的豆子颗数分别为3,4,5和6粒.两个人玩游戏,每次拿取豆子的方式有两种:

(1)从一堆里拿取一粒豆子,但这堆里必须还剩至少两粒.

(2)如果某堆只含2粒或3粒,则可以全部拿取.

两个人依次拿取豆子,拿取最后一堆豆子的人为赢者.为了成为赢者,你愿意先开始拿呢?还是后开始?并给出你获胜的策略.

解 只有1粒豆子或没有豆子的那些堆不影响游戏.实际上,不会出现1粒的情况.含有2粒的那堆就像只含1粒的一样,可以去掉.有3粒的堆是特殊的.其他情况是每次只拿取1粒豆子,其所得结果依赖于全部豆子总数的奇偶性(把2粒的情况看做是1粒).

首先拿的人可以获胜,他从3粒豆子的那一堆里拿取1粒,留下4堆,所含豆子数分别为2,4,5,6.它们“和”为1(=2)+4+5+6,偶数.现在输赢已定.因为另一个人必定使“和”为奇数.不管如何拿取,除非第一个人不在有4粒豆子的那一堆里拿取(这没有必要,因为和将总是奇数,于是不会出现有4粒豆子的情况),而且不管第二个人何时在4粒堆里拿取,第一个人将随后拿取该堆所有

剩下的豆子.

B－6 对正整数 α,定义

$$S(\alpha)=\{[n\alpha]\mid n=1,2,3,\cdots\}.$$

试证$\{1,2,3,\cdots\}$不能够表为三个集合 $S(\alpha)$,$S(\beta)$和 $S(\gamma)$的不相交并集.($[x]$代表不大于 x 的最大整数.)

解 设 $\alpha<\beta<\gamma$,不相交的 $S(\alpha)$,$S(\beta)$ 与 $S(\gamma)$ 覆盖$\{1,2,3,\cdots\}$,因为$[\alpha]=1$,我们有 $\alpha=1+\varepsilon,0\leqslant\varepsilon<1$.

设 $r>1$ 为不在 $S(\alpha)$ 中的第一个值,则有

$$\lfloor(r-1)\alpha\rfloor=r-1,\lfloor\alpha\rfloor=r+1.$$

所以$(r-1)\alpha<r,r\alpha\geqslant r+1$

及

$$1+\frac{1}{r}\leqslant\alpha<1+\frac{1}{r-1}$$

即

$$\frac{1}{r}\leqslant\varepsilon<\frac{1}{r-1}$$

(1) 如果 $u\notin S(\alpha)$,那么不在 $S(\alpha)$ 中的第二个元素是 $u+r$ 或者 $u+r+1$,($u+r,u+r+1$ 中的另一个在 $S(\alpha)$ 中).下一个不在 $S(\alpha)$ 中的元素为 $u+m$,其中 m 是满足$\delta+(m-1)\varepsilon\geqslant1$的最小整数.如果 $m\leqslant r-1$,则

$$\delta+(m-1)\varepsilon<m\varepsilon\leqslant(r-1)\varepsilon<1$$

这是因为 $\delta<\varepsilon$.对 $m=r+1$,有

$$\delta+(m-1)\varepsilon=\delta+r\varepsilon\geqslant1$$

所以 $m=r$ 或$r+1$.

注意到$[\beta]=r$,所以 $r\leqslant\beta<r+1$.

(2) 如果 $v\subset S(\beta)$,那么 $S(\beta)$ 中的第二个元素是 $v+r$ 或 $v+r+1$.

(2) 的证明同(1).

根据(1) 和(2),又因为 $S(\alpha)$ 与 $S(\beta)$ 不相交,所以 $S(\alpha)$ 与 $S(\beta)$ 的并集即为$\{1,2,3,\cdots\}$,所以$\{1,2,3,\cdots\}$不能表成三个不相交集合 $S(\alpha)$,$S(\beta)$ 与 $S(\gamma)$ 的并集.

第 57 届美国大学生数学竞赛

A－1　找出最小的数 A，使得任何两个面积之和为 1 的正方形都可以放进一个面积为 A 的矩形之中（这两个正方形的内部不能有重叠）．你可以假定两个正方形的边都平行于矩形的边．

解　我们总能够把面积之和为 1 的两个正方形放入一个面积为 $A = (1+\sqrt{2})/2$ 的矩形之中．

解法 1　令 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$，则

$$x(x+y) = \cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{2}\cos\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) = \sqrt{2}\cos\theta\sin(\pi/4+\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(2\theta+\pi/4)+\sin(\pi/4))$$

在 $2\theta + \pi/4 = \pi/2$ 时，取得极大值．对这个 θ 值，$x > y$，所以我们所要的极大值为 $(1+\sin(\pi/4))/\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})/2$．

解法 2　令 $X = x, Y = ky$，其中 k 为某个待定常数，则有

$$x(x+y) = X^2 + \frac{XY}{k} \leqslant X^2 + \frac{X^2+Y^2}{2k} = x^2 + \frac{x^2+k^2y^2}{2k} = \frac{(2k+1)x^2+k^2y^2}{2k}$$

选取 k，使得 $2k+1 = k^2$，即 $k = 1+\sqrt{2}$，则

$$x(x+y) \leqslant \frac{k^2(x^2+y^2)}{2k} = \frac{k}{2}$$

对 $x = ky, X = Y$，不等式即为等式，且 $x > y$，所以极大值为 $k/2 = (1+\sqrt{2})/2$．

解法 3　利用拉格朗日乘数法，求 $x(x+y)$ 在条件 $x^2+y^2 = 1$ 下的极大值．于是有

$$2x + y = \lambda\cdot 2x, x = \lambda\cdot 2y, x^2+y^2 = 1$$

在第一个方程的两边乘 y，在第二个方程两边乘 x 可得

$$x + y = x\sqrt{2},因为 x,y \geqslant 0$$

所以
$$y = x(\sqrt{2} - 1) < x$$

由 $x^2 + y^2 = 1$,可得

$$x^2 = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$x^2(x + y)^2 = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} \cdot 2x^2 = \frac{2}{(4 - 2\sqrt{2})^2}$$

$$x(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

解法 4 假设 A 是 $x(x + y)$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 之下的极大值,那么双曲线 $x(x + y) = A$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切.双曲线的渐近线是直线 $x = 0$ 和 $x + y = 0$,所以直线 $y = (\tan(\pi/8))x$ 是圆和双曲线的对称轴,且经过切点,于是

$$y = \sin(\pi/8), x = \cos(\pi/8)$$

从而 $x(x + y) = \cos^2(\pi/8) + \sin(\pi/8)\cos(\pi/8) =$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos(\pi/4)) + \frac{1}{2}\sin(\pi/4) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

A - 2 设 C_1 和 C_2 是半径分别为 1 和 3,圆心相距 10 的两个圆周.求出 C_1 上所有点与 C_2 上所有点的连线的中点的轨迹.

解 设 O_1, O_2 分别是 C_1 和 C_2 的中心,O 是连线 O_1O_2 的中点,则所求之集是中心在 O 处,内半径为 1,外半径为 2 的闭圆环.

为此,设 M 是线段 XY 的中点,X, Y 分别是圆 C_1 和 C_2 上的点.则有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2Y}) =$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{O_2Y})(因为 \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{0})$$

而 $\overrightarrow{O_1X}$ 可为长度为 1 的所有向量,$\overrightarrow{O_2Y}$ 可取长度为 3 的所有向量.所以

$$3 - 1 \leqslant |\overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{O_2Y}| \leqslant 3 + 1(三角不等式)$$

很容易看出长度在 2 和 4 之间的任何向量都可以表为长度为 1 的向量与长度为 3 的向量之和(你可以用余弦定律去证明这一点),所以 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{O_2Y})$ 可以是长度介于 1 和 2 之间的任何向量,结论得证.

A - 3　假设 20 名学生中的每一名学生可从提供的六门课程中选学一门至六门,也可以一门都不选.试判断下列命题是否正确:存在 5 名学生和二门课程,使得这 5 名学生都选了这两门课,或者都没有选.

解　答案为"否".不一定会出现这 5 个学生.假设 20 个学生都选三门课,而且选法都不完全一样,因为 $20 = \binom{6}{3}$,所以这是可能的.那么对任何两门课程,恰有 4 个学生选(他们选的第 3 门课都不同,$4 = 6 - 2$ 门课程中的一门).所以任何两门课程没有 5 个学生同时选.同样地,对任何两门课程,恰有 4 个学生没有选取这两门课,而没有 5 名学生同时不选两门课.

A - 4　设 S 是有序三元数组 (a,b,c) 之集合,其中 a,b,c 是有限集 A 中的互不相同的元素.假设:

(1) $(a,b,c) \in S$ 当且仅当 $(b,c,a) \in S$;

(2) $(a,b,c) \in S$ 当且仅当 $(c,b,a) \notin S$;

(3) (a,b,c) 和 (c,d,a) 都属于 S 当且仅当 (b,c,d) 和 (d,a,b) 都属于 S.

证明:存在一对一的函数 $g:A \to R$,使得如果 $g(a) < g(b) < g(c)$,则有 $(a,b,c) \in S$.

解　凭直觉,可把 A 看作是一个圆的子集,而把 S 看作是按反时针方向的三元数组之集.为了获得一个线性次序,必须选取一个起始点.固定 $a_0 \in A$,在 A 上定义并系"<"如下:

i $\forall b \neq a_0, a_0 < b$.

ii 如果 a_0, b, c 互不相同,则 $b < c$ 当且仅当

$$(a_0,b,c) \in S$$

由 i 和 ii 可知,对任何 $b \neq c$,要么 $b < c$,要么 $c < b$,而且不可能两者都成立.由(1)和(3),$b < c, c < d$ 可得 $b < d$.这样"<"赋予了 A 一个有序结构.定义 $g(a) = |\{b \in A \mid b < a\}|$,我们看到 $g(a) < g(b) < g(c)$ 可推出 $a < b$ 和 $b < c$;如果 $a = a_0$,由定义可知 $(a,b,c) \in S$.否则 $(a_0,a,b) \in S, (a_0,b,c) \in S$.结果可由(1)和(3)导出.

A－5　令 P 是大于3的素数，$k=[2p/3]$，证明：二项式系数的和

$$\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{k}$$

能被 p^2 整除.（例如，$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=7+21+35+35=2\cdot 7^2$）

解　每个二项式系数能被 p 整除（因为 p 整除 $p!/(r!(p-r)!)$ 的分子，而不整除分母），所以我们希望证明

$$1+\frac{p-1}{2}+\frac{(p-1)(p-2)}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{(p-1)\cdots(p-k+1)}{2\cdot 3\cdot k}$$

能被 p 整除. 这些项全是整数，我们把这个和式表达成一些分式之和，分式的分子是 p 的倍数，分母与 p 是互素的，这个和为

$$\frac{pc_1}{1!}+\frac{pc_2}{2!}+\cdots+\frac{pc_k}{k!}+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k})$$

其中 c_i 是整数，当 $p=6q+1,k=4q$ 时，最后的括号等于

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4q}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4q})=$$

$$\frac{1}{2q+1}+\frac{1}{2q+2}+\cdots+\frac{1}{4q}=$$

$$(\frac{1}{2q+1}+\frac{1}{4q})+(\frac{1}{2q+2}+\frac{1}{4q-1})+\cdots+$$

$$(\frac{1}{2q+q}+\frac{1}{4q-(q-1)})=$$

$$\frac{p}{(2q+1)4q}+\frac{p}{(2q+2)(4q-1)}+\cdots+\frac{p}{3q(3q+1)}$$

当 $p=6q+5,k=4q+3$ 时，上式为

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4q+3}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4q+2})=$$

$$\frac{1}{2q+2}+\frac{1}{2q+3}+\cdots+\frac{1}{4q+3}=$$

$$(\frac{1}{2q+2}+\frac{1}{4q+3})+(\frac{1}{2q+3}+\frac{1}{4q+2})+\cdots+$$

$$(\frac{1}{2q+q+2}+\frac{1}{4q+(3-q)})=$$

$$\frac{p}{(2q+2)(4q+3)}+\frac{p}{(2q+3)(4q+2)}+\cdots+$$

$$\frac{p}{(3q+2)(3q+3)}$$

A－6　令 $C \geqslant 0$ 为给定的常数，完全描述并证明连续函数之集 $\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(x)=f(xa^2+c), \forall x\in\mathbf{R}\}$.

解　首先注意到 $f(x)=f(x^2+c)=f(-x)$，所以 f 是偶函数. 相反地，任何连续函数的偶延拓满足以上函数方程只要原来的函数满足. 所以可以限制到 $x\geqslant 0$ 的情形. 分两种情况来讨论.

i $0\leqslant c\leqslant 1/4$.

此时，$x^2-x+c=0$ 有两个正根，$a=(1-\sqrt{1-4c})/2$ 和 $b=(1+\sqrt{1-4c})/2$. 如果 $0\leqslant x_0<b$ 且定义 $x_{n+1}=x_n^2+c$，x^2+c 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性意味着 $x_0,x_1,\cdots$ 是单调的（对 $0<x_0<a$ 增的，对 $a<x_0<b$ 减的）和有界的，所以收敛，而且收敛于 a，因为极限必须满足 $L=L^2+c$. 因为

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(a)$$

则对所有的 x，$0\leqslant x\leqslant b$，都有 $f(x)=f(a)$.

如果 $x_0>b$，$\sqrt{x-c}$ 的单调性保证 $x_0>\sqrt{x_0-c}>b$，所以可递推地定义：$x_{n+1}=\sqrt{x_n-c}$，同样，数列 (x_n) 是单调有界的，所以它也有极限，而且极限必是 b，则

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(b).$$

因为 f 的值域是有限的，而且 f 是连续的，所以它是常值的.

ii $c>1/4$.

现在 $x\to x^2+c$ 没有实的不动点. 令 $t_0=0$，$t_{n+1}=t_n^2+c$，那么数列 (t_i) 是单调的，所以如果它不趋向于无穷，它只能收敛于一个（不存在的）不动点. 所以在某个区间 $[t_n,t_{n+1}]$ 的每个 $x\geqslant 0$ 也是如此.

设 g 是区间 $[0,c]$ 上的任何连续函数，$g(c)=g(0)$，定义 $\phi(x)=\sqrt{x-c}$，且

$$f(x)=\begin{cases} g(x), x\in[0,c]=[t_0,t_1] \\ g(\phi(x)), x\in[c,c^2+c]=[t_1,t_2] \\ g(\phi(\phi(x))), x\in[t_2,t_3] \\ \text{更一般地} \\ g(\phi(\phi(\cdots(\phi(x))\cdots))), x\in[t_n,t_{n+1}] \end{cases}$$

由构造，$f(x)$ 满足需要的函数方程，除点 t_i 外，连续性是明显的，而在 t_i 点，连续性可由 $g(c)=g(0)$ 导出，相反地，每个函数 $f(x)$ 由它在 $[0,c)$ 上的值决定.

B－1 如果一个集合的基数是它的一个元素，则称这个集合为“自私集”(Selfishset)．试求出集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有极小自私子集合的数目，此处极小是指它不包含真自私子集．

解 基数是极小自私集的最小的成员，否则就会有一个真的自私子集．但是没有其它限制，所以它们的数目为

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots$$

由归纳，它是第n个斐波那契数F_n，这里$F_1=F_2=1,F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$．

B－2 证明：对每个正整数n，都有

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}}<1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)<\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

解 设M是原式“中间部分”积的(自然)对数

$$M=\ln(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1))=\ln3+\ln5+\cdots+\ln(2n-1)$$

如果取这个量的两倍，则可把它解释为$\ln x$的定积分的黎曼和，所以(利用(1)分点$3,5,7,\cdots,2n+1$和左端点，以及(2)分点$1,3,5,\cdots,2n-1$和右端点)得到估计式

$$2M<\int_3^{2n+1}\ln x\mathrm{d}x$$

及

$$2M>\int_1^{2n-1}\ln x\mathrm{d}x$$

所以有

$$\int_1^{2n-1}\ln x\mathrm{d}x<2M<\int_3^{2n+1}\ln x\mathrm{d}x$$

$$[x\ln x-x]_1^{2n-1}<2M<[x\ln x-x]_3^{2n+1}$$

$$(2n-1)\ln(2n-1)-(2n-1)+1<2M<$$
$$(2n+1)\ln(2n+1)-(2n+1)-(3\ln3-3)$$

所以当然有

$$(2n-1)\ln(2n-1)-(2n-1)<2M<$$
$$(2n+1)\ln(2n+1)-(2n+1)$$

$$\frac{2n-1}{2}\ln\left(\frac{2n-1}{e}\right)<M<\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{2n+1}{e}\right)$$

取指数，即得结果．

B－3 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$,求出关于$n(n\geqslant 2)$的函数

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$$

的最大的可能值.

解 问题等价于对n个珠子形成的链进行标号$1,2,\cdots,n$,并求出所有两个相连珠子的标号的乘积之和的最大值.假设对某个$k<n$,标号为1到k的珠子之集形成一个单个连通链,但标号为$k+1$的珠子与此链的任何珠子不相邻.那么必定存在另一个连通链,它包含标号为$1,\cdots,k$的所有珠子,而不包含$k+1$,但它的一端与$k+1$相邻,另一端与$1,\cdots,k$中的某一个相邻.切开这个链,并使之反向,则得到一个乘积之和比原来的要大的新链,这样$k+1$必定与1至k的某个相邻.事实上,它与链的两个端口中数值上较小的相邻,如果不是这样,又可以割开含有$1,\cdots,k$的链并反向而得到乘积之和更大的链.对k用归纳法,可知所要求的链为$\cdots,7,5,3,1,2,4,6,8,\cdots$,计算可得答案为$(2n^3+3n^2-11n+18)/6$.

B－4 对任何方阵$\boldsymbol{A}$按通常的幂级数定义$\sin\boldsymbol{A}$如下

$$\sin\boldsymbol{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\boldsymbol{A}^{2n+1}$$

证明或反证:存在一个2×2实矩阵$\boldsymbol{A}$,使得

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

解 我们将证明不存在这样的矩阵$\boldsymbol{A}$.首先注意到对任何可逆矩阵$\boldsymbol{P}$及任何同阶的方阵$\boldsymbol{B}$,都有

$$\begin{aligned}\sin(\boldsymbol{PBP}^{-1})=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\boldsymbol{PBP}^{-1})^{2n+1}=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\boldsymbol{PB}^{2n+1}\boldsymbol{P}^{-1}=\\&\boldsymbol{P}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\boldsymbol{B}^{2n+1}\Big)\boldsymbol{P}^{-1}=\\&\boldsymbol{P}(\sin\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

这样相似矩阵的正弦也是相似的.

而任何2×2实矩阵$\boldsymbol{A}$或者相似于一个实(或复)对角阵

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,或者相似于一个实的三角阵$\begin{pmatrix}\lambda & c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$(事实上,可取 $c=1$). 所以 $\sin A$ 要么相似于 $\sin\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,要么相似于 $\sin\begin{pmatrix}\lambda & c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.但 $\sin\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$是一个对角阵,因为$\begin{pmatrix}\lambda_1 & c\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$的所有幂是对角的,而没有对角阵与$\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$相似,因为后者不可对角化.所以如果 $\sin \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,则必存在实数 λ 和 c,使得$\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$相似于 $\sin\begin{pmatrix}\lambda & c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\lambda & c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$,计算 $\sin u$ 如下:$\boldsymbol{U}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda c\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{U}^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 c\\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$,…,由归纳法,可知 $\boldsymbol{U}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}c\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$,所以

$$\sin \boldsymbol{U}=\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\begin{pmatrix}\lambda^{2n+1} & (2n+1)\lambda^{2n}c\\ 0 & \lambda^{2n+1}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\sum\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum\frac{(-1)^n\lambda^{2n}}{(2n)!}\\ 0 & \sum\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\sin\lambda & c\cos\lambda\\ 0 & \sin\lambda\end{pmatrix}$$

因为这个矩阵相似于$\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,所以其二重特征值 $\sin\lambda$ 必为1,这样 $\cos\lambda=0$,所以 $\sin U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,这与矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\,996\\ 0 & 1\end{pmatrix}$是不相似的,得出矛盾.

B-5　令 S 为由符号 X 和 O 构成的一个有限的符号串,记 $\triangle(S)$ 为串 S 中符号 X 的个数减去 O 的个数,例如 $\triangle(XOOXOOX)=-1$.称串 S 是平衡的,是指 S 的每个(连接不断的符号)子串 T 满足 $-2\leqslant\triangle(T)\leqslant 2$.这样,$XOOXOOX$ 不是平衡的,因为它包含有子串 $OOXOO$,试求出长度为 n 的平衡串的数目.

解　平衡串中字母 X 和 O 要么交替出现,要么同样字母连续出现最多两个. 而这种双字母也是交替出现的:

$\cdots XX\cdots OO\cdots XX\cdots$,而双字母字间的单字母的个数为偶数(也可为 O).设 b_n 是长度为 n 的平衡串的数目,下面将证明

$$b_{n+2}=2b_n+2$$

即
$$b_{n+2}+2=2(b_n+2)$$

(例如经计算有:$X,0,b_1=2;XX,XO,OX,OO,b_2=4;XXO,XOX,XOO,OXX,OXO,OOX,b_3=6;XXOX,XXOO,XOXX,XOXO,XOOX,OXXO,OXOX,OXOO,OOXX,OOXO,b_4=10$;这样递推可得 $b_{2n}=3\cdot 2^n-2,b_{2n-1}=2^{n+1}-2$).

设 x_n,y_n,z_n 分别表示长度为n,结尾分别为 XX,结尾为 XO 而最后一个双字母为 XX,结尾为 XO 而最后一个双字母为 OO 的平衡串的数目.这样 x_n,y_n,z_n 也分别表示长度为n,结尾为 OO,结尾为 OX 而最后一个双字母为OO,结尾为 OX 而最后一个双字母为 XX 的平衡串的数目(我们计算纯交替串 $XOX\cdots OX$ 和 $OXO\cdots XO$ 两次,一次算在 y_n 中,另一次算在 z_n 中),所以

$$b_n=2x_n+2y_n+2z_n-2$$

或者
$$b_n+2=2(x_n+y_n+z_n)$$

我们能够用下列方式由长度为 n 的平衡串得到长度为 $n+2$ 的平衡串:

i $\cdots XX$;加上 OO 或 OX,没有其它类型;$(2x_n)$.

ii $\cdots XO$;而最后一个双字母串为 XX;此时加上 OX 或 XO;没有其它类型;$(2y_n)$.

iii XO;而最后的双字母串为 OO;此时加上 XX 或XO,没有别的情形;$(2z_n)$.

类似地,交换 X 和 O 的全部位置.这样有

$$b_{n+2}+2=4(x_n+y_n+z_n)=2(b_n+2)$$

B-6 设$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$是一个凸多边形的顶点,而且原点在其内部.证明:存在正实数 x 和 y,使得
$$(a_1,b_1)x^{a_1}y^{b_1}+(a_2,b_2)x^{a_2}y^{b_2}+\cdots+(a_n,b_n)x^{a_n}y^{b_n}=(0,0)$$

解 设 $f(\boldsymbol{v})=\sum_i \mathrm{e}^{(a_i,b_i)\cdot \boldsymbol{v}}$.如果 $\nabla f(x_0,y_0)=\boldsymbol{0}$,则$(\mathrm{e}^{x_0},\mathrm{e}^{y_0})$是题目中向量方程的解.因为 ∇f 是一个连续向量场,要证明它有一个零点,只需要寻找一个简单的闭的轨道,使得 ∇f 在其上有非零的旋转数.我们断言,对任何包括原点在内的充分大的逆时针方向的圆周都满足.实际上,对某个 $r>0$

$$\max_i\{\boldsymbol{v}\cdot(a_i,b_i)\}\geqslant r\|\boldsymbol{v}\|$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v}) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{(a_i,b_i)\cdot\boldsymbol{v}}((a_i,b_i)\cdot\boldsymbol{v})\geqslant\\ &r\|\boldsymbol{v}\|\mathrm{e}^{r\|\boldsymbol{v}\|}+(n-1)\inf_x x\mathrm{e}^x=\\ &r\|\boldsymbol{v}\|\mathrm{e}^{r\|\boldsymbol{v}\|}-(n-1)/\mathrm{e}\end{aligned}$$

因为 $\|\boldsymbol{v}\| = R \gg 0$,所以 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v}) > 0$,这意味着 $\nabla f(\boldsymbol{v})$ 沿半径为 R 的圆周的旋转数为 1.

第 58 届美国大学生数学竞赛

A－1　一个矩形 $HOMF$，边长 $HO=11$，$OM=5$．$\triangle ABC$ 的高线的交点为 H，O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，M 是线段 BC 的中点，F 是由 A 引出的垂线的垂足．问 BC 的长为多少？



图 1

解　BC 的长度为 28．众所周知，$\triangle ABC$ 的重心 H，外心 O 及形心 G 共线，而且 $HG=2GO$．这样 MG 为中线而且与 FH 相交于顶点 A．由相似三角形可知 $AH=2OM=10$，另外，9 点圆的圆心 N 是 HO 的中点；这个圆经过 M 而且与 FH 交于 P，其中 P 是 HA 的中点．由于

$$OA^2=OH^2+HA^2=11^2+10^2=221=OB^2=OC^2$$

所以

$$BM^2=OB^2-OM^2=221-25=196,BM=14,BC=28$$

A－2　n 个选手 $1,2,3,\cdots,n$ 依次围坐在一张圆形桌子边玩游戏，每个选手各有一枚硬币．游戏规则是选手 1 传一枚硬币给选手 2，然后选手 2 传 2 枚硬币给选手 3，选手 3 再传一枚硬币给选手 4，选手 4 传两枚硬币给选手 5，如此等等．选手们交替地传一枚或两枚硬币给下一个选手，不过是注意这里的下一个选手是指手里仍握有硬币的选手，一旦某个选手没有了硬币，他必须离桌出局．请找出所有 n 的集合，使得某个选手最后拥有所有 n 个硬币而游戏中止？

解法 1　如果 $n=2^s+1$，$s=0,1,2$，那么选手 2^s+1 将拥有 2^s+1 枚硬币，从而游戏中止．

对 $s=0,1,2$，很容易验证上述结论：$1,1\to0,2$；$1,1,1\to0,2,1\to0,0,3$ 以及 $1,1,1,1,1\to0,2,1,1,1\to0,0,3,1,1\to0,0,2,2,1\to0,0,2,0,3\to0,0,3,0,2\to0,0,1,0,4\to0,0,2,0,3\to0,0,0,0,5$．

对选手们重新标号为 $0,1,2,\cdots,2^s$．那么经过第一轮后，奇数

号选手都没有了硬币,偶数号各有2枚,当然0号选手除外,他一枚也没有,而选手 2^s 有3枚,他给2号选手一枚.再过一轮,不能被4整除的偶数号选手各有一枚硬币,而号码是4的倍数的选手各有3枚硬币,除开 2^s 号例外,他有4枚,但他立马要传一枚给2号选手.又再经过一轮,不能被4除尽的偶数号选手的硬币没有了,而剩下号码是4的倍数的选手各有4枚硬币,但 2^s 号选手除外,他有5枚,他要立即给4号选手一枚硬币.

接下来的四轮将把序列 $4,4,4,\cdots,4,5$ 改变成 $3,5,3,5,\cdots,3,6$,然后改为 $2,6,2,6,\cdots,2,7$ 然后为 $1,7,1,7,\cdots,1,8$ 最后为 $0,8,0,8,\cdots,0,9$.

经过 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}$ 轮后,只有号码为 2^k 的倍数的选手拥有硬币,除开 2^s 是选手拥有 2^k+1 枚外,其余选手都拥有 2^k 枚.经过 2^s-1 轮后,只有 2^s 号(原来为 2^s+1 号)选手拥有硬币.

解法2 如果 $n=2^s+2, s=1,2,3,\cdots$,则3号选手将最终拥有 2^s+2 枚硬币而游戏结束.

引理1:如果游戏开始时有 $2N+2$ 个选手,经过一轮后(即每个选手都传了一次硬币后),恰有 N 个选手留下来.3号选手从 $2N+2$ 号选手那里得到2枚硬币从而拥有4枚,而所有其他选手各有2枚.

引理1的证明:1号和2号选手在他们第一次传递硬币后就出局.比3大的奇数号选手得到2枚硬币而拿出1枚,纯得1枚,于是拥有2枚硬币.比2大的偶数号选手收到1枚而拿出去两枚,所以传递硬币后就要出局.选手3从 $2N+2$ 号选手那里收到2枚,所以一轮后拥有4枚,交出1枚硬币而开始下一轮游戏.

引理2:假设在开始游戏时有 $2N$ 个选手,并且假定1号选手有 $a+2$ 枚硬币,偶数是选手有 b 枚硬币,$b\leqslant a$,大于1的奇数号选手有1枚硬币.一轮后,奇数号选手各增加了1枚,而偶数号选手少了1枚,而1号选手从 $2N$ 号选手那里得到2枚硬币.结果经过 b 轮,只有 N 个选手留了下来;1号选手拥有 $a+b+2$ 枚硬币,而其他选手各有 $a+b$ 枚硬币.

引理2的证明:奇数号选手获得2枚硬币而付出1枚,净增1枚,偶数号选手获得1枚而付出2枚,净丢1枚.

所以如果开始时有 2^s+2 名选手,一轮后 2^{s-1} 名选手留下来;他们之中,3号选手有4枚硬币而所有其他选手拥有2枚(据引理1).再经过两轮,3号选手有6枚硬币,而其余 2^{s-2} 名选手有4枚(引理2).再过下一步(4轮后),3号选手有10枚硬币而留下的其余 2^{s-3} 名选手各有8枚.每一步后,游戏的人数减半,最后,3号选手将拥有所有硬币.

A－3　计算

$$\int_0^{\infty}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)\cdot$$
$$\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

解法1　被积函数乘积中的第一部分为 $x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 且对任何 $x\geqslant 0$,其值都大于等于0,所以由单调收敛定理,所求积分等于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{2^{2k}k!^2}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x^{2k+1}\mathrm{e}^{-x^2/2}}{2^{2k}k!^2}\mathrm{d}x$$

由分部积分法,有

$$\int_0^{\infty}x^{2k+1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=2k\int_0^{\infty}x^{2k-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

对 k 用递推法,有

$$\int_0^{\infty}x^{2k+1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=2^kk!\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=2^kk!$$

所以所求积分值为

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2^kk!)^{-1}=\sqrt{\mathrm{e}}$$

解法2　令 $F(t)=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}J_0(tx)\mathrm{d}x$,其中 $J_0(x)$ 是Bessal方程 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ 的解,它由下式给出

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots$$

由分部积分法,有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}J'_0(tx)\mathrm{d}x=t^{-1}(F(t)-1)$$

等式两边对 t 求导,得

$$\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}J''_0(tx)\mathrm{d}x=-t^{-2}(F(t)-1)+t^{-1}F^1(t)$$

由定义,J_0 满足微分方程 $J''_0(tx)=-(tx)^{-1}J'_0(tx)-J_0(tx)$,所以

$$-t^{-2}(F(t)-1)+t^{-1}F'(t)=-t^{-1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}J_0(tx)\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}J_0(tx)\mathrm{d}x=$$
$$-t^{-2}(F(t)-1)-F(t)$$

于是,$F'(t)=-tF(t)$,用分离变量法可得 $F(t)=C\mathrm{e}^{-t^2/2}$,而

$$C = F(0) = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2}J_0(0)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1$$

所以 $F(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.令 $t = i$,则有

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right)\mathrm{d}x = F(i) = \sqrt{\mathrm{e}}$$

解法3 记所求积分为 I,作代换 $u = x^2/2, \mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$,则有

$$\begin{aligned} I = &\int_0^\infty \left(1 - \frac{2u}{2} + \frac{(2u)^2}{2\cdot 4} - \frac{(2u)^3}{2\cdot 4\cdot 6} \mp \cdots\right) \times \\ &\left(1 + \frac{2u}{2} + \frac{(2u)^2}{2^2\cdot 4^2} + \frac{(2u)^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right)\mathrm{d}u = \\ &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\left(1 + \frac{(u/2)}{1!^2} + \frac{(u/2)^2}{2!^2} + \frac{(u/2)^2}{3!^2} + \cdots\right)\mathrm{d}u = \\ &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}F(u/2)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

其中 $F(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{u^n}{n!^2}$,用 $2u$ 代替 u,可得 $I = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2u}F(u)\mathrm{d}u$,这促使我们考虑 Laplace 变换 $G(s) = L\{F\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}F(u)\mathrm{d}u$.于是 $I = 2G(2)$.通过逐项微分很容易验证 $F(u)$ 满足微分方程 $uF''(u) + F'(u) - F(u) = 0$,且具有初始条件 $F(0) = F'(0) = 0$.事实上,$F(u) = I_0(2\sqrt{u}) = J_0(2i\sqrt{u})$(标准的 Bessel 函数).应用 Laplace 变换,可以利用熟知的关系 $L\{F^1\} = -F(0) + sG(s)$ 及 $L\{uF\} = -G'(s)$.于是得到方程 $S^2G'(s) + (s+1)G(s) = 0$.这个方程是一阶分离变量的,解后可得 $G(s) = cs^{-1}\mathrm{e}^{1/s}$,$C$ 为某个常数.为了确定 C,考虑 $\lim\limits_{s\to\infty} sG(s) = c$,作代换,由标准的收敛定理,可得

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} sG(s) = &\lim_{s\to\infty} s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}F(u)\mathrm{d}u = \\ &\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v}F(v/s)\mathrm{d}v = \\ &F(0)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v = 1 \end{aligned}$$

故有 $G(s) = s^{-1}\mathrm{e}^{1/s}$,于是 $I = 2G(2) = \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

A－4 设 G 是一个群,e 为其单位元,$\phi: G\to G$ 是一个映射,而且只要 $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$ 就有 $\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3)$.证明:在 G 中必有元素 a 使得 $\psi(x) = a\phi(x)$ 是同态.(即对 G 中任意两个元素 x,y,都有 $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$)

解 因为群同态把单位元映成单位元，$e = \psi(e) = a\phi(e)$，所以如果 ψ 是同态，那么 a 必定为 $(\phi(e))^{-1}$，定义 $\psi(x) = a\phi(x)$，其中 $a^{-1} = \phi(e)$，由 $exx^{-1} = e = xex^{-1} = eee$，我们的条件可推出

$$a^{-1}\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(x)a^{-1}\phi(x^{-1}) = a^{-3} \qquad ①$$

式①的前一个等式（相约后）表明 a^{-1}（和 a）对所有 x 都与 $\phi(x)$ 可交换．这与后一个等式合在一起说明 $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}a^{-2}$．再考虑到 $eee = e = xy(y^{-l}x^{-l})$，有

$$a^{-3} = \phi(x)\phi(y)\phi((xy)^{-1}) = \phi(x)\phi(y)(\phi(xy))^{-1}a^{-2}$$

所以
$$\phi(xy) = a\phi(x)\phi(y)$$

于是
$$\psi(xy) = a\phi(xy) = a^2\phi(x)\phi(y) = (a\phi(x))(a\phi(y)) = \psi(x)\psi(y)$$

A－5　设 N_n 表示所有满足 $1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n = 1$ 的 n 元正整数数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的数目．问 N_{10} 是偶数还是奇数？

解法 1　设 a_i 的 P_i 相等，其中 $P_1 \geqslant P_2 \geqslant P_3 \geqslant \cdots$ 及 $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = 10$ 是 10 的一个分解．例如 $P_1 = 10, P_2 = P_3 = \cdots = 0, a_1 = \cdots = a_{10} = a$，换句话说，$10/a = 1, a = 10$，于是 $(10,10,\cdots,10)$ 是一个解．类似地，$P_1 = q, P_2 = 1, 9/a + 1/b = 1$，$(a - g)(b - 1) = 9, a = 18, b = 2$ 或者 $a = 12, b = 4$；或者 $a = 10, b = 10$（已考虑过，这里假设 $a \neq b$）．所以有 10 个有序的十元数组 $(2,18,18,\cdots,18)$ 和 $(4,12,12,\cdots,12)$．一般地，如果任何 $P_i = 1$，那么任何有序的十元数组的个数为 10 的倍数，所以为偶数．现在

$$\binom{10}{2} = 45, \binom{10}{3} = 120, \binom{10}{4} = 210, \binom{10}{5} = 252, \cdots$$

所以我们仅需考虑所有部分均为 2（或 8）的 10 的分解．如果有 2 个或更多个部分为 2，则有序十元数目仍为偶数．如果 $P_1 = 8, P_2 = 2$，那么 $8/a + 2/b = 1, (a-8)(b-2) = 16, (a,b) = (24,3), (16,4), (12,6), (10,10)$（省掉），或 $(9,18)$，总共有 $4(45) = 180$ 种这种有序十元数组．N_{10} 是奇数，因为 $(10,10,\cdots,10)$ 是唯一一组不与其它数组配对的数组．

解法 2　设 $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_{10}) \mid 1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_{10} = 1\}$．置换群 S_{10} 作用在 S 上．$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 所属轨道元素的数目为 $(10!)/|G|$，其中 G 是保持 $(a_1, a_2, \cdots, a_{10})$ 不变的置换群的子群．这个数目是偶数，除非 $|G|$ 能被可整除 $10! = |S_{10}|$

的2的某次幂整数. 这样, G 包含 S_{10} 的一个2-Sylow子群. 而所有2-Sylow子群共轭, G 包含一个置换, 它是一个8-循环和一个2-循环(是阶为8的一个元素)之积. 所以重新排序后, $(a_1, a_2, \cdots, a_{10})$ 满足 $a_1 = \cdots = a_8, a_9 = a_{10}$. 稳定群为 $G \subsetneqq S_8 \times S_2$. 在这样的一个十元数组所属轨道的元素的数目为 $(10)!/(8!2!) = 45$, 假定 $a_9 \neq a_1$, 这个数是奇数. 如果 $a_9 = a_1$, 那么 $G \subsetneqq S_{10}$, $|S_{10}|/|G| = 1$. 这样 $|s|$ = 轨道大小的和 = 满足 $8/a + 2/b = 1$ 的 (a, b) 的数目. 很容易看出此方程的解为 $(a, b) = (9, 18), (10, 10), (12, 6), (16, 4), (24, 3)$, 这样 $N_{10} \equiv 5 \equiv 1 \pmod 2$.

解法3 **引理** 设 X 是一有限集, $\sigma: X \to X$ 为有不动点集 Y 的对合, 则 $|X| - |Y|$ 为偶数.

引理的证明 把 X 分解成如下轨道 $\langle\sigma\rangle \subsetneqq Z/2Z$, Y 可与一个元素的轨道集合等同, 所以 $X - Y$ 是2个元素集合的不相交并集.

现设 $X_{10} = \{(a_1, \cdots, a_{10}) \in N^{10} \mid \sum_{i=1}^{10} a_i^{-1} = 1\}$, 那么十个字母的对称群 S_{10} 通过置换坐标作用在 X_{10} 上, 对对换 $(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)$ 和 $(9,10)$ 依次应用引理, 可得 $|X_{10}| = \{(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9) \in N^5 \mid 1/a_1 + 1/a_3 + 1/a_5 + 1/a_7 + 1/a_9 = 1/2\}$. 现对 $(1,3)$ 和 $(5,7)$ 应用引理, 有

$$|x_{10}| = \{(a, b) \in N^2 \mid 8/a + 2/b = 1\}$$

方程 $8/a + 2/b = 1$ 可重写为 $ab - 8b - 2a = 0$ 或 $(a - 8) \cdot (b - 2) = 16$, 这样 (a, b) 属于集合 $\{(9, 18), (10, 10), (12, 6), (16, 4), (24, 3)\}$, 这样 $N_{10} = |X_{10}|$ 是奇数.

A-6 对正整数 n 和任何实数 C, 递推地定义 x_k, 其中 $x_0 = 0, x_1 = 1, k \geqslant 0$ 时有

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n - k)x_k}{k + 1}$$

固定 n, 然后取 C 的最大值使得 $x_{n+1} = 0$. 试用 n 和 k 来表示 $x_k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

解 设

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} z^k = \sum_{k=-1}^{\infty} x_{k+1} z^k$$

那么

$$zf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$$

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_{k+2}z^k$$

$$z^2f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)x_kz^k$$

逆推式 $(k+1)x_{k+2}-cx_{k+1}-(n-k)x_k$

等价于常微分方程

$$(1-z^2)f'(z)+((n-1)z-c)f(z)=0$$

通过部分分式法，可得

$$f(z)=(1+z)^{(n-1+c)/2}(1-z)^{(n-1-c)/2}$$

条件 $x_{n+1}=0$ 可得 $x_{n+2}=0$，对 r 用归纳法可知对所有 $r>0$，$x_{n+r}=0$，所以 f 是 $n-1$ 次多项式．明显地，只有当 $(n-1+c)/2$ 和 $(n-1-c)/2$ 都是非负整数时，即 $c\in\{-(n-1),-(n-3),\cdots,n-3,n-1\}$ 时，f 是多项式，C 的最大值为 $n-1$，对此 $f(z)=(1+z)^{n-1}$，即

$$x_{k+1}=\binom{n-1}{k},x_k=\binom{n-1}{k-1}$$

B－1 令 $\{x\}$ 表示实数 x 和与它最近的整数的距离，对每个正整数 n，计算

$$S_n=\sum_{m=1}^{6n-1}\min(\{\frac{m}{6n}\},\{\frac{m}{3n}\})$$

（这里，$\min(a,b)$ 表示 a 和 b 中的较小者）

解法1 设 $M(m)=\min(\{\frac{m}{6n}\},\{\frac{m}{3n}\})$．因为 $1\leqslant m\leqslant 2n$，$0<\frac{m}{6n}<\frac{m}{3n}\leqslant\frac{2}{3}$，所以

$$M(m)=\frac{m}{6n}$$

因为 $2n+1\leqslant m\leqslant 3n$，$\frac{1}{3}<\frac{m}{6n}\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $\frac{2}{3}<\frac{m}{3n}\leqslant 1$，所以

$$M(m)=1-\frac{m}{3n}$$

因为 $3n+1\leqslant m\leqslant 4n-1$，$\frac{1}{2}<\frac{m}{6n}<\frac{2}{3}$ 且 $1<\frac{m}{3n}<\frac{3}{4}$，所以

$$M(m)=\frac{m}{3n}-1$$

因为 $4n\leqslant m\leqslant 6n-1$，$\frac{2}{3}\leqslant\frac{m}{6n}<1$ 且 $\frac{4}{3}\leqslant\frac{m}{3n}<2$ 且 $1-\frac{m}{6n}<2-\frac{m}{3n}$，所以

$$M(m)=1-\frac{m}{6n}$$

所以

$$s_n=\sum_{m=1}^{2n}\frac{m}{6n}+\sum_{m=2n+1}^{3n}(1-\frac{m}{3n})+\sum_{m=3n+1}^{4n-1}(\frac{m}{3n}-1)+\sum_{m=4n}^{6n-1}(1-\frac{m}{6n})=$$

$$\frac{2n(2n+1)}{6n\cdot 2}+n-\frac{n(5n+1)}{3n\cdot 2}+$$

$$\frac{(n-1)(7n)}{3n\cdot 2}-(n-1)+$$

$$2n-\frac{2n(10n-1)}{6n\cdot 2}=$$

$$\frac{1}{6}(2n+1+6n-5n-1+7n-7-$$

$$6n+6+12n-10n+1)=n$$

解法2 设 $\phi(x)=x-[x]$,那么如果 $\phi(x)<\phi(y)\leqslant 1/3$,则 $\{x\}\leqslant\{y\}$;如果 $\phi(x)>\phi(y)\geqslant 2/3$,则 $\{x\}>\{y\}$.如果 $\phi(x)$ 属于 $[1/3,2/3]$,而 $\phi(y)$ 不属于,则 $\{x\}>\{y\}$.

于是对 $0\leqslant x\leqslant 1/3$ 时 $\{x\}\leqslant\{2x\}$;$1/3\leqslant x\leqslant 2/3$ 时 $\{x\}\geqslant\{2x\}$;而当 $2/3\leqslant x\leqslant 1$ 时 $\{x\}\leqslant\{2x\}$.所以

$$s_n=\sum_{m=1}^{2n-1}\frac{m}{6n}+\sum_{m=2n}^{3n-1}(1-\frac{m}{3n})+\sum_{m=3n}^{4n-1}(\frac{m}{3n}-1)+\sum_{m=4n}^{6n-1}(1-\frac{m}{6n})=$$

$$\frac{2n(2n-1)}{12n}+n-\frac{n(5n-1)}{6n}+\frac{n(7n-1)}{6n}-n+2n-$$

$$\frac{n(10n-1)}{6n}=n$$

B－2 设 f 是二次可微的实值函数,且满足 $f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)$,其中对所有实数 x,$g(x)\geqslant 0$.证明:$|f(x)|$ 有界.

解 因为 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)f'(x)+f'(x)f''(x)\leqslant 0$,所以 $(f(x))^2+(f'(x))^2$ 有界,且上界为 $(f(0))^2+(f'(0))^2$.又因为 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)f'(x)+f'(x)f''(x)\leqslant 0$,所以 $(f(x))^2+(f'(x))^2$ 有界,且上界为 $(f(0))^2+(f'(0))^2$.这意谓着 $|f(x)|$ 有界.

B－3 对每个正整数 n,把和 $\sum\limits_{m=1}^{n}m^{-1}$ 写成 p_n/q_n 的形式,其中 p_n 和 q_n 是互素的正整数,试确定所有的 n,使得 5 不整除 q_n.

解 这样的 n 必定是从 1 到 4,从 20 到 24,100 到 104,或从 120 到 124.

设 S 是 5 不能整除 q_n 的 n 的集合,定义 $\rho(n)=[n/5]$ 且

$$t_n=\sum_{\substack{m=1\\5\nmid m}}^{n}\frac{1}{m}$$

这个和式只是对那些不能被 5 整除的 m 而言的.故 $s_n=t_n+s_{\rho(n)}/5$. t_n 的分母显然与 5 互素.因为对 $1\leqslant n\leqslant 4$, $s_n=t_n$,所以 1,2,3,4 属于 S.而对 $n\geqslant 5$, s_n 的分母与 5 互素当且仅当 $S_{\rho(n)}$ 的分母与 5 互素而且分子可被 5 整除.

S 中下一个最小的数 n 必须满足 $\rho(n)=1,2,3$ 或 4.而在 1,2,3,4 中只有 $S_4=25/12$ 有分子能被 5 整除.这样 5 中下一组最小成员上从 20 到 24.(所有 n, $\rho(n)=4$)

注意到 $\sum\limits_{l=1}^{4}(5k+l)^{-1}$ 有分子可被 25 整除,而对 $j=1,2,3$, $\sum\limits_{l=1}^{j}(5k+l)^{-1}$ 有分子与 5 互素.这样,在 20 到 24 中,只有 S_{20} 和 S_{24} 有分子可被 5 整除,因为 $S_5/5=5/12$ 以及 t_{20} 和 t_{24} 有分子可被 25 整除.这样从 100 到 124 以及从 120 到 124 都属于 S.对这些 n,因为

$$\rho(\rho(n))=4$$

$$S_n=t_n+\frac{S_{\rho(n)}}{5}=t_n+\frac{t_{\rho(n)}}{5}+\frac{S_{\rho(\rho(n))}}{25}=t_n+\frac{t_{\rho(n)}}{5}+\frac{1}{12}$$

因为 $\rho(n)=20$ 或 24,所以 $t_{\rho(n)}$ 有分子可被 25 整除.对 $1\leqslant l\leqslant 4$,注意到 $(5k+l)^{-1}+(5k+5-l)^{-1}$ 有分子可被 5 整除,所以我们只需考虑下组式子中哪些的分子要被 5 整除

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{12}\ \frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{12}\ \frac{1}{121}+\frac{1}{12}\ \frac{1}{121}+\frac{1}{122}+\frac{1}{12}$$

用 5 作模数,很容易验证所有这些都不满足.从而 $n=100$ 到 104 成从 120 到 124 都不能得到和 S_n 使其有分母被 5 整除,于是树形结束.

B-4 设 $a_{m,n}$ 为 $(1+x+x^2)^m$ 的展开式中 x^n 的系数,证明:对所有 $k\geqslant 0$,都有

$$0\leqslant\sum_{i=0}^{[2k/3]}(-1)^i a_{k-i,i}\leqslant 1$$

解法 1 问题中的和是下列式子中 $(-x)^k$ 的系数

$$(-x)^0(1+x+x^2)^0+(-x)(1+x+x^2)+\cdots+$$
$$(-x)^k(1+x+x^2)^k+\cdots=$$
$$\frac{1}{1-(-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n}-x^{4n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}((-x)^{4n}+(-x)^{4n+1})$$

解法2 我们约定当 $n>2m$ 或 $n<0$ 时，$a_{m,n}=0$. 所以我们的目的是证明对所有 $i\geqslant 0$，$s_k\equiv\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i a_{k-i}$，$i$ 在$\{0,1\}$之中. 对 $i=0,1,2$ 很容易验证，这是因为 $s_0=1,s_1=1,s_2=0$. 于是有

$$s_k-s_{k+1}+s_{k+2}=$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i a_{k-i,i}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j a_{k+1-j,j}+\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l a_{k+2-l,l}=$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i a_{k-i,i}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j+1} a_{k-j,j+1}+\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l a_{k-l,l+2}=$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i(a_{k-i,i}-a_{k-i,i+1}+a_{k-i},i+2)=$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i a_{k-i+1,i+2}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i a_{k+3-i,i}=S_{k+3}$$

对 k 用归纳法，有

$$S_k=\begin{cases}1 & ,\text{如果 } k\equiv 0 \text{ 或 } 1(\bmod 4)\\ 0 & ,\text{如果 } k\equiv 2 \text{ 或 } 3(\bmod 4)\end{cases}$$

B－5 证明：对任何 $n\geqslant 2$，都有

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n\equiv\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n-1,\bmod n$$

解 对每个整数 $n>0$ 都可唯一地表示为 $n=2^t m$，其中 m 是奇数.

引理 设 ϕ 为 Euler ϕ－函数，a 和 b 是整数，$a\geqslant b\geqslant t$，$a\equiv b(\bmod \phi(m))$，那么 $2^a\equiv 2^b(\bmod n)$.

引理的证明 因为 $t\leqslant a,b$，所以 2^a-2^b 能被 2^t 整除，由欧拉定理，$2^a\equiv 2^b(\bmod m)$. 因为 2^t 和 m 互素，所以 n 整除 2^a-2^b.

现设 $a_1=2,a_{k+1}=2^{a_k},k\geqslant 1$，因为 $2^{a_k}>a_k+1$，对 k 作归纳法，有 $a_{k-1}\geqslant k$. 因为 $k\geqslant 2$ 且 $n=2^t m\leqslant k$，所以

$$a_{k-1}\geqslant a_{k-2}\geqslant k-1\geqslant 2^t-1\geqslant t$$

所以 $\quad a_{k-2}\equiv a_{k-1}(\bmod \phi(m))\Rightarrow a_{k-1}\equiv a_k(\bmod n)$

因为 $\phi(m)\leqslant m-1\leqslant n-1$，所以对 k 用归纳法可得下列结论

$$a_{k-1}\equiv a_k(\bmod n),\ \forall\, n\leqslant k$$

B－6　图 1 中的 3－4－5 三角形的剖分有直径 5/2.

试找出把此三角形剖分成四部分的最小直径.(剖分的直径是指属于同一部分的任意两点距离的最小上界)

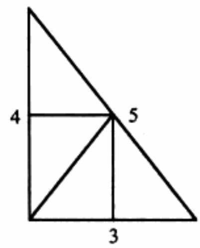


图 1

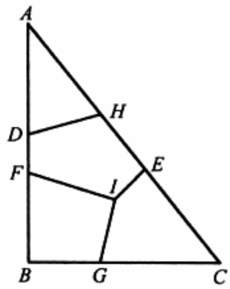


图 2

解　$d = 25/13$.如图 2 所示,在 AB,AC 上各取点 D,E 使得 $AD = DE = EC$(即 $= 25/13$).鸽巢原理保证 A,B,C,D,E 的任何两点必定在同一集合中,所以某个集合必定有直径至少为 25/13,这也就是 A,B,C,D,E 的任何两点的极小距离.另一方面,能找到点 F,G,H,I(例如,$BF = 20/13$,$CG = 25/13 = AH$,I 是 CD 的中点)使得 ADH,$BFIG$,$CEIG$ 和 $DFIEH$ 的直径都小于等于 25/13,则 $FG = \sqrt{596}/13$,$BI = CI = DI = \sqrt{562.5}/13$,$EG = \sqrt{500}/13$,$FE = 24/13$,$IH = \sqrt{362.5}/13$,$FH = \sqrt{369}/13$.

第 59 届美国大学生数学竞赛

A－1 一个直角圆锥的底半径为 1，高度为 3. 一个内接于此锥的正立方体有一个面包含在锥的底部. 这个正方体的边长是多少？

解 考察穿过正立方体的一个顶点和锥的轴的一个平面截口，如图 1 所示. 设 s 是正立方体的边长，线段 DE 是正立方体顶面的一条对角线应有长度 $\sqrt{2}s$. 根据 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的相似性，我们有 $DE/BC = AF/AG$，或者 $\sqrt{2}s/2 = (3-s)/3$，因此

$$s = \frac{6}{3\sqrt{2}+2} = \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}-6}{7}$$

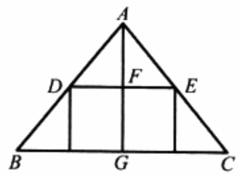


图 1

A－2 设 s 是单位圆周的任意一段整个位于第一象限的弧，A 是位于弧 s 下面和 x 轴上面的区域的面积，B 是位于 y 轴右侧和弧 s 左侧之间区域的面积. 证明：$A+B$ 只依赖于弧 s 的长度而不依赖于弧 s 的位置.

解 假设 s 的起始角和终止角分别是 α 和 β，其中角度是从正半水平轴向逆时针方向测量的.

$$A = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\beta}^{\alpha}\sqrt{1-\cos^2 u}(-\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta}\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

类似地 $$B = \int_{\sin\alpha}^{\sin\beta}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

因此 $$A+B = \int_{\alpha}^{\beta}(\sin^2 u+\cos^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}u = \beta-\alpha$$

A－3 设 f 是 x 轴上具有连续三阶导数的一个实函数，证明：存在一个点 a 使得

$$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\geqslant 0$$

解 假设 $f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x)<0$ 对所有的 x 成立. 根据连续性，f, f', f'', f''' 中的每一个都具有不变的符号. 必要时用

$f(-x)$，$-f(x)$ 或者 $-f(-x)$ 代替 $f(x)$，我们可以假设 $f(x)>0$ 和 $f'(x)>0$ 对一切 x 成立. 这样适当选择 $g=f$ 或者 $g=f'$，我们就可以得到一个满足 $g(x)>0$，$g'(x)>0$ 和 $g''(x)<0$ 对所有的 x 成立的函数 g. 因为 g 是严格上升而且下有界的，有一个常数 $C\geqslant 0$，使得当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to C^+$. 这一水平渐近性质迫使 g 在某些点 x 处是向上凹的，即 $g''(x)>0$，而与我们的假设矛盾.

确切地讲，固定 x_1，并令 $m=g'(x_1)>0$. 因为

$$\lim_{x_2\to-\infty}\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=0$$

存在一个 x_2，$x_2<x_1$，使得

$$0<\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{m}{2}$$

根据中值定理，存在一个严格位于 x_2 和 x_1 之间的 x_3 使得

$$g'(x_3)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{m}{2}$$

进而存在一个位于 x_3 和 x_1 之间的 x_4 使得

$$g''(x_4)=\frac{g'(x_1)-g'(x_3)}{x_1-x_3}>\frac{m-\frac{m}{2}}{x_1-x_3}>0$$

A－4　设 $A_1=0$ 和 $A_2=1$. 对 $n>2$，数 A_n 定义为把 A_{n-1}，A_{n-2} 的十进位展开式按从左到右的次序连接起来所得到的数. 例如，$A_3=A_2A_1=10$，$A_4=A_3A_2=101$，$A_5=A_4A_3=10110$，等等. 决定所有使得 11 能够整除 A_n 的 n.

解　当 n 比 6 的一个倍数多 1 时，A_n 可以被 11 整除.

我们知道一个数可以被 11 整除当且仅当它的各位数字的交错和等于零. 这样设 d_n 是 A_n 各位数字从左边开始的交错和，那么

$$d_n=d_{n-1}+(-1)^{r_{n-1}}d_{n-2}$$

其中 r_n 是 A_n 的位数的个数. 显然 $r_n=F_n$ 是第 n 个斐波那契数，而斐波那契数的奇偶性类似（$(-1)^{F_n}$）是：-1，-1，1，-1，-1，1，…. 这样计算 d_n 的规则是 $d_1=0$，$d_2=1$，$d_3=d_2-d_1=1$，$d_4=d_3+d_2=2$，$d_5=d_4-d_3=1$，$d_6=d_5-d_4=-1$，$d_7=d_6+d_5=0$，$d_8=d_7-d_6=1$ 等以这种规律重复.

A－5 设 J 是 $\mathbf{R}^2$ 中开圆盘的有限子族，其并包含了 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集 E. 证明：存在 J 的一个两两不交的子族 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 使得 $\bigcup_{j=1}^{n} 3D_j \supset E$. 这里，如果 D 是一个中心在 P 处半径为 r 的圆盘，那么 $3D$ 是个中心在 P 处半径为 $3r$ 的圆盘.

证明 设 D_1 是一个半径最大的圆盘. 选择一个与 D_1 不交，且具有最大半径的圆盘 D_2，归纳地继续进行，假设 $D_1, \cdots, D_{j-1}$ 已经选好. 选择一个与 $D_1, \cdots, D_{j-1}$ 不交，且具有最大半径的圆盘 D_j.

这一过程必将结束，产生一组两两不交的圆盘 $D_1, \cdots, D_n$. 我们断言 $\bigcup_{j=1}^{n} 3D_j \supset E$. 为了证明这一断言，只须证明 $\bigcup_{j=1}^{n} 3D_j \supset \bigcup_{D \in J} D$ 就够了.

设 $D \in J$，如果 D 是某一个选出来的圆盘 D_j，结论是显然的. 如果 D 不是选出来的圆盘，那么设 D_m 是序列中第一个和 D 有交的圆盘. 这样，根据我们选择 D_j 的方法，D_m 的半径至少同 D 的半径一样大. 于是三角不等式蕴涵着 $3D_m \supset D$.

A－6 用 A, B, C 表示 $\mathbf{R}^2$ 中具有整数坐标的三个不同点. 证明：如果 $(|AB|+|BC|)^2 < 8 \cdot [ABC] + 1$，那么 A, B, C 是一个正方形的三个顶点. 这里 $|XY|$ 是经段 XY 的长度而 $[ABC]$ 是 $\triangle ABC$ 的面积.

解 集 $\mathbf{Z}^2$ 绕它的任何一个点旋转 $90°$ 是不变的. 因此存在 $\mathbf{Z}^2$ 中的一个点 C' 满足 $|BC'| = |BA|$，BC' 垂直于 BA，而且相对于联结 A 和 B 的直线，C 和 C' 属于的同一个半平面. 如果 $C \neq C'$，那么 $|CC'| = s \geqslant 1$. 令 $r = |AB|$，通过旋转和平移坐标系统，我们可以假定 $B = (0,0)$，$A = (r,0)$，$C' = (0,r)$ 和 $C = (0,r) + s(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 θ 是从正半水平轴到直线 $C'C$ 的夹角. 这样

$$
\begin{aligned}
(|AB|+|BC|)^2 &= (r + \sqrt{s^2\cos^2\theta + (r + s\sin\theta)^2})^2 = \\
&2r^2 + s^2 + 2rs\sin\theta + \\
&2r\sqrt{s^2\cos^2\theta + (r + s\sin\theta)^2} \geqslant \\
&2r^2 + 1 + 2rs\sin\theta + 2r(r + s\sin\theta) = \\
&8\frac{r(r + s\sin\theta)}{2} + 1 = 8[ABC] + 1
\end{aligned}
$$

B－1　对 $x>0$,求 $\dfrac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})}$ 的最小值.

解法 1　设 $z=x+\dfrac{1}{x}$,那么

$$\frac{(x+1/x)^6-(x^6+1/x^6)-2}{(x+1/x)^3+(x^3+1/x^3)}=\frac{z^6-z^2(z^2-3)^2}{z^3+z(z^2-3)}=$$
$$z^3-z(z^2-3)=$$
$$3z=3(x+1/x)$$

注意到
$$x+1/x-2=(x-1/x)^2\geqslant 0$$
等号成立当且仅当 $x=1$,因此我们函数的最小值是 6.

解法 2　通过直接展开然后做多项式除法得

$$\frac{(x+1/x)^6-(x^6+1/x^6)-2}{(x+1/x)^3+(x^3+1/x^3)}=\frac{3}{x}\left(\frac{2x^8+5x^6+6x^4+5x^2+2}{2x^6+3x^4+3x^2+2}\right)=$$
$$\frac{3}{x}(x^2+1)=3(x+1/x)$$

依算术－几何值平均不等式

$$x+1/x\geqslant 2\sqrt{x(1/x)}=2$$

等号成立当且仅当 $x=1$.

B－2　给定满足 $0<b<a$ 的一个点 (a,b),确定一个这样的三角形的最小周长:以 (a,b) 为它的一个顶点,有一个顶点在 x 轴上,另一个顶点在直线 $y=x$ 上.你可以假定一个具有最小周长的三角形存在.

解　通过一次对 x 轴,一次对直线 $y=x$ 的两次反射,可以看到这样一个三角形的最短周长等于点 $(a,-b)$ 和 (b,a) 之间的距离,这个距离是 $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

B－3　设 H 是单位半球面 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,z\geqslant 0\}$,$C$ 是单位圆周 $\{(x,y,0)\mid x^2+y^2=1\}$,而 P 是 C 的内接正五边形.确定 H 位于 P 内部平面区域上方那一部分曲面的面积,并且 $A\sin\alpha+B\cos\beta$ 这种形式写出你的解答,其中 A,B,α 和 β 是实数.

解 注意到所求面积的两倍等于整个球面减掉5个球帽所留下的曲面面积,球帽由一条具有中心角$\frac{2\pi}{5}$的弦所张成.具有张角的球帽面积可以用球坐标计算.

$$\int_0^{\alpha/2}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 2\pi(1-\cos\frac{\alpha}{2})$$

这样,所求的面积是

$$\frac{1}{2}(4\pi - 5\cdot 2\pi(1-\cos\frac{\pi}{5})) = 5\pi\cos\frac{\pi}{5} - 3\pi$$

也就是说,$A=-3\pi, B=5\pi, \alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=-\frac{\pi}{5}$.

B-4 求加在正整数m和n上使得$\sum\limits_{i=0}^{mn-1}(-1)^{\lfloor i/m\rfloor+\lfloor i/n\rfloor}=0$的必要和充分条件.

解 充分必要条件为$\frac{mn}{(m,n)^2}$是偶数,其中(m,n)是最大公因子.事实上,如果$m=ac$和$n=bc$,那么$\lfloor i/ac\rfloor+\lfloor i/bc\rfloor$只依赖于$\lfloor i/c\rfloor$,因此

$$\sum_{i=0}^{abc^2-1}(-1)^{\lfloor i/ac\rfloor+\lfloor i/bc\rfloor} = c\sum_{i=0}^{abc-1}(-1)^{\lfloor i/a\rfloor+\lfloor i/b\rfloor} = \\ c\sum_{k=0}^{c-1}(-1)^{k(a+b)}\sum_{i=0}^{ab-1}(-1)^{\lfloor i/a\rfloor+\lfloor i/b\rfloor}$$

如果ab是奇数,那么$a+b$是偶数,因此$\sum\limits_{k=0}^{c-1}(-1)^{k(b+c)}=c$,而每一项等于$\pm1$的$ab$个项之和不会是零.反之,如果$a+b$是奇数,那么

$$\lfloor\frac{i}{a}\rfloor+\lfloor\frac{ab-1-i}{a}\rfloor+\lfloor\frac{i}{b}\rfloor+\lfloor\frac{ab-1-i}{b}\rfloor = \\ b-1+a-1\equiv 1\pmod 2$$

这样

$$\sum_{i=0}^{ab-1}(-1)^{\lfloor i/a\rfloor+\lfloor i/b\rfloor} = \sum_{i=0}^{ab/2-1}(-1)^{\lfloor i/a\rfloor+\lfloor i/b\rfloor} + \\ (-1)^{\lfloor ab-1-i/a\rfloor+\lfloor ab-1-i/b\rfloor} = 0$$

B-5 设N是具有1 998位,每一位都是1的十进位正整数,即$N=\underbrace{11111\cdots11}_{1\,998个1}$求$\sqrt{N}$小数点后的第一千位.

解 我们有

$$\sqrt{N}=\sqrt{\frac{10^{1\,998}-1}{9}}=\frac{10^{999}}{3}(1-10^{-1\,998})^{1/2}$$

带余项的泰勒定理蕴涵着

$$(1-10^{-1\,998})^{1/2}=1-\frac{10^{-1\,998}}{2}+\varepsilon,\varepsilon<\frac{10^{-3\,996}}{8}$$

这样，$10^{999}\sqrt{N}=\frac{10^{1\,998}-1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{10^{1\,998}\varepsilon}{3}$ 的小数点后第一位是1.

B－6　证明：对任何整数 a,b,c 存在一个正整数 n，使得 $\sqrt{n^3+an^2+bn+c}$ 不是一个整数.

解　令 $n=4m^2$，那么

$$n^3+an^2+bn+c=64m^6+16am^4+4bm^2+c=$$
$$(8m^3+am)^2+(4b-a^2)m^2+c$$

如果 $m\gg 0$，$|(4b-a^2)m^2+c|<8m^3+am$，因此只有当 $(4b-a^2)m+c=0$ 时，n^3+an^2+bn+c 才有可能是一个平方数.除非 $4b-a^2=c=0$，这只能对唯一的一个 m 值成立，而要真是 $4b-a^2=c=0$，n^3+an^2+bn+c 是一个平方数当且仅当 n 是一个平方数.

第60届美国大学生数学竞赛

A－1 找出多项式$f(x)$,$g(x)$和$h(x)$,如果它们存在,对所有的x满足

$$|f(x)|-|g(x)|+h(x)=\begin{cases}-1 & ,x<-1\\ 3x+2 & ,-1\leqslant x\leqslant 0\\ -2x+2 & ,x>0\end{cases}$$

解 假设f,g,h是实多项式.令S是函数集合$\pm f\pm g\pm h$,那S的4个函数中的3个是$-1,3x+2$和$-2x+2$.但是,任取S中的3个函数,有两个的和是$2h$,某两个的差是$2f$或$2g$.所以,f,g,h都是线性的.

f,g之一在$x=-1$会改变符号,另一个则在$x=0$处变号.我们可以假定对$x\leqslant -1,f(x)\geqslant 0$和$g(x)\geqslant 0$,于是

$$f(x)-g(x)+h(x)=-1$$

和

$$-f(x)+g(x)+h(x)=-2x+2$$

这样

$$h(x)=-x+\frac{1}{2}$$

如果$g(-1)=0$,由于$h(-1)=\frac{3}{2}$得到$f(-1)<0$,矛盾.所以$f(-1)=0,g(0)=0$,从而

$$f(x)-g(x)+h(x)=-1$$

$$-f(x)-g(x)+h(x)=3x+2$$

$$-f(x)+g(x)+h(x)=-2x+2$$

结果是 $f(x)=(-3/2)x-3/2,g(x)=-5x/2$

容易验证f,g,h满足所要求的条件.

A－2 令$p(x)$是多项式,对所有的x非负.证明:对某个k有多项式$f_1(x),\cdots,f_k(x)$,使得

$$p(x)=\sum_{j=1}^{k}(f_j(x))^2$$

解 多项式的复根是以复数共轭成对出现的.多项式p的实

根必须是重根，不然 p 不可能非负，所以我们可以写成

$$p(x)=(x-a_1)(x-\overline{a_1})\cdots(x-a_m)(x-\overline{a_m})$$

于是

$$p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)\cdot\overline{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)}=\alpha(x)\cdot\overline{\alpha(x)}$$

写成 $\alpha(x)=\mu(x)+\mathrm{i}\eta(x)$ 后，我们就有

$$p(x)=(\mu(x))^2+(\eta(x))^2$$

A - 3　考虑幂级数展开

$$\frac{1}{1-2x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

证明：对每个整数 $n\geqslant 0$，存在整数 m，使得

$$a_n^2+a_{n+1}^2=a_m$$

解　展开式乘以 $1-2x-x^2$ 后，我们有 $a_0=1,a_1-2a_0=0,a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0,n\geqslant 0$. 所以 $a_0=1,a_1=2$，以及 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n,n\geqslant 0$.

令 $v_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$，则递推关系等价于 $v_{n+1}=\boldsymbol{A}v_n$，此处 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$. 迭代得到

$$v_n=\boldsymbol{A}^nv_0=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{n+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

这里用了 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，所以

$$a_n^2+a_{n+1}^2=v_n^{\mathrm{T}}v_n=\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1\quad 0)\boldsymbol{A}^{2n+2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1,0)v_{2n+1}=a_{2n+2}$$

这里用了关系 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

A - 4　求级数和 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

解　二重级数是

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{m3^n}\left(\frac{1}{n3^m}-\frac{1}{n3^m+m3^n}\right)=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^m3^n}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n(n3^m+m3^n)}$$

上式的后一项正是将 m 和 n 对调后的 S.所以

$$2S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^m3^n}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2$$

利用

$$\sum_{m=0}^{\infty}mx^m=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{m=0}^{\infty}x^m\right)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

得到 $2S=(3/4)^2$,即 $S=9/32$.

A－5　证明:存在常数 C,使得对任何1 999次的多项式 $p(x)$ 有

$$|p(0)|\leqslant C\int_{-1}^{1}|p(x)|\,\mathrm{d}x$$

解　1 999次的多项式集合包含在所有次数不超过1 999次的多项式所组成的向量空间中,该向量空间是一个 2 000 维的实或复的向量空间.赋以通常的欧氏范数,在欧氏单位球面 $S_{2\,000}$ 上,我们考虑两个连续函数 $f(p)=|p(0)|$ 和 $g(p)=\int_{-1}^{1}|p(x)|\,\mathrm{d}x$,由于对凡 $p\in S_{2\,000}$,$g(p)\neq 0$,$f(p)/g(p)$ 是紧集合 $S_{2\,000}$ 上的连续函数,所以它在 $S_{2\,000}$ 上达到极大值 $C\cdot f$ 和 g 是正齐次的.C 就是我们所要求的.

A－6　序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的定义是:$a_1=1,a_2=2,a_3=24,n\geqslant 4$ 时

$$a_n=\frac{6a_{n-1}^2a_{n-3}-8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$$

证明:对凡 n,a_n 是 n 的整数倍.

解　令 $A_n=a_n/a_{n-1}$,那么

$$A_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{6a_{n-1}^2a_{n-3}-8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}}=$$

$$6\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}-8\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=6A_{n-1}-8A_{n-2}$$

这是一个线性递推关系,$A_2=2,A_3=12$,解是 $A_n=4^{n-1}-2^{n-1}$,$n\geqslant 4$,可以用数学归纳法加以验证(注意到2,4是 $x^2-6x+8=0$ 的根,很容易推导出这个表达式,A_n 可以表示成形如 $C_12^n+C_24^n$).所以所有的 A 和 a 非零.我们得到

$$a_n = a_1A_2A_3\cdots A_n = (4-2)(4^2-2^2)\cdots(4^{n-1}-2^{n-1}) =$$
$$2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^{n-2}-1)(2^{n-1}-1)$$

$GL(n,2)$ 是 2 元域上的 $n\times n$ 可逆矩阵群,它的阶是

$$2^{(n^2-n)/2}(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots(2-1)$$

所以 a_n 是 $|GL(n-1,2)|$ 的倍数.既然一个群元素的阶能整除群的阶,只须证明 $GL(n-1,2)$ 含有一个 n 阶的元素.这一元素的构成是将 $\boldsymbol{A}$ 取成多项式

$$f(x) = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

的伴随矩阵.而 f 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,$\boldsymbol{A}^m\neq \boldsymbol{I}, 0<m<n$,并且

$$\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})f(\boldsymbol{A}) = 0$$

B－1　如图 1,Rt△ABC 中 $\angle C$ 是直角,$\angle BAC=\theta$;在 AB 上取点 D 使 $|AC|=|AD|=1$;E 点在 BC 上,满足 $\angle CDE=\theta$.在 E 点作 BC 的垂线交 AB 于 F,求 $\lim\limits_{\theta\to0}|EF|$.(这里,$|PQ|$ 表示线段 $|PQ|$ 的长度)

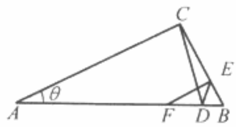


图 1

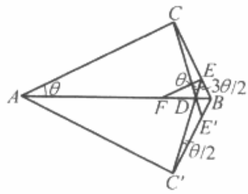


图 2

解　考虑三角形关于边 AB 的反射.令 C',E' 分别是 C,E 的反射点,如图 2 所示.

由假设 $|AC|=|AD|=1$,所以 △ACD 是等腰的并且 $\angle ACD=\angle ADC=(\pi-\theta)/2$.由于 $\angle CDE$ 取成 θ,可知 CDE' 和 $C'DE$ 是直线.由对顶角,$\angle EDB=\angle E'DB=(\pi-\theta)/2$.$\angle ACB$ 是直角,所以 $\angle DCB=\angle DC'B=\theta/2$,还有 $\angle ABC=\pi/2-\theta$.于是

$$\angle DEB=\pi-\angle EDB-\angle DBE=3\theta/2$$

由 △EBC' 的正弦定理得到

$$\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(3\theta/2)}=\frac{\sin(\angle DC'B)}{\sin(\angle DEB)}=\frac{|EB|}{|C'B|}=\frac{|EB|}{|CB|}$$

由相似三角形

$$\frac{|EB|}{|CB|}=\frac{|EF|}{|AC|}=|EF|$$

所以
$$\lim_{\theta\to0}|EF|=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(3\theta/2)}=\frac{1}{3}$$

此处我们用了三角恒等式或者 $\lim\limits_{\theta\to0}\sin\theta/\theta=1$ 这一事实.

B－2　令 $P(x)$ 是一 n 次多项式,满足:$P(x)=Q(x)P''(x)$,其中 $Q(x)$ 是一个二次多项式,$P''(x)$ 是 $P(x)$ 的二阶导函数.

证明:如果 $P(x)$ 至少有两个不同的根,那么它就有 n 个不同的根.(根可以是实的也可以是复的)

证法 1 如果 r 是 $P(x)$ 的一个 $m \geqslant 2$ 重根. 那么 $P''(x)$ 在 r 处的重数就是 $m-2$, $Q(x)$ 在 r 处就是二重根, 所以

$$Q(x) = \frac{(x-r)^2}{n(n-1)}$$

写成[①] $P(x) = a_m(x-r)^m + \cdots + a_n(x-r)^n, a_n \neq 0$

得到
$$\frac{m(m-1)a_m}{n(n-1)} = a_m, a_m \neq 0$$

即 $m = n$, 与假设矛盾. 于是 $P(x)$ 所有的根都不相同.

证法 2 二次多项式 $Q(x)$ 可以有一个重根, 或者两个不同的根. 存在一个变换 $x \to Ax + B$, 使得 $Q(Ax+B)$ 成为 Cx^2 或者 $C(x^2-1)$. 这一变换不会改变微分方程 $P(x) = Q(x)P''(x)$.

假设是第一种情形, $P(x) = Cx^2P''(x)$. 如果 $P(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m$, 那么

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^n = c\sum_{m=0}^{n} m(m-1)a_m x^m$$

比较系数, $a_m = cm(m-1)a_m$, $0 \leqslant m \leqslant n$. 由于我们总假定 $a_n \neq 0$, 所以在 $m = n$ 时, $c = 1/(n(n-1))$. 而在 $0 \leqslant m \leqslant n-1$ 时, 从方程得出 $a_m = 0$, 于是证明了 $P(x) = a_n x^n$.

现在假设 $P(x) = C(x^2-1)P''(x)$. 再次考虑 x^n 项, 得到 $c = 1/(n(n-1))$. $P(x)$ 是微分方程

$$(1-x^2)P''(x) + n(n-1)P(x) = 0$$

的解. 对它微分, 得到

$$(1-x^2)P'''(x) - 2xP''(x) + n(n-1)P'(x) = 0$$

这正是 $n-1$ 阶的 Legendre 方程, 它在可以相差一个常数因子的意义下有唯一的多项式解. 用标准的记号 P_n 记 n 阶 Legendre 多项式, 我们原来的方程的解就是方程 $P'(x) = P_{n-1}(x)$, $P(-1) = 0$ 的解的一个常数倍. 也就是

$$P(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}(u)\mathrm{d}u$$

从 Legendre 多项式的导函数的递推关系, 得出

$$P(x) = \frac{1}{2n-1}(P_n(x) - P_{n-2}(x))$$

$P_{n-1}(x)$ 的所有零点都位于区间 $(-1,1)$. 假定这些零点是

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1}$$

我们知道 $P_{n-2}(\alpha_j)$ 和 $P_n(\alpha_j)$ 的符号是相反的, 并且当 j 从 1 至 $n-1$ 增加时, 它们变号. 于是用中值定理就足以证明 P 在区间 $[-1,1]$ 中, 包括 $x = \pm 1$, 有 n 个单零点.

① 原文中 $(x-r)^n$ 的系数为 1. —— 校者注

B－3　令 $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y<1\}$. 对 $(x,y)\in A$，令

$$S(x,y)=\sum_{\frac{1}{2}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 2}x^my^n$$

这里的求和对一切满足所列不等式的正整数对 (m,n) 进行，计算

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in A}}(1-xy^2)(1-x^2y)S(x,y)$$

解法 1　令

$$T(x,y)=\sum_{0<\frac{n}{m}<\frac{1}{2}}x^my^n$$

于是

$$S(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x^my^n-T(x,y)-T(y,x) \qquad ①$$

就是减去不满足 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 2$ 的项①. 式 ① 中的两重和是两个几何级数的乘积 $x(1-x)^{-1}\cdot y(1-y)^{-1}$. 此外

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2n+1}^{\infty}x^my^n=\sum_{n=1}^{\infty}y^n\frac{x^{2n+1}}{1-x}=\frac{x}{1-x}\frac{x^2y}{1-x^2y}$$

$$\begin{aligned}S(x,y)&=\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}-\frac{x}{1-x}\frac{x^2y}{1-x^2y}-\frac{y}{1-y}\frac{y^2x}{1-y^2x}=\\&\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y^2x}{1-y^2x}\right)\left(\frac{y}{1-y}-\frac{x^2y}{1-x^2y}\right)-\\&\frac{y^2x}{1-y^2x}\frac{x^2y}{1-x^2y}=\\&\frac{x-y^2x}{(1-x)(1-y^2x)}\frac{y-x^2y}{(1-y)(1-x^2y)}-\\&\frac{x^3y^3}{(1-y^2x)(1-x^2y)}=\\&\frac{x(1+y)y(1+x)-x^3y^3}{(1-y^2x)(1-x^2y)}\end{aligned}$$

所以　$(1-y^2x)(1-x^2y)S(x,y)=x(1+y)y(1+x)-x^3y^3$

要求的极限就是计算该式右边在 $x=y=1$ 处的值，它是 $4-1=3$.

解法 2　将求和按偶数 $n(=2r)$ 和奇数 $n(=2r-1)$ 进行

$$\begin{aligned}S(x,y)&=\sum_{1\leqslant r\leqslant m\leqslant 4r}x^my^{2r}+\sum_{1\leqslant r\leqslant m\leqslant 4r-2}x^my^{2r-1}=\\&\frac{1}{1-x}\sum_{1\leqslant r}(x^r-x^{4r+1})y^{2r}+(x^r-x^{4r-1})y^{2r-1}=\end{aligned}$$

① 原文在此有误.——译者注

$$\frac{1}{1-x}\sum_{1\leqslant r}(xy^2)^r\frac{y+1}{y}-(x^4y^2)^r\frac{x^2y+1}{xy}=$$
$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{xy^2}{1-xy^2}\frac{y+1}{y}-\frac{x^4y^2}{1-x^4y^2}\frac{x^2y+1}{xy}\right)=$$
$$\frac{xy(1-x^2+y-x^2y-x^2y^2+x^3y^2)}{(1-x)(1-xy^2)(1-x^2y)}=$$
$$\frac{xy(1+x+y+yx-x^2y^2)}{(1-xy^2)(1-x^2y)}$$

于是显然所要求的极限是3.

解法3 将级数和写成①

$$S(x,y)=\sum_{1\leqslant n\leqslant m\leqslant 2n}x^my^n+\sum_{1\leqslant m\leqslant n\leqslant 2m}x^my^n-\sum_{1\leqslant n}x^ny^n$$

我们计算第一个和项,用对称性可得到第二和项.

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant m\leqslant 2n}x^my^n=\frac{1}{1-x}\sum_{1\leqslant n}(x^ny^n-x^{2n+1}y^n)=$$
$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{xy}{1-xy}-\frac{x^3y}{1-x^2y}\right)=$$
$$\frac{xy(1-x^2-x^2y+x^3y)}{(1-x)(1-xy)(1-x^2y)}=$$
$$\frac{xy(1+x-x^2y)}{(1-xy)(1-x^2y)}$$

得出

$$S(x,y)=\frac{xy}{1-xy}\left(\frac{1+x-x^2y}{1-x^2y}+\frac{1+y-xy^2}{1-xy^2}-1\right)=$$
$$\frac{xy(1-x^2y^2+x-x^2y+y-xy^2-x^2y^2+x^3y^3)}{(1-xy)(1-x^2y)(1-x^2y)}=$$
$$\frac{xy(1+x+y+xy-x^2y^2)}{(1-xy^2)(1-x^2y)}$$

所要求的极限显然就是3.

> B-4 f 是一实函数,具有三阶连续导数,并且对所有的 x, $f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)$ 为正值. 假设对凡 $x,f'''(x)\leqslant f(x)$. 证明:对一切 x 我们有 $f'(x)<2f(x)$.

解法1 (George Gilbert,德克萨斯 Christian 大学,Fort Worth)

固定 c,令

$$g(x)=f(x)-f'(x)(x-c)+f''(x)(x-c)^2/2$$

那么
$$g'(x)=f'''(x)(x-c)^2/2\geqslant 0$$

当且仅当 $x=c$ 时它为0. 于是,对 $y>0$

① 原文此处有误.—— 译者注

$$f(c+y)-f'(c+y)y+f''(c+y)y^2/2=g(c+y)>$$
$$g(c-y)=f(c-y)+f'(c-y)y+$$
$$f''(c-y)y^2/2>$$
$$f''(c-y)y^2/2$$

由中值定理,存在 θ 在 $(c-y,c+y)$ 中,满足

$$f''(c+y)-f''(c-y)=2yf'''(\theta)\leqslant 2yf(\theta)<2yf(c+y)$$

从以上两个不等式得到

$$f(c+y)-f'(c+y)y+f(c+y)y^3>0$$

或者
$$\frac{1+y^3}{y}f(c+y)>f'(c+y)$$

$y=1/\sqrt[3]{2}$ 时上式中的分数值是 $3/\sqrt[3]{4}$($y=1$ 时它是2). c 既是任意的,即得证.

解法2 令 $c\geqslant 0$ 是 $f(x)$ 对所有 x 的最大下界. f' 既是正的. $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时单调下降趋于 c. 同样的理由, f' 当 $x\to-\infty$ 时,下降趋于它的渐近值. 因为 f 是正的,所以 f' 的这个水平渐近值必定是 $y=0$. 同样,当 $x\to-\infty$ 时, f'' 的水平渐近值是 $y=0$.

已知对一切 x, $f'''(x)\leqslant f(x)$, f' 和 f'' 是正的,我们有

$$f''(x)f'''(x)\leqslant f(x)f''(x)<f(x)f''(x)+(f'(x))^2$$

将它从 a 到 x 积分,得到

$$\frac{1}{2}((f''(x))^2-(f''(a))^2)\leqslant f(x)f'(x)-f(a)f'(a),a<x$$

令 $a\to-\infty$,就有

$$(f''(x))^2\leqslant 2f(x)f'(x)$$

对一切 x 成立. 接着,利用 $f'''(x)\leqslant f(x)$,得到

$$(f''(x))^2f'''(x)\leqslant 2(f(x))^2f'(x)$$

将它从 a 到 x 积分,再次令 $a\to-\infty$,得出

$$\frac{1}{3}(f''(x))^3\leqslant\frac{2}{3}((f(x))^3-c^3)\leqslant\frac{2}{3}(f(x))^3$$

或者 $f''(x)\leqslant\sqrt[3]{2}f(x)f'(x)$ 对一切 x 对立. 于是 $f'(x)f''(x)\leqslant\sqrt[3]{2}f(x)f'(x)$,再次使用积分并取极限这一技巧,证明了

$$(f'(x))^2\leqslant\sqrt[3]{2}(f(x))^2$$

对一切 x 成立. 取上式的平方根得到最后结果: $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$f'(x)\leqslant\sqrt[6]{2}f(x)<2f(x)$$

B - 5 对整数 $n \geqslant 3$,令 $\theta = 2\pi/n$.计算 $n \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 的行列式,此处 $\boldsymbol{I}$ 是 $n \times n$ 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A} = (a_{jk})$ 的元对所有的 j, k 取成 $a_{jk} = \cos(j\theta + k\theta)$.

解法 1 令 $v = (e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \cdots, e^{ni\theta})$,那么 $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(v^t v + \bar{v}^t \bar{v})$(利用了 $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$),所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.由于

$$vv^t = \sum_{k=1}^{n} e^{2ki\theta} = \frac{e^{2i\theta}(e^{2ni\theta} - 1)}{e^{2i\theta} - 1} = 0$$

并且 $\bar{v}^t = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$,所以 $\boldsymbol{A}^2 = n(v^t\bar{v} + \bar{v}^t v)/4$ 和 $\boldsymbol{A}^3 = n^2\boldsymbol{A}/4$.容易验证 $x^3 - (n^2/4)x$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.于是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值是 0, $\pm n/2$.既然 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$,本征值 $\pm n/2$ 是单重的.所以 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 的本征值是

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{(n-2)\text{个}1}, 1 + n/2, 1 - n/2$$

$$\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = 1 - n^2/\boldsymbol{A}$$

解法 2 令

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos 2\theta \\ \vdots \\ \cos n\theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$, 再者, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = + n/2$, $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = + n/2$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = 0$(这都是些三角学的等式).由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = -(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}$, 所以 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 和 $-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值. 由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$, $\mathrm{nullity}(\boldsymbol{A}) \geqslant n - 2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个本征值是

$$\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n-2)\text{个}0}, + \frac{n}{2}, - \frac{n}{2}$$

以下的讨论同解答 1.

B - 6 S 是一个整数的有限集合,其中每个数均大于 1.假设对每个整数 n,存在某个 $s \in S$,满足 $\gcd(s, n) = 1$ 或者 $\gcd(s, n) = s$.

证明:存在 $s, t \in S$ 满足 $\gcd(s, t)$ 是素数.(此处, $\gcd(a, b)$ 记 a, b 的最大公因子)

解 令 $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$,并以 p_i 记 s_i 的最小素因子.对

$0 \leqslant i \leqslant n$,归纳地定义 m_i:$m_0 = 1$,以及

$$m_i = \begin{cases} m_{i-1} & ,\text{如果 } \gcd(m_{i-1}, s_i) \neq 1 \\ m_{i-1}p_i & ,\text{如果 } \gcd(m_{i-1}, s_i) = 1 \end{cases}$$

由 m 的构造方式,可知对每个 $s \in S$,$\gcd(s, m_n) \neq 1$,所以由假设条件得出,存在 $t \in S$,使得 t 整除 m_n.令 k 是最小的标号,使得存在 $t \in S$,满足 t 整除 m_k,固定这个 t,显然 $k > 0$. t 不能整除 m_{k-1},p_k 就能整除 t,所以,既然 $\gcd(s_k, m_{k-1}) = 1$,就有 $\gcd(t, s_k) = p_k$.

第61届美国大学生数学竞赛

A－1 令 A 是一个正实数,给定 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 是使得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$ 的正数,问:什么是 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j^2$ 的可能的取值?

解 任何小于 A^2 的正数. $\sum x_i^2$ 可以没有最小的正值,因为和为 A 的任何数列 $x_0,x_1,\cdots$ 可以被数列 $x_0/2,x_0/2,x_1/2,x_1/2,\cdots$ 代替,而后者的和仍为 A,但其平方和为前一数列的平方和的1/2.另一方面,给定和为 A 的任一(正)数列 (x_i),考虑正数列 (y_i),其中 $y_0=tx_0+(1-t)A$,以及对于 $i\geqslant 1(0<t\leqslant 1)$,$y_i=tx_i$.显然

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i=A$$

并且 $$\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2=t^2\sum_{i=0}^{\infty}x_i^2+2t(1-t)x_0A+(1-t)^2A^2$$

当 t 在0和1之间时这个表达式取 $\sum x_i^2$ 和 A^2 之间的所有值.这样,我们可以得到结论:平方级数的和的可能的取值范围至少包含 $(0,A^2)$.但是由于 $\sum x_i^2<(\sum x_i)^2$,值域即为 $(0,A^2)$.

A－2 证明:存在无穷多个整数 n,使得 $n,n+1$,和 $n+2$ 都是两个整数的平方和.(例如:$0=0^2+0^2,1=0^2+1^2$ 和 $2=1^2+1^2$)

解法1 如果 $n,n+1$ 和 $n+2$ 都是两个平方数之和,那么 n^2+2n,n^2+2n+1 和 n^2+2n+2 也都是两个平方数之和.因为 $n=a^2+b^2$ 和 $n+2=c^2+d^2$ 蕴涵着

$$n^2+2n=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

同时 $$n^2+2n+1=(n+1)^2+0^2$$

$$n^2+2n+2=(n+1)^2+1^2$$

因而只须对某个 $n>0$ 找到任何适当的三元数组即可;例如,8 =

$2^2+2^2, 9=3^2+0^2, 10=3^2+1^2$.

解法 2 对任意整数 $k\geqslant 1$,令 $(3+2\sqrt{2})^k=r+\sqrt{2}s$ 对整数 r 和 s 成立,则

$$r^2-2s^2=(r+\sqrt{2}s)(r-\sqrt{2}s)=(3+2\sqrt{2})^k(3-2\sqrt{2})^k=(9-8)^k=1$$

因而

$$r^2-1=2s^2$$

这样,r^2-1,r^2 和 r^2+1 属于 S①.

A-3 八边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 内接于一圆周,它的顶点在圆周上的排列即为所述的次序.已知多边形 $P_1P_3P_5P_7$ 是一个面积为 5 的正方形,并且多边形 $P_2P_4P_6P_8$ 是一个面积为 4 的矩形.求八边形面积的最大值.

解法 1 最大的面积是 $3\sqrt{5}$.

内接正方形边长为 $\sqrt{5}$,圆的半径为 $\sqrt{5/2}$,故可考虑圆周为 $x^2+y^2=5/2$,并放置正方形使得其边平行于坐标轴,且 $P_1=(\sqrt{5/2}\cos(3\pi/4),\sqrt{5/2}\sin(3\pi/4))=(-\sqrt{5}/2,\sqrt{5}/2)$②,以及 $P_3=(\sqrt{5/2}\cos(\pi/4),\sqrt{5/2}\sin(\pi/4))=(\sqrt{5}/2,\sqrt{5}/2)$.由于矩形的面积为 4,对角线长为 $\sqrt{10}$,它的边长即为 $\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}$.

不失一般性,$\overline{P_2P_4}=\sqrt{2}$,并且 $P_2=(\sqrt{5/2}\cos\theta,\sqrt{5/2}\sin\theta)$,其中 $\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2$.令 $\alpha=\angle P_4OP_2$.由余弦定理,$\cos\alpha=3/5$,因而 $\sin\alpha=4/5$.

八边形的面积 K 是正方形与 $\triangle P_1P_2P_3$,$\triangle P_3P_4P_5$,$\triangle P_5P_6P_7$ 以及 $\triangle P_7P_8P_1$ 的面积之和.其中第一个三角形和第三个三角形,第二个和第四个三角形,分别有相等的面积.$\triangle P_1P_2P_3$ 有底边 $\overline{P_1P_3}=\sqrt{5}$ 和高 $\sqrt{5/2}\sin\theta-\sqrt{5}/2$.$\triangle P_3P_4P_5$ 有底边 $\overline{P_3P_5}=\sqrt{5}$ 和高 $\sqrt{5/2}\cos(\theta-\alpha)-\sqrt{5}/2$.这样

$$\begin{aligned}K&=5+\sqrt{5}(\sqrt{5/2}\sin\theta-\sqrt{5}/2)+\sqrt{5}(\sqrt{5/2}\cos(\theta-\alpha)-\sqrt{5}/2)=\\&((5/\sqrt{2})\sin\theta)+((5/\sqrt{2})(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha))=\\&\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)\cos\theta+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sin\alpha)\right)\sin\theta=\\&\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{9}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{aligned}$$

① S 在此表示满足问题结论中要求的三元组 $n,n+1,n+2$ 的集合.——译者注

② 此处原文误为 $(\sqrt{5}/2,\sqrt{5}/2)$.——译者注

因而，K 的最大值是

$$\sqrt{(3/\sqrt{2})^2+(9/\sqrt{2})^2}=3\sqrt{5}$$

解法 2 令 O 是所论圆的圆心. 由于其内接正方形的边长为 $\sqrt{5}$，因而此圆半径为 $\sqrt{5/2}$. 因为内接矩形的面积为 4，所以它的边长分别为 $\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}$. 不失一般性，可令 $\overline{P_2P_4}=\sqrt{2}$ 和 $P_8P_2=2\sqrt{2}$.

内接八边形的面积是矩形 $P_2P_4P_6P_8$ 的面积加上 $\triangle P_8P_1P_2$ 与 $\triangle P_2P_3P_4$ 面积之和的两倍. 可以把此矩形关于正方形旋转，使得这些三角形中的每一个有最大的面积(此时它们是等腰的，即此时 $\overline{P_8P_1}=\overline{P_1P_2}$ 以及 $\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}$，因为关于它们相应的底边 P_8P_2 和 P_2P_4 此时给出了最大的高).

这样，内接八边形的最大面积是

$$4+\sqrt{2}(\sqrt{5/2}-\sqrt{5/2-1/2})+2\sqrt{2}(\sqrt{5/2}-\sqrt{5/2-2})=$$
$$4+\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}-2=3\sqrt{5}$$

A－4 证明：广义积分

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B\sin(x)\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

收敛.

解 只须证明

$$\lim_{B\to\infty}\int_1^B\sin(x)\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

存在. 分部积分，得

$$\int\sin(x)\sin(x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-\cos x^2}{2}\right)-$$
$$\int\left(\frac{-\cos x^2}{2}\right)\left(-\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos x}{x}\right)\mathrm{d}x=$$
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-\cos x^2}{2}\right)-$$
$$\int\frac{\cos x^2\sin x}{2x^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{2x^2}\left(\frac{\sin x^2}{2}\right)-$$
$$\int\left(\frac{\sin x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{x^2}-\frac{2\cos x}{x^3}\right)\right)\mathrm{d}x$$

由于
$$\lim_{B\to\infty}\frac{\sin B\cos B^2}{B}=0$$

以及
$$\lim_{B\to\infty}\frac{\cos B\sin B^2}{B}=0$$

我们只须证明，当 $B\to\infty$ 时

$$\int_1^B \frac{\cos x^2 \sin x}{x^2} dx$$
$$\int_1^B \frac{\sin x^2 \sin x}{x^2} dx$$
$$\int_1^B \frac{\sin x^2 \cos x}{x^3} dx$$

都收敛. 但是所有这三个积分都绝对收敛, 因为$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 和 $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ 都收敛.

> A-5　平面上具有整数坐标的三个不同的点位于半径为 $r > 0$的一个圆的圆周上. 证明:其中两个点的距离至少为 $r^{1/3}$.

解法1　(顶点为)整数坐标的一个三角形的面积 A 是一个整数的一半(例如,由 Pick 定理①,或检验某个叉积②),因而 $A \geqslant 1/2$.我们假设,此三点所在的圆的半径为 r,以 P,Q,R 来表示此三点,并设$\overline{PR}$是最长边.假设弧 PQR 等于2θ(即,若 O 是圆心,则$\angle POR$是2θ,而 Q 位于弧PR上的某处).$\triangle PQR$ 的底边长现被固定为 $2r\sin\theta$,其高至多为 $r - r\cos\theta$.这样

$$\begin{aligned}1/2 \leqslant A \leqslant r^2\sin\theta(1-\cos\theta) &= \\ r^2(2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))(2\sin^2(\theta/2)) &= \\ 4r^2\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2) &\leqslant \\ 4r^2(\theta/2)^3 = r^2\theta^3/2\end{aligned}$$

这样,$\theta \geqslant 1/r^{2/3}$,同时对 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 利用 $\sin\theta \geqslant \theta/2$,我们得到

$$\overline{PR} = 2r\sin\theta \geqslant r\theta \geqslant r(1/r^{2/3}) = r^{1/3}$$

解法2　边长为 a,b,c 的三角形的外接圆的半径为$abc/4K$,其中 K 是三角形的面积.由于三角形的三个顶点具有整数坐标,因而 $K \geqslant 1/2$.因而 $r \leqslant abc/2$,以至

$$\max(a,b,c) \geqslant (abc)^{1/3} \geqslant (2r)^{1/3}$$

---

① Pick 定理:令 A 是一个格点多边形 G 的面积,B 表示 G 的边界上的格点数,I 表示 G 的内部的格点数,则 $A = I + B/2 - 1$.——译者注

② 若以(x_i,y_i),$i = 1,2,3$,记三个顶点的直角坐标,则三角形的面积为 $\frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right|$.——译者注

A－6 令 $f(x)$ 是一个整系数多项式.用 $a_0=0$ 和对所有 $n\geqslant 0, a_{n+1}=f(a_n)$ 来定义一个序列 $a_0,a_1,\cdots$,证明:如果存在一个正整数 m 使得 $a_m=0$,那么,或者 $a_1=0$,或者 $a_2=0$.

解 $(f(x)-f(y))/(x-y)$ 是一个整系数多项式,因而对任何两个不同的整数 a 和 b, $b-a$ 整除 $f(b)-f(a)$.特别,对于 $i=0,1,2,\cdots,m-1$, $a_{i+1}-a_i$ 整除 $f(a_{i+1})-f(a_i)=a_{i+2}-a_{i+1}$.因为 $a_{m+1}-a_m=a_1-a_0$,所以所有的差 $a_{i+1}-a_i(i=0,1,\cdots,m)$ 必定有相同的绝对值.如果这个绝对值是 0,那么 $a_1=0$.如果所有的 $a_{i+1}-a_i$ 有相同的非零值 d,那么

$$0=a_m-a_0=\sum_{i=0}^{m-1}(a_{i+1}-a_i)=md\neq 0$$

这就给出一个矛盾.因而必定存在一个 $j\leqslant m$,使得

$$a_{j+2}-a_{j+1}=-(a_{j+1}-a_j)$$

故而 $a_{j+2}=a_j$,此时

$$a_2=a_{m+2}=f^{m-j}(a_{j+2})=f^{m-j}(a_j)=a_m=0$$

B－1 令 a_j,b_j 和 c_j 对于 $1\leqslant j\leqslant N$ 是整数.对于每个 j,假设 a_j,b_j,c_j 中至少有一个为奇数.证明:存在整数 r,s,t 使得对于至少 $4N/7$ 个 j, $1\leqslant j\leqslant N$, $ra_j+sb_j+tc_j$ 是奇数.

解 对于 $r,s,t\in\{0,1\}$,令 $D(r,s,t)$ 表示使得 $ra_j+sb_j+tc_j$ 是奇数的 j 的个数.显然, $D(0,0,0)=0$,因而

$$\max_{r,s,t}D(r,s,t)\geqslant\frac{1}{7}\sum_{r,s,t\in\{0,1\}}D(r,s,t)=$$
$$\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{N}|\{r,s,t\in\{0,1\}\mid ra_j+sb_j+tc_j\text{ 是奇数}\}|$$

如果 a 是奇的,那么 $ra+sb+tc$ 是奇的当且仅当 r 的奇偶性与 $sb+tc$ 的相反.这样

$$|\{r,s,t\in\{0,1\}\mid ra+sb+tc\text{ 是奇数}\}|=4$$

当 b 或 c 是奇的时,类似的论证也成立.这样,由于(对每个 j) a_j,b_j,c_j 中至少一个为奇,所以

$$|\{r,s,t\in\{0,1\}\mid ra_j+sb_j+tc_j\text{ 是奇数}\}|=4$$

因而

$$\max_{r,s,t}D(r,s,t)\geqslant\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{N}4=\frac{4N}{7}$$

B－2　证明:对于所有满足 $n \geqslant m \geqslant 1$ 的正数对(m,n),表达式

$$\frac{\gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

是一个整数.(这里$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$,而 $\gcd(m,n)$ 是 m 和 n 的最大公因子)

解法 1　令 $S=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid\frac{x}{n}\binom{n}{m}\text{是一个整数}\right\}$. 显然,$n\in S$;但是也有 $m\in S$,由于

$$\frac{m}{n}\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-1}{m-1}$$

因而得到 m 与 n 的线性组合也属于 S;特别,因为存在整数 s 和 t 使得 $\gcd(m,n)=sm+tn$,所以 $\gcd(m,n)\in S$.

解法 2　注意

$$\frac{n}{\gcd(m,n)}=\prod_{\substack{p\text{素}\\ v_pn>v_pm}}p^{v_pn-v_pm}$$

其中 v_pq 表示 q 整除 p 的最高幂次. 这样,只须证明,对任何素数 p 有

$$v_pn-v_pm\leqslant v_p\binom{n}{m}$$

由于　$v_p\binom{n}{m}=v_p\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}=v_pn-v_pm+v_p\binom{n-1}{m-1}$

即得证.

B－3　令 $f(t)=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\sin(2\pi jt)$,其中每个 a_j 是实的,并且对于 $t\in[0,1)$,$a_N\neq 0$(很遗憾,关于 t 的这一限制在原来的叙述中被忽略了). 令 N_k 表示$\frac{d^kf}{dt^k}$ 的零点的数目(包括重数). 证明

$$N_0\leqslant N_1\leqslant N_2\leqslant\cdots,\text{并且}\lim_{k\to\infty}N_k=2N$$

解　把 $f(t)$ 视作圆周上的一个实值、连续、无穷可微的函数. 由 Rolle 定理,在 $f^{(k)}$ 的任何两个零点之间总是存在 $f^{(k+1)}$ 的一个零点. 这里零点显然是计算重数的,因而对所有的 k 有 $N_{k+1}\geqslant$

N_k.

函数 $g_k(t):=f^{(4k+1)}(t)/(2\pi)^{(4k+1)}=\sum_{j=1}^{N}a_j j^{4k+1}\cos(2\pi jt)$ 是实值的，并且当 k 充分大时由最后一项所控制. 为了使这个论断更明确，注意到对于 $n=0,1,2,\cdots,2N$，如果 k 充分大，我们有

$$(-1)^n\frac{g_k\left(\frac{n}{2N}\right)}{a_N}=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^n j^{4k+1}a_j}{a_N}\cos\left(2\pi j\left(\frac{n}{2N}\right)\right)+N^{4k+1}\geqslant$$
$$N^{4k+1}-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{|a_j|j^{4k+1}}{|a_N|}>0$$

这样，由中值定理，在每个区间 $(n/2N,(n+1)/2N)$ 中 g_k 有一个零点，因而 $N_{4k+1}\geqslant 2N$. 将此结合第一部分，我们有 $\lim\limits_{k\to\infty}N_k\geqslant 2N$.

最后注意，如果我们记 $z=e^{2i\pi t}$，那么每个 $f^{(k)}(t)$ 就具有形式 $\sum_{n=1}^{N}(c_nz^n+d_nz^{-n})$. 通乘 z^N，我们得到一个 $2N$ 次的多项式，因而它有不超过 $2N$ 个根. 这样，$N_k\leqslant 2N$.

B-4 令 $f(x)$ 是一个连续函数，使得对于所有的 x 有 $f(2x^2-1)=2xf(x)$. 证明：对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有 $f(x)=0$.

解法 1 因为

$$f(-1/2)=f(2(-1/2)^2-1)=$$
$$2(-1/2)f(-1/2)=-f(-1/2)$$

所以有 $f(-1/2)=0$. 对所有的 θ，有

$$f(\cos 2\theta)=f(2\cos^2\theta-1)=2\cos\theta f(\cos\theta)$$

因而如果 $\cos\theta\neq 0$，则

$$f(\cos 2\theta)=0\text{ 蕴涵着 }f(\cos\theta)=0$$

显然 $$f(\cos\theta)=0$$

当且仅当 $$f(\cos(\theta+2\pi))=0$$

那么，因为 $f(\cos 2\pi/3)=f(-1/2)=0$，对所有整数 m,n，我们即有

$$f\left(\cos\frac{2\pi/3+2m\pi}{2^n}\right)=0$$

以至对于 $[-1,1]$ 中 x 的一个稠集有 $f(x)=0$. 由连续性即得结果.

解法 2 对于 $x\neq 0$，有

$$f(x)=\frac{f(2x^2-1)}{2x}=-\frac{f(2x^2-1)}{-2x}=-f(-x)$$

这样 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}f(-x)=-f(0)$

因而 $f(0)=0$.

对所有 θ

$$f(\cos 2\theta)=f(2\cos^2\theta-1)=2\cos\theta f(\cos\theta)$$

以至 $f(\cos\theta)=0$

当且仅当 $f(\cos 2\theta)=0$

(充分性部分利用 $f(0)=0$)①即得

$$\frac{f(\cos 2\theta)}{\sin 2\theta}=\frac{f(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad ①$$

此外

$$f(\cos 2\theta)=f(2\cos^2\theta-1)=2\cos\theta f(\cos\theta)$$

以及

$$f(-\cos 2\theta)=f(2\sin^2\theta-1)=2\sin\theta f(\sin\theta)$$

因而

$$\cos\theta f(\cos\theta)=\sin\theta f(\sin\theta) \quad ②$$

从①和②得

$$\frac{f(\sin 2\theta)}{\cos 2\theta}=\frac{f(\sin\theta)}{\cos\theta}$$

因而对所有的 t,当 $n\to\infty$ 时②

$$\frac{f(\sin t)}{\cos t}=\frac{f(\sin(t/2))}{\cos(t/2)}=\cdots=\frac{f(\sin(t/2^n))}{\cos(t/2^n)}\to\frac{f(0)}{1}$$

由此即得对所有的 t,$f(\sin t)=0$,因而在 $[-1,1]$ 上 $f(t)=0$.

B-5 令 S_0 是正整数的一个有限集合.我们定义正整数的一列有限集合 $S_1,S_2,\cdots$ 如下:整数 $a\in S_{n+1}$ 当且仅当 $a-1$ 和 a 中恰有一个在 S_n 中.证明:存在无限多个整数 N,使得 $S_N=S_0\cup\{N+a\mid a\in S_0\}$.

解 对于每个 $j\geqslant 0$,令 $f_j(x)=\sum_{a\in S_j}x^a$.注意,$f_0(x)$ 是一个多项式,并且

$$f_{j+1}(x)\equiv(1+x)f_j(x)\pmod 2$$

因而由归纳法

$$f_N(x)\equiv(1+x)^N f_0(x)\pmod 2$$

但是 $(1+x)^2\equiv 1+x^2\pmod 2$

以至 $(1+x^2)^2\equiv 1+x^4\pmod 2$

因而由归纳法,对所有整数 $k\geqslant 0$ 有

① 原文误为"必要性部分利用 $f(0)=0$(the necessity uses $f(0)=0$)".—— 译者注

② 原文误为 $t\to\infty$.—— 译者注

$$(1+x)^{2^k} \equiv 1+x^{2^k} \pmod 2$$

现任取 k，使得 2^k 大于 $f_0(x)$ 的次数，则对 $N=2^k$ 有

$$f_N(x) \equiv (1+x)^N f_0(x) \equiv (1+x^N) f_0(x) \equiv \sum_{x\in S_0} x^a + \sum_{x\in S_0} x^{N+a} \pmod 2$$

这蕴涵着结论.

B－6 令 B 是 n 维空间中坐标具有形式 $(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$ 的超过 $2^{n+1}/n$ 个不同点的一个集合，其中 $n \geqslant 3$. 证明：在 B 中存在三个不同的点，他们是一个等边三角形的顶点.

解 我们证明，存在边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形.

令 A 表示 n 维空间中形如 $(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$ 的 2^n 个点的点集. 对于 $a, b \in A$，$|a-b| = 2\sqrt{m}$，其中 m 是 a 与 b 不相同的坐标数. 对于 $b \in B$，令 $N_0 = \{a \in A \mid |a-b| = 2\}$. 这样，$|N_b| = n$，并且对于 $b_1 \neq b_2$，$N_{b_1} \cap N_{b_2} \neq \varnothing$ 当且仅当 $|b_1 - b_2| = 2\sqrt{2}$.

只须证明，对于某些不同的 b_1, b_2, b_3，$N_{b_1} \cap N_{b_2} \cap N_{b_3} \neq \varnothing$，因为此时 b_1, b_2, b_3 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的一个等边三角形的三个顶点. 假设反之，即对所有三元组 b_1, b_2, b_3，都有 $N_{b_1} \cap N_{b_2} \cap N_{b_3} = \varnothing$. 那么 $|\bigcup_{b\in B} N_b| \geqslant n|B|/2$（由假设，$N_b$ 的并中的一个元素，至多属于两个 N_b），这导致矛盾

$$2^n = |A| \geqslant \left|\bigcup_{b\in B} N_b\right| \geqslant n|B|/2 > n(2^{n+1}/n)/2 = 2^n$$

第 62 届美国大学生数学竞赛

A-1 考虑一个集合 S 以及 S 上的一个二元运算 $*$(即对 S 中的每一对 $a,b,a*b$ 也在 S 中).假设对所有的 $a,b\in S$,有 $(a*b)*a=b$.证明:对所有的 $a,b\in S$,有 $a*(b*a)=b$.

解 对于 S 中的 a,b,有

$$a*(b*a)=((b*a)*b)*(b*a)=b$$

A-2 你有 n 个银币 $C_1,C_2,\cdots,C_n$.对于每个 k,银币 C_k 是有偏向的,即当向上抛时,它落下时头像朝上的概率为 $1/(2k+1)$.如果此 n 个银币被抛起,有奇数个头像朝上的概率是多少?把结果表为 n 的有理函数.

解 令 P_n 表示所求的概率,并对 $k=1,2,\cdots,n$,令 $p_k=1/(2k+1),q_k=1-p_k$.令

$$Q(x)=\prod_{k=1}^{n}(p_kx+q_k)=Q_0+Q_1x+\cdots+Q_nx^n$$

恰好 m 个头像朝上的概率是多项式 Q 中 x^m 的系数,即 Q_m.因而所求这概率为

$$P_n=Q_1+Q_3+Q_5+\cdots$$

但是
$$Q(1)=Q_0+Q_1+Q_2+\cdots+Q_n$$

以及
$$Q(-1)=Q_0-Q_1+Q_2+\cdots+(-1)^nQ_n$$

因而答案为

$$P_n=\frac{Q(1)-Q(-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

A－3　对于每个整数 m，考虑多项式

$$P_m(x)=x^4-(2m+4)x^2+(m-2)^2$$

对 m 的什么值，$P_m(x)$ 是两个整系数、非常数多项式的乘积？

解　所求之值是 n^2 和 $2n^2$（n 是整数）.

$P_m(x)$ 的零点是 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{m}$.

如果 $m=n^2$，其中 $n\geqslant 0$，那么 $\sqrt{m}\pm\sqrt{2}=n\pm\sqrt{2}$ 是 $(x-n)^2-2$ 的两个零点，因而，$(x-n)^2-2$ 是 $P_m(x)$ 的一个因子.

如果 $m=2n^2$，其中 $n\geqslant 0$，那么 $\pm(\sqrt{m}+\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}(n+1)$ 是 $x^2-2(n+1)^2$ 的两个零点，因而，$x^2-2(n+1)^2$ 是 $P_m(x)$ 的一个因子.

假设 m 既不是一个完全平方数，也不是一个完全平方数的两倍.那么 $P_m(x)$ 的零点中没有有理的，因而 $P_m(x)$ 没有（整系数）线性因子.此外，$P_m(x)$ 的任何一对零点不能同时有有理和与有理积，因此 $P_m(x)$ 没有（整系数）平方因子.因而 $P_m(x)$ 不能分解为两个整系数非常数多项式的乘积.（注：从 $2+m+2\sqrt{2m}$ 的无理性即得其平方根 $\sqrt{2}+\sqrt{m}$ 的无理性）

A－4　$\triangle ABC$ 的面积为 1.点 E,F,G 分别在边 BC,CA,AB 上，并且 AE 于点 R 处平分 BF，BF 于点 S 处平分 CG，CG 于点 T 处平分 AE，如图 1 所示.求 $\triangle RST$ 的面积.

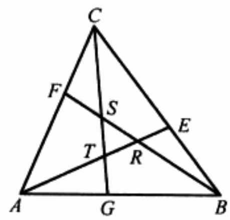


图 1

解法 1　$\triangle RST$ 的面积是 $(7-3\sqrt{5})/4$.

令 K_{XYZ} 表示 $\triangle XYZ$ 的面积.令 $x=\overline{BE}/\overline{BC}$，$y=\overline{CF}/\overline{CA}$，$z=\overline{AG}/\overline{AB}$，则 $K_{ABE}=K_{ABE}/K_{ABC}=x$.因为

$$\frac{K_{AGT}}{K_{ABE}}=\frac{\overline{AG}\cdot\overline{AT}}{\overline{AB}\cdot\overline{AE}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AT}}{\overline{AE}}=\frac{z}{2}$$

所以

$$K_{AGT}=xz/2$$

由对称性得

$$K_{BCF}=y,K_{CAG}=z,K_{BER}=\frac{yx}{2},K_{CFS}=\frac{zy}{2}$$

因为 $AT=TE$，$K_{ACT}=K_{ACE}/2$，或者 $K_{ACT}=K_{CAG}-K_{AGT}=(K_{ABC}-K_{ABE})/2$，所以

$$z-\frac{xz}{2}=\frac{1-x}{2}$$

由对称性得

$$x-\frac{yx}{2}=\frac{1-y}{2},y-\frac{zy}{2}=\frac{1-z}{2}$$

解此方程组得到

$$x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(另一根$(3+\sqrt{5})/2$大于1,因而与本题无关).这样

$$K_{RST}=K_{ABC}-K_{ACT}-K_{BAR}-K_{CBS}=1-3K_{ACT}=$$
$$1-3\left(\frac{1-x}{2}\right)=\frac{7-3\sqrt{5}}{4}$$

解法 2 利用仿射变换(这个变换是保面积的),我们不妨假设

$$A=(0,1),B=(1,0),C=(-1,0)$$

这样,对于位于0与1之间的某些a,b,c,有

$$E=(a,0),F=(-b,1-b),G=(c,1-c)$$

并且,BF,CG,AE的中点分别是①

$$R=\left(\frac{1-b}{2},\frac{1-b}{2}\right),S=\left(-\frac{1-c}{2},\frac{1-c}{2}\right),T=\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$$

由$A,R,E;B,S,F$;以及C,T,G分别共线,我们即分别得到

$$1-a-b-ab=0$$
$$1-2b+bc=0$$
$$1+a-3c-ac=0$$

解出a,b,c,我们得到

$$a=\sqrt{5}-2,b=(\sqrt{5}-1)/2,c=(3-\sqrt{5})/2$$

这样,$\triangle RST$的面积即为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\(1-b)/2&a/2&-(1-c)/2\\(1-b)/2&1/2&(1-c)/2\end{vmatrix}=\frac{7-3\sqrt{5}}{4}$$

解法 3 令$\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CF}=y\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AG}=z\overrightarrow{AB}$.我们有

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{CA})=$$
$$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}))=\left(\frac{2-y}{2}\right)\overrightarrow{AB}+$$
$$\left(\frac{1-y}{2}\right)\overrightarrow{BC}$$

也有 $$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}$$

因为$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AE}$是平行的,因而

$$x=\frac{1-y}{2-y}$$

① 原文将最后一个等式误为$(a/2,1/2)$.——译者注

由对称性得

$$y=\frac{1-z}{2-z},z=\frac{1-x}{2-x}$$

解此方程组,我们得到

$$x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

由于(利用了$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TR}&=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\\&\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{CA})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC})=\\&\frac{1-y}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1-x-y}{2}\overrightarrow{BC}=\\&\frac{1-x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1-2x}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

由对称性

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}&=\left(\frac{1-x}{2}\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{1-2x}{2}\right)\overrightarrow{CA}=\\&\left(-\frac{1-2x}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}\right)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

这样,$\triangle RST$ 的面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\overrightarrow{TR}\times\overrightarrow{RS}|&=\left(\frac{1-3x+3x^2}{4}\right)\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\\&\frac{1-3x+3x^2}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

解法4 关于 $A=\langle 1,0,0\rangle,B=\langle 0,1,0\rangle,C=\langle 0,0,1\rangle$,我们确定 E,F,G,R,S,T 的正规化重心坐标.由于 E 在 BC 上,对于 $(0,1)$ 中的某个 x,我们有

$$E=xB+(1-x)C=\langle 0,x,1-x\rangle$$

AE 的中点是

$$T=(A+E)/2=\langle 1/2,x/2,(1-x)/2\rangle$$

由于 G 在 CT 和 AB 上,因而

$$G=\langle 1/(1+x),x/(1+x),0\rangle$$

这样,CG 的中点是

$$S=\langle 1/(2+2x),x/(2+2x),1/2\rangle$$

因为 F 在 BS 和 AC 上,因此

$$F=\langle 1/(2+x),0,(1+x)/(2+x)\rangle$$

因而 BF 的中点是

$$R=\langle 1/(4+2x),1/2,(1+x)/(4+2x)\rangle$$

而 A,T,R,E 的共线性蕴涵着$x^2+x-1=0$,或者 $x=(\sqrt{5}-1)/2$.

最后得到 $\triangle RST$ 的面积为

$$\begin{vmatrix} R \\ S \\ T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3-\sqrt{5})/4 & 1/2 & (-1+\sqrt{5})/4 \\ (-1+\sqrt{5})/4 & (3-\sqrt{5})/4 & 1/2 \\ 1/2 & (-1+\sqrt{5})/4 & (3-\sqrt{5})/4 \end{vmatrix} = \frac{7-3\sqrt{5}}{4}$$

解法 5 参考图 2，Stewart 定理①叙述为

$$t^2(m+n) = a^2n + b^2m - mn(m+n) \qquad ①$$

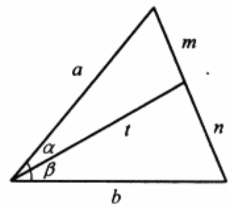


图 2

利用仿射变换，我们不妨假设 $\triangle ABC$ 是等边的，边长为 s. 我们需要计算比值：$\triangle RST$ 的面积 /$\triangle ABC$ 的面积. 正如在解法 1 中所指出的，$x = y = z = (3-\sqrt{5})/2$，因而

$$\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AG} = s(3-\sqrt{5})/2$$

因而 $\triangle RST$ 是等边的，且所求的比值为 $\overline{TR}^2/s^2$.

在 $\triangle ABC$ 中对 AE(作为 t) 就用式 ①，我们得到

$$\overline{AE} = s\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

注意 $\overline{BF} = \overline{AE}$，并在 $\triangle ABF$ 中对 AR 应用 ①，我们得到 $\overline{AR} = s/\sqrt{2}$.

然后，利用 $\sqrt{3-\sqrt{5}/2} = \sqrt{5} - (1/2)$，我们得到

$$\frac{\overline{TR}^2}{s^2} = \frac{(\overline{AR} - \overline{AE}/2)^2}{s^2} = 7 - \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

解法 6 从上一幅图形(见解法 5) 的记号集中，利用一个熟知的关系式我们看到

$$\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta} = \frac{m}{n} \qquad ②$$

(这是在两个较小的三角形中应用正弦定律的一个简单的推论.)

在 $\triangle ABC$ 中对 AE 应用 ②，在 $\triangle ABF$ 中对 AR 应用 ②，并利用解法 1 中引进的记号 x, y, z，我们有

$$\frac{\overline{AB}\sin\angle BAE}{\overline{AC}\sin\angle EAC} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{x}{1-x}, \frac{\overline{AB}\sin\angle BAE}{\overline{AF}\sin\angle EAC} = \frac{\overline{BR}}{\overline{RF}} = 1$$

因而 $\qquad 1 - y = x/(1-x)$

对称地有 $\qquad 1 - z = y/(1-y)$

和 $\qquad 1 - x = z/(1-z)$

解此方程组(并利用 $x < 1$)，我们得到 $x = y = z = (3-\sqrt{5})/2$.

---

① Stewart 定理：D 为 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的内(外) 分点，若 $BD : DC = m : n$，则

$$nAB^2 \pm mAC^2 = nBD^2 \pm mDC^2 + (n \pm m)AD^2$$

其中 ± 分别相应于 D 是 BC 的内、外分点两种情况.

因此，在 D 为内分点的情形，若 $BD = m, DC = n$，即得 ①.——译者注

A－5 证明：存在唯一的整数对 a,n，使得

$$a^{n+1}-(a+1)^n=2\,001$$

解 假设 a,n 是正整数，并且

$$a^{n+1}-(a+1)^n=2\,001$$

在模 a 下看此方程，我们看到 a 整除 2 002．在模 3 下看此方程，我们看到 $a\equiv 1(\bmod 3)$，并且 n 是偶数．在模 $a+1$ 下看此方程，我们看到 $a+1$ 整除 2 002．这样，对于任何解，a 和 $a+1$ 必定是 2 002 的因子．因为 $2\,002=2\times 7\times 11\times 13$，我们知道 a 只可能是 1 和 13．可以很快地排除 $a=1$ 的情形．

$a=13,n=2$ 是一组解．为了看到这是唯一的一组解，我们注意到当 n 大时，$13^{n+1}-14^n$ 是负的，因此只须对有限多个 n 验证即可．事实上，由于上述理由，n 必须满足

$$13>(14/13)^n$$

利用 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 级数我们知道

$$\ln(14/13)>\frac{1}{13}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13^2}$$

以致
$$13\ln(14/13)>1-\frac{1}{26}$$

由此我们看到
$$52\ln(14/13)>3$$

因为 $\ln 13<3$，n 必定小于 52．（或者，我们可以利用二项式展开中的前四项而得到 $(1+1/13)^{52}>13$）从方程

$$13^{n+1}-14^n=2\,001(\bmod 5),(\bmod 9),(\bmod 11)$$

我们分别得到 $n\equiv 2(\bmod 4)$，$n\equiv 2(\bmod 6)$，和 $n\equiv 2(\bmod 10)$，因而 $n\equiv 2(\bmod 60)$．这样，n 的唯一可能性是 2．

（或者，我们可以通过考虑模 13^2 的方程来解模 13 的 n，再考虑模 14^2 的方程来解模 14 的 n，而得到 $n\equiv 2(\bmod 182)$．通过这个途径，我们可以得到 n 的一个较大的界；这是容易做到的，因为 $(14/13)^{182}>1+182/13=15$．）

A－6 在半径为 1 的圆中的一段抛物线能否有长度大于 4 的弧？

解 是的，存在这样的抛物线．代替考虑单位圆，我们把该抛物线固定为 $y=x^2$，并证明，被某个圆 $x^2+(y-a)^2=a^2$ 所截的此抛物线弧段的长度超过 $4a$．两条曲线相交于 $(0,0)$ 和 $(\pm\sqrt{2a-1},2a-1)$（我们只考虑 $a>1/2$）．这样，所截的抛物线

弧段的长度为

$$2\int_0^{\sqrt{2a-1}}\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{2a-1}}(\sqrt{1+4x^2}-2x)\mathrm{d}x + 2\int_0^{\sqrt{2a-1}}2x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{2a-1}}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\mathrm{d}x + 2(2a-1)$$

因为$\int_0^{\infty}1/(\sqrt{1+4x^2}+2x)\mathrm{d}x$发散(例如,与$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x/x$比较),因此,对于适当大的 a,所求弧长超过

$$2+2(2a-1)=4a$$

B－1　令 n 是一个正偶数.把数 $1,2,\cdots,n^2$ 写入一个 $n\times n$ 格子盘中的方块里,命名得第 k 行自左至右为

$$(k-1)n+1,(k-1)n+2,\cdots,(k-1)n+n$$

把格子盘的所有方块染色,命名得每一行、每一列的一半方块染红色,其余一半染黑色(国际象棋盘的染色即是一种可能性).证明:对于每个这样的染色法,在红方块上的数之和等于在黑方块上的数之和.

解　一种染色法可等同于一个 $n\times n$ 的(0,1)矩阵,根据某一方块是红色或黑色来确定相应的坐标是1或0.所得到的矩阵有等于 $n/2$①的行和与列和,因而由 G.Birkhoff 的一个定理(Hall 的匹配定理的一个推论),它是 $n/2$ 个置换矩阵的和.置换矩阵中相应的数之和为

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)n+\sum_{j=1}^{n}j$$

因而红色方块中诸数之和是 $n/2$ 乘以这个和数

$$\text{红色数和}=\frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n^2}k=\text{黑色数和}$$

B－2　求满足方程组

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=2(y^4-x^4)$$

的所有实数对(x,y).

① 此处原文误为“n”.——校者注

解 (将题目中的两个方程)相加和相减,再对所得结果分别乘以 x 和 y,得到等价的方程组

$$x^5+10x^3y^2+5xy^4=2$$
$$5x^4y+10x^2y^3+y^5=1$$

把此两方程相加和相减,得到

$$(x+y)^5=3,(x-y)^5=1$$

由此即得 $$x=\frac{3^{1/5}+1}{2},y=\frac{3^{1/5}-1}{2}$$

(其他的复根对于 x 和 y 不给出实解)

B-3 对任意正整数 n,令$\langle n\rangle$表示最接近$\sqrt{n}$的整数.求下列和式之值:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\langle n\rangle}+2^{-\langle n\rangle}}{2^n}$$

解 令 S_k 是所求值的和式中使得$\langle n\rangle=k$的n的贡献.由于

$$\langle n\rangle=k\Leftrightarrow k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$(k-1)k<n\leqslant k(k+1)$$

即得

$$S_k=\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}\frac{2^k+2^{-k}}{2^n}=(2^k+2^{-k})\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}\frac{1}{2^n}=$$
$$(2^k+2^{-k})\left(\left(\frac{1-(1/2)^{k^2+k+1}}{1/2}\right)-\left(\frac{1-(1/2)^{k^2-k+1}}{1/2}\right)\right)=$$
$$2(2^k-2^{-k})(2^{-k^2+k-1}-2^{-k^2-k-1})=$$
$$2(2^{-(k-1)^2}-2^{-(k+1)^2})$$

诸 S_k 的和给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\langle n\rangle}+2^{-\langle n\rangle}}{2^n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}S_k=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}2(2^{-(k-1)^2}-2^{-(k+1)^2})=$$
$$\lim_{N\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2}-2^{-N^2}-2^{-(N+1)^2}\right)=3$$

B - 4　令 S 表示异于 $-1,0,1$ 的所有有理数的集合. 以 $f(x) = x - (1/x)$ 定义映射 $f: S \to S$. 证明下式成立或不成立

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S) = \varnothing$$

其中 $f^{(n)} = \underbrace{f \cdot f \cdot \cdots \cdot f}_{n个f}$. (注: $f(S)$ 表示对于所有的 $s \in S$, $f(s)$ 的集合)

证明　我们来证明(题中的)交集是空集.

只须证,如果 p,q 是整数,且 $p/q \in f^{(n)}(S)$,则 $|pq| > 2^n$.

此结果对于 $n = 0$ 成立(无意义).

假设此结果对于 $n = k$ 成立,并且 $p/q \in f^{(k+1)}(S)$,那么 $p/q = (r^2 - s^2)/rs$, 其中 $r/s \in f^{(k)}(S)$. 我们不妨假设 $\gcd(r,s) = 1$,因此 $\gcd(r^2 - s^2, rs) = 1$. 这样

$$|pq| \geqslant |r-s| \cdot |r+s| \cdot |r| \cdot |s| > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

因而由归纳法即得论断.

B - 5　令 a,b 是区间 $(0,1/2)$ 中的实数,并令 g 是一个连续函数,使得对所有的实数 x,有 $g(g(x)) = ag(x) + bx$. 证明:对于某个常数 c,有 $g(x) = cx$.

解　我们证明,恰好存在两个这样的函数,即 $g_1(x) = \rho_1 x$ 和 $g_2(x) = \rho_2 x$,其中 ρ_1, ρ_2 是 $x^2 - ax - b$ 的两个零点.

所给的条件蕴涵着 g 是一对一的;事实上,如果 $g(x) = g(y)$,那么 $g(g(x)) = g(g(y))$,因而 $bx = by$,而这蕴涵着 $x = y$. 因为 g 是连续的和一对一的,所以 g 是单调的. 题设条件亦蕴着 g 是(上和下)无界的. 因为,否则即存在一个序列 (s_n),满足 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} g(s_n) = B \neq \pm\infty$. 但这导致矛盾

$$g(g(B)) - ag(B) = \lim_{n\to\infty} g(g(s_n)) - a(g(s_n)) = \lim_{n\to\infty} bs_n = \pm\infty$$

因而 g 是可逆的.

我们有

如果 g 是增函数,那么对所有的 x,有

$$\operatorname{sign}(x - g(x)) = \operatorname{sign}(g(x) - g(g(x)))$$

如果 g 是减函数,那么对所有的 x,有

$$\operatorname{sign}(x - g(x)) = -\operatorname{sign}(g(x) - g(g(x)))$$

对所有的 t,存在唯一的 $\alpha(t), \beta(t)$,使得

$$t = \alpha(t) + \beta(t)$$

$$g(t)=\alpha(t)\rho_1+\beta(t)\rho_2$$

因而

$$g(g(t))=a(\alpha(t)\rho_1+\beta(t)\rho_2)+b(\alpha(t)+\beta(t))=\alpha(t)\rho_1^2+\beta(t)\rho_2^2$$

由此即得,对所有的 t,有

$$\alpha(g(t))=\rho_1\alpha(t),\beta(g(t))=\rho_2\beta(t)$$

因而对所有的 t 和所有的 n 有

$$\alpha(g^n(t))=\rho_1^n\alpha(t),\beta(g^n(t))=\rho_2^n\beta(t)$$

固定 t_0,对所有的 n 令

$$t_n=g^n(t_0)=\alpha(t_0)\rho_1^n+\beta(t_0)\rho_2^n$$

这样 $t_n-g(t_n)=\alpha(t_0)(1-\rho_1)\rho_1^n+\beta(t_0)(1-\rho_2)\rho_2^n$

那么,如果 $\alpha(t_0)\neq 0$,对于大的 n 有

$$\operatorname{sign}(t_n-g(t_n))=\operatorname{sign}(\alpha(t_0))=\operatorname{sign}(g(t_n)-g(g(t_n)))$$

同时,如果 $\beta(t_0)\neq 0$,对于有大绝对值的负的 n 有

$$\operatorname{sign}(t_n-g(t_n))=\operatorname{sign}((-1)^n\beta(t_0))=-\operatorname{sign}(g(t_n)-g(g(t_n)))$$

因而,如果 g 是增函数,那么 $\beta(t_0)=0$,此时 $g(t_0)=\rho_1t_0$;另一方面,如果 g 是减函数,那么 $\alpha(t_0)=0$,此时 $g(t_0)=\rho_2t_0$.

因而,或者对所有 x 有 $g(x)=\rho_1x$,或者对所有 x 有 $g(x)=\rho_2(x)$.

B－6 假设 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 是正实数的一个增序列,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/n)=0$.是否存在无穷多个正整数 n,使得对 $i=1,2,\cdots,n-1$,有

$$a_{n-i}+a_{n+i}<2a_n$$

解 在平面上考虑点集 $\{(n,a_n)\}$ 的凸包.对于①每个实数 $x\geqslant 1$,令 $f(x)$ 是使得 (x,y) 在此凸包中的最大的 y 值.那么,$f(x)$ 是连续的、分段线性的、增加的和下凹的函数.此外,f 的图形有无穷多个顶点,即在该处 f 不可微的那些点.这样的点必定出现在原点 (n,a_n),过程即从这些点开始,并且这些 n 即满足问题的条件.

① 原文此处把 y 直接写为 $f(x)$.—— 校者注

第63届美国大学生数学竞赛

A-1　令 k 是一个固定的正整数，$1/(x^k-1)$ 的 n 阶导数有形式 $P_n(x)/(x^k-1)^{n+1}$，其中 $P_n(x)$ 是一个多项式．求 $P_n(1)$．

解　求导数给出

$$P_{n+1}(x)=(x^k-1)P'_n(x)-(n+1)kx^{k-1}P_n(x)$$

以致

$$P_{n+1}(1)=-k(n+1)P_n(1)$$

因为 $P_0(1)=1$，因而由归纳法得

$$P_n(1)=(-k)^n n!$$

A-2　在一个球面上任意给定5个点．证明：其中必有4个点位于一个闭的半球面上．

解　考虑通过给定5点中的任意一对点的一个大圆，则球面被此大圆分成两个闭半球面，它们在此大圆上重叠．剩下来的3个点中至少有2个点必定位于这两个半径面中的一个上．这个半球面即至少包含了5个点中的4个点．

A-3　令 $n\geqslant 2$ 是一个整数，T_n 是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的某些非空子集 S 的个数，这种子集的元素的平均值是整数．证明：T_n-n 总是偶数．

解　如果 a 是 S 中元素的平均值，则 $n+1-a$ 即是集合 $S^*=\{n+1-s\mid s\in S\}$ 元素的平均值．这样，T_n 等于集合对 $\{S,S^*\}$（其中 $S\neq S^*$）的数目与 U_n 之和，U_n 是满足条件 $S=S^*$ 的非空集合 S 的数目．因而，$T_n\equiv U_n \bmod 2$．

这样，如果 $S\in U_n$ 并且 $s\in S$，则 $n+1-s\in S$，以致 S 元素的平均值是 $(n+1)/2$．因而如果 n 是偶的，则 $U_n=0$，即得结论．如果 n 是奇的，则 S 是在

$$\{\{1,n\},\{2,n-1\},\{3,n-2\},\cdots,$$

$$\{(n-1)/2,(n+3)/2\},\{(n+1)/2\}$$

的一个非空子集中元素的并.这样

$$U_n = 2^{(n+1)/2} - 1 \equiv 1 \pmod 2$$

亦可得结论.

A－4 在行列式游戏 Tic-Tac-Toc 中,游戏者 1 在一个空的 3×3 矩阵中填入一个 1.游戏者 0 在某个空位置填入一个 0,游戏这样继续下去,直到 3×3 矩阵被填入 5 个 1 和 4 个 0.如果此矩阵的行列式为 0,则游戏者 0 胜;否则,游戏者 1 胜.假设两个游戏者都采取最优策略,谁将赢?如何赢?

解 游戏者 0 赢.如果游戏者 0 能够做好一行 0 或一列 0,或者一个 2×2 余子行列式 0,那么行列式将为 0(后一种情形是因为那样会出现相同的两行).由于行的交换及列的交换只影响行列式的符号,不失一般性,我们不妨假设游戏者 1 的第 1 次填入是在左上角.然后游戏者 0 可以把 0 填入中心格.由对称性,我们只须考虑游戏者 1 在左列中格,或者底行任何位置上的应答.游戏者 1 随后的每次填入都由避免产生任何一个 0 行或 0 列所指挥,而其结果总是一个 0 的 2×2 余子式.下述图形列出了 1 和 0 的每次步骤,游戏者 1 的步骤依 1,2,3,… 的次序进行,游戏者 0 的步骤依带圈的号码进行.

1	3	
2	①	④
4	②	③

1	4	
3	①	②
2	③	④

1	④	③
3	①	②
	2	4

1	③	④
3	①	②
	4	2

A－5．定义一个序列$\{a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$如下：$a_0=1$；对于每个整数$n\geqslant 0$，遵循规则$a_{2n+1}=a_n$，$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$．证明：每个正有理数都有下述集合中出现

$$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\mid n\geqslant 1\right\}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\cdots\right\}$$

解　我们对于满足$(A,B)=1$以及$A,B\geqslant 1$的A/B证明结论，关于$A+B$用归纳法．对于$A=B=1$，$a_0/a_1=1/1$．若$A>B$，选取n使得$a_{n-1}/a_n=(A-B)/B$，以致

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{A-B}{B}=\frac{A}{B}$$

若$A<B$，选取n使得$a_{n-1}/a_n=A/(B-A)$，以致

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n}=\frac{A}{B}$$

A－6　固定一个整数$b\geqslant 2$．令$f(1)=1$，$f(2)=2$，并且对每个$n\geqslant 3$定义$f(n)=nf(d)$，其中d是b进制中n的位数．对于怎样的b值，下述级数收敛？

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$$

解　注意

$$\sum_{b^{d-1}\leqslant n<b^d}\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(d)}\sum_{b^{d-1}\leqslant n<b^d}\frac{1}{n}$$

事实上，由于

$$\sum_{n=A}^{B-1}\frac{1}{n}>\int_A^B\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

我们得到
$$\sum_{b^{d-1}\leqslant n<b^d}\frac{1}{f(n)}>\frac{\ln b}{f(d)}$$

对所有$d\geqslant 1$求和，我们得到

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{f(n)}=\sum_{d\geqslant 1}\sum_{b^{d-1}\leqslant n<b^d}\frac{1}{f(n)}>\ln b\sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{f(d)}$$

由于$\ln 3>1$，这最后的不等式对于$b\geqslant 3$是无意义的，除非

$\sum_{n\geqslant 1}(1/f(n))$ 发散.

对于 $b=2$,我们注意,当 $d\geqslant 2$ 时

$$\sum_{2^{d-1}\leqslant n<2^d}\frac{1}{n}\leqslant\frac{2^{d-2}}{2^{d-1}}+\frac{2^{d-2}}{2^{d-1}+2^{d-2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

因而

$$\sum_{2^{d-1}\leqslant n<2^d}\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(d)}\sum_{2^{d-1}\leqslant n<2^d}\frac{1}{n}\leqslant\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{f(3)}$$

令 $a_1=4$,并且对 $k=1,2,3,\cdots$ 令 $a_{k+1}=2^{a_k-1}$,则由归纳法即得

$$\sum_{a_k\leqslant n<a_{k+1}}\frac{1}{f(n)}\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^k\frac{1}{f(3)}$$

这导致 $$\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{f(n)}\leqslant\frac{1}{f(3)}\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^k=\frac{5}{f(3)}$$

因而无穷和收敛.

B-1 Shanille O'keal 在篮球场上自由投篮.第 1 个投进了,第 2 个未进.并且,此后她进下一个球的概率等于此前她进球的比例.在她前 100 次投篮恰好 50 个进球的概率是多少?

解 假设序号为 $1<i_2<i_3<\cdots<i_m$ 的那些投篮命中了,而序号为 $2<j_2<j_3<\cdots<j_n$ 的那些投篮未命中,则此事件发生的概率是

$$\frac{1}{i_2-1}\cdot\frac{2}{i_3-1}\cdot\frac{3}{i_4-1}\cdot\cdots\cdot\frac{m-1}{i_m-1}\cdot\frac{1}{j_2-1}\cdot\frac{2}{j_3-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{j_n-1}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(m+n-1)}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

选择 $\{i_2,\cdots,i_m\}\subseteq\{3,\cdots,m+n\}$ 的数目是 $\binom{m+n-2}{m-1}$,因而总概率是

$$\binom{m+n-2}{m-1}\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{1}{m+n-1}$$

B-2 考虑一个多面体,它至少有 5 个面,并且其每个顶点都恰好有 3 条边通过.两个游戏者玩下述游戏:

两个游戏者依次把自己的名字写在先前未写名字的面上.胜利者是首先在具有公共顶点的 3 个面上写上自己的名字者.

证明:首先写名字的游戏者将总是赢者,如果他使用最优策略的话.

解 注意:问题的叙述中应该包括如下约定:任何两个面不

能有多于一条的公共边.

称两位游戏者为游戏者 A 和游戏者 B.游戏者 A 在边数最多的那个面写上自己的名字.如果该面有至少4条边,那么无论游戏者 B 在哪个面上写名字,接着 A 总能够在与其第1次写名字的面相邻,但不与 B 写名字的面相邻的面上再写上自己的名字.但此时与 A 已写了名字的两个面相邻的还有两个未曾写名字的面,因而无论 B 选择哪一个面再写名字,A 必可在另一个面写名字,此时 A 赢.这样我们不妨假设每个面恰有3条边.

假定此多面体有 v 个顶点,e 条边和 f 个面.因为每个顶点的度为3,通过计算边数我们有 $3v = 2e$;类似地,因为每个面有3条边,我们有 $3f = 2e$.这样,如果此多面体可以被嵌入到一个亏格为 g 的曲面上,那么我们可以应用欧拉公式 $v - e + f = 2 - 2g$,以得知

$$v - e + f = v - 3v/2 + v = 2 - 2g \leqslant 2$$

这蕴涵着 $f = v \leqslant 4$,而这与题设(至少有5个面)矛盾.

B-3　对于所有整数 $n > 1$,证明

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{\mathrm{e}} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n\mathrm{e}}$$

解　若 $n > 1$,则

$$\mathrm{e}^{1/(n-1)} = 1 + 1/(n-1) + \cdots > n/(n-1)$$

它蕴涵着
$$(1 - 1/n)^{n-1} > 1/\mathrm{e}$$

因而
$$(1 - 1/n)^n > (1/\mathrm{e})(1 - 1/n)$$

由此即得所断言的上界.

至于下界,注意到①

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) < \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)\right) = \mathrm{e}^{-1}\exp\left(-\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)\right)$$

由于对于 $n \geqslant 1$ 有 $1/2n + 1/3n^2 < 1$,又由于当 $n \geqslant 2(> 1/(\sqrt{6} - 3/2))$ 时有

$$1/2n + 1/3n^2 < \sqrt{2/3} \cdot 1/n$$

所以
$$\exp\left(-\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)\right) < 1 - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2n}$$

① 下式中第二个"="应为"<".——译者注

因而 $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < e^{-1}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$
它蕴涵着下界.

B－4 在区间[1,2 002]中等可能性地随机选取一个整数 n，此数对你是未知的.你的任务是通过奇数次的猜测把 n 找出来.在每次猜错后，你被告知 n 是大些或小些，然后你必须再在那些可能正确的数中猜一个整数.证明：你有一个策略使你赢的机会大于2/3.

解 一种策略如下.对于 $k=0,1,2,\cdots$，以此为序或者预见选定的数 n 至多为 $3k$，且已被选中，或者你以 $3k+1$ 作为两次猜测中的第1次.这是一次奇数次的猜测，因而如果 $3k+1=n$，你就赢了.否则，$3k+1$ 将被宣布为太小，这样你就猜 $3k+3$.如果它是 n，你就输了；但如果说它太大，你猜 $3k+2$ 即赢，如果说它太小，你就再对 $k+1$ 的情形进行.这样，如果 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 或 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$，你即赢.由于 $2\ 002\equiv 1\mathrm{mod}\ 3$，这样就对于 $2\cdot 667+1=1\ 335$ 个 n 你会赢，并且
$$\frac{1\ 335}{2\ 002}=\frac{2\cdot 667+1}{3\cdot 667+1}>\frac{2}{3}$$

B－5 一个 b 进回文是一个正整数，它的 b 进表示在正向读和反向读时是一样的；例如，2 002是一个4位的10进回文.注意，200不是一个10进回文，但它在9进制中是3位的回文242，在7进制中是404.证明：存在一个整数，对于至少2 002个不同的 b 值，它是3位的 b 进回文.

解法1 让我们试一下形如 $1a1$ 的回文.注意，$n=b^2+ab+1$ 当且仅当 $n-1=b(b+a)$，所以我们希望找到一个数 n，使得 $n-1$ 至少有2 002个如 bc 形的因子分解，这里 $b\leqslant c<2b$.令 N 是一个整数，并令
$$n=(N+1)(N+2)\cdots(N+4\ 004)+1$$
如果 N 充分大，则我们有
$$R:=\frac{(N+2\ 003)(N+2\ 004)\cdots(N+4\ 004)}{(N+1)(N+2)\cdots(N+2\ 002)}<2$$
我们假设 N 至少这么大.对于满足 $1\leqslant j\leqslant 2\ 002$ 的 j，令 B_j 是 $(N+1)(N+2)\cdots(N+2\ 001)$ 与 $N+2\ 002+j$ 的乘积.记 n 为 A_jB_j+1，则 A_j 是一个整数，并且
$$1<\frac{A_j}{B_j}<R<2$$

现记 $A_j = B_j + a_j$,这使得 a_j 是整数,满足 $0 < a_j \leqslant B_j - 1$.这样,$n = B_j^2 + a_jB_j + 1$,以致 n 是一个 B_j 进制的 3 位回文.通过构造 $B_1 < B_2 < \cdots < B_{2\,002}$,我们得证.

解法2 b 进制中的一个3位回文具有形式 $n = ab^2 + cb + a$,其中 $1 \leqslant a \leqslant b - 1, 0 \leqslant c \leqslant b - 1$.选取整数 b 和 d,满足 $b \leqslant d \leqslant x/2b$ 以及 $x^{1/3} < b < x^{1/2}/2$,此时 $d \leqslant x/2b < b^2$.在 b 进制中我们把 d 写成 $ab + c$,仍满足 $1 \leqslant a \leqslant b - 1, 0 \leqslant c \leqslant b - 1$,因而

$$ab^2 + cb + a = bd + a \leqslant x/2 + b < x$$

我们推断:对满足 $x^{1/3} < b < x^{1/2}/2$ 和 $b \leqslant d \leqslant x/2b$ 的每一对整数 b 和 d,小于 x 的某数 n 有一个 3 位回文的表示.

这样,如果 $r(n)$ 是把 n 表为 3 倍回文的方式的数目,则

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) \geqslant \sum_{x^{1/3} < b < x^{1/2}/2} \sum_{b \leqslant d \leqslant x/2b} 1 > \sum_{x^{1/3} < b < x^{1/2}/2} \left(\frac{x}{2b} - b\right) \geqslant \frac{x}{12}(\ln x + O(1))$$

这蕴涵着
$$\max_{n \leqslant x} r(n) \geqslant \frac{1}{12}\ln x + O(1)$$
特别地,取 x 适当大,我们即得到,对某个 n,$r(n) \geqslant 2\,002$.

B-6 令 p 是一个素数.证明:矩阵

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix}$$

的行列式与形如 $ax + by + cz$ 的多项式的乘积模 p 同余,其中 a, b, c 是整数.(我们说两个整系数多项式模 p 同余,如果对应的系数模 p 同余)

解 用 $D(x, y, z)$ 表示该行列式,我们把它看成 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[x, y, z]$ 中的多项式.对于任意的 $a, b, c \bmod p$,我们有

$$ax^p + by^p + cz^p \equiv (ax + by + cz)^p \bmod p$$

并且类似地(通过把此同余式的两端都提升 p 次幂)有

$$ax^{p^2} + by^{p^2} + cz^{p^2} \equiv (ax + by + cz)^{p^2} \bmod p$$

我们有下述引理.

引理 如果 a, b, c 不是都为 $0 \bmod p$,则 $ax + by + cz$ 是 $D(x, y, z)$ 的一个因子.

先假定引理成立.则不同因子 $ax + by + cz$(即,没有两个是另一个的数量倍数)的数目是

$$(p^3-1)/(p-1)=p^2+p+1$$

即 $D(x,y,z)$ 的全次数,因而 $D(x,y,z)$ 是所有这样的(不同的)因子的乘积乘以某个常数.

引理的证明 我们有

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ ax^p+by^p+cz^p \\ ax^{p^2}+by^{p^2}+cz^{p^2} \end{pmatrix}\equiv$$

$$\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ (ax+by+cz)^p \\ (ax+by+cz)^{p^2} \end{pmatrix}\bmod p$$

考虑环 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[x,y,z]$ 的素理想 $I=(ax+by+cz)$. 商 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[x,y,z]/I$ 是一个整环. 从前面的讨论我们知道,在这个环中非 0 列向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 在给定的矩阵的零空间中,所以给定的矩阵必定有 0 行列式. 但是说行列式为零等于说 $D(x,y,z)$ 在 I 中;即,模 p 下它被 $ax+by+cz$ 整除.

第 64 届美国大学生数学竞赛

A－1　令 n 是一个固定的正整数.有多少种方式把 n 表为正整数的和

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

其中 k 是一个任意的正整数,并且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant a_1 + 1$.例如,当 $n = 4$ 时,有 4 种方式

$$4, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1$$

解　答案是 n.对于 $n = 1,2,3,4$,容易验证此结果成立.现假设对于 n 有 n 个解.对于 n 的一个解 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 相应于对于 $n+1$ 的一个解 $(a_2, \cdots, a_k, a_1 + 1)$,其中 $a_1 + 1 > 1$.反之,对于 $n+1$ 的一个解 $(b_1, \cdots, b_k)$(其中 $b_k > 1$),相应于对于 n 的一个解 $(b_k - 1, b_1, \cdots, b_{k-1})$.显然,这个对应是一对一的.但是对于 $n+1$ 恰好只存在一个另外形式的解,即都由 1 组成的解,所以由归纳法,对于 $n+1$ 解的数目是 $n+1$,因而证明即完成了.

A－2　令 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是非负实数.证明:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leqslant$$
$$((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n))^{1/n}$$

解法 1　如果有一 $a_i = 0$,那么不等式是平凡的,因而假设对于所有的 i 皆有 $a_i > 0$.除以 $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$,我们不妨假设每个 $a_i = 1$.对不等式两端取 n 次幂,其左端变为 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b_1 b_2 \cdots b_n)^{k/n}$,而右端变为 $\sum_{k=0}^{n} e_k$ 是诸 b_i 的第 k 个初等对称函数.对于 e_k 中的 $\binom{n}{k}$ 个被加数应用算术－几何平均不等式,我们得到

$$\left(b_1^{\binom{n-1}{k-1}} \cdots b_n^{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{1/\binom{n}{k}} \leqslant \frac{e_k}{\binom{n}{k}}$$

即
$$\binom{n}{k}(b_1b_2\cdots b_n)^{k/n}\leqslant e_k$$
对 k 求和即导致结论.

解法2 如果有一 $a_i=0$,那么不等式是平凡的,因而假设所有的 a_i 是正的.除以 $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$,并令 $x_i=b_i/a_i$,即把问题归结为证明
$$1+(x_1\cdots x_n)^{1/n}\leqslant((1+x_1)\cdots(1+x_n))^{1/n}$$
令 $x_i=\mathrm{e}^{t_i}$,并对不等式两端取对数,因为 ln 是增函数,因此我们看到上面的不等式等价于
$$\ln(1+\mathrm{e}^{(t_1+\cdots+t_n)/n})\leqslant\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\mathrm{e}^{t_i})\Big)\qquad(*)$$
令 $f(t)=\ln(1+\mathrm{e}^t)$,我们知道 $f''(t)=\mathrm{e}^t/(1+\mathrm{e}^t)^2\geqslant 0$,因而 f 是凸的,但是从 Jensen 不等式直接得到(*).

解法3 我们通过对 n 进行归纳来证明结论.$n=1$ 的情形结论显然为真,因而可以假设对于 $n-1$ 结论为真,并令 $p=n,q=n/(n-1)$.这样 $1/p+1/q=1$,并且
$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{1/n}=$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_i)^{1/(n-1)}\Big)^{(n-1)/n}(a_n+b_n)^{1/n}\geqslant$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{1/(n-1)}+\prod_{i=1}^{n-1}b_i^{1/(n-1)}\Big)^{(n-1)/n}(a_n+b_n)^{1/n}=\text{(由归纳法)}$$
$$\Big(\Big(\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{1/n}\Big)^q+\Big(\prod_{i=1}^{n-1}b_i^{1/n}\Big)^q\Big)^{1/q}((a_n^{1/n})^p+(b_n^{1/n})^p)^{1/p}\geqslant$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{1/n}\Big)(a_n^{1/n})+\Big(\prod_{i=1}^{n-1}b_i^{1/n}\Big)(b_n^{1/n})=\quad\text{(由 Hölder 不等式)}$$
$$\prod_{i=1}^{n}a_i^{1/n}+\prod_{i=1}^{n}b_i^{1/n}$$
由归纳法即完成了证明.

A－3 对于所有的实数 x,求下式的最小值
$$|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\mathrm{ces}\ x|$$

解 我们有
$$\tan x+\cot x+\sec x+\csc x=\frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=$$

$$\frac{(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)}{(\sin x\cos x)(\sin x+\cos x-1)}=\frac{2}{\sin x+\cos x-1}$$

这样,问题中的表达式即取形式 $f(t)=1+t+2/t$,其中 $t=\sin x+\cos x-1$.由于

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$$

我们只考虑在$[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$中的 t 值.因为 $f'(t)=1-2/t^2$,所以 f 在$(0,\sqrt{2}-1)$中是减函数.这样,若 $t>0$,则

$$f(t)\geqslant 1+\sqrt{2}-1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2+3\sqrt{2}$$

另一方面,若 $t<0$,则 f 在$[-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}]$上单调增,并在$[-\sqrt{2},0)$上单调减.于是,对于 $t<0$ 我们有 $f(t)\leqslant 1-2\sqrt{2}$,当 $t=-\sqrt{2}$ 时等号成立.

组合这两个事实,我们得到 $|f(t)|\geqslant 2\sqrt{2}-1$,右端即为所求的最小值.

A－4　假设 a,b,c,A,B,C 都是实数,$a\neq 0$ 并且 $A\neq 0$,使得对所有的实数 x 有

$$|ax^2+bx+c|\leqslant|Ax^2+Bx+C|$$

证明:

$$|b^2-4ac|\leqslant|B^2-4AC|$$

解法1　令 $f(x)=ax^2+bx+c$,$F(x)=Ax^2+Bx+C$,$d=b^2-4ac$,$D=B^2-4AC$.如果必要以 $-f$ 代替 f,我们不妨设 $a>0$.类似地,我们不妨设 $A>0$.

若 $D>0$,则 F 有两个不同的实根 r_1 和 r_2;取 $x=r_1$ 和 $x=r_2$,我们推得 f 也在 r_1,r_2 处为零.这样

$$f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$$

并且

$$F(x)=A(x-r_1)(x-r_2)$$

问题条件中所给出的不等式给出了 $a\leqslant A$,所以

$$d=a^2(r_1-r_2)^2\leqslant A^2(r_1-r_2)^2=D$$

若 $D\leqslant 0$,我们考虑两种情形.

i $d<0$.令 $x\to\infty$,我们得到 $0<a\leqslant A$.从

$$\min_{x为实数}F(x)=F\left(-\frac{B}{2A}\right)=-\frac{D}{4A}$$

$$\min_{x为实数}f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{d}{4a}$$

即得

$$-\frac{D}{4A}=F\left(-\frac{B}{2A}\right)\geqslant f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{d}{4a}$$

因而 $0\leqslant -d\leqslant -D$.

ii $d\geqslant 0$.由于对所有 x 有 $F(x)\pm f(x)\geqslant 0$,由此即得 $F\pm f$

的判别式是非正的.即

$$(B+b)^2-4(A+a)(C+c)\leqslant 0$$
$$(B-b)^2-4(A-a)(C-c)\leqslant 0$$

把这两个不等式相加,我们得到 $2(D+d)\leqslant 0$,这蕴涵着 $0\leqslant d\leqslant -D$.

解法 2 我们将需要下述引理:中心在原点,位于 $R=\{(x,y)\mid |xy|\leqslant 1\}$ 中的椭圆的最大面积是 2π.为了看到这一点,我们注意形如 $x'=kx,y'=y/k$ 的变换,它保积且把 R 映为其自身.选取 $k^2=\sqrt{A/C}$,这导致一个变换,它把椭圆 $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ 映为有相同面积的椭圆 $\sqrt{AC}x'^2+Bx'y'+\sqrt{AC}y'^2=1$,并且后者的轴在两条直线 $y=\pm x$ 上.由于在 R 中满足条件的椭圆显然是圆周 $x^2+y^2=2$,引理即被证明.

通过一个 $\pi/4$ 的旋转和一个仿射伸缩,用相同的方法我们发现,对于 $r,s>0$,位于 $\{(x,y)\mid |rx^2-sy^2|\leqslant 1\}$ 中具有最大面积的椭圆是 $rx^2+sy^2=1$,其面积为 $\pi/\sqrt{rs}$.因为 $rx^2+sy^2=1$ 也是位于 $\{(x,y)\mid |rx^2+sy^2|\leqslant 1\}$ 中具有最大面积的椭圆,因此我们就得到结论:中心在原点,位于区域 $\{(x,y)\mid |\lambda_1x^2+\lambda_2y^2|\leqslant 1\}$ 中的椭圆的最大面积是 $\pi/\sqrt{|\lambda_1||\lambda_2|}$.在适当的解释下,当 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=0$ 时此结论也成立.

现在来证明本题结论.定义二次型 $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 和 $Q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$.我们的问题假设中的条件蕴涵着

$$\{(x,y)\mid |Q(x,y)|\leqslant 1\}\subset\{(x,y)\mid |q(x,y)|\leqslant 1\}$$

用标准的方法把二次型 $Q(x,y)$ 对角化,我们可以写成 $Q(x,y)=\mu_1v^2+\mu_2w^2$,其中 μ_1 和 μ_2 是

$$\begin{pmatrix} A & B/2\\ B/2 & C\end{pmatrix}$$

的特征值(必定是实的),而 (v,w) 是 (x,y) 围绕原点的一个确定的旋转的结果.注意,$\mu_1\mu_2=AC-(B^2/4)$.由于三角不等式

$$|\mu_1v^2+\mu_2w^2|\leqslant|\mu_1|v^2+|\mu_2|w^2$$

所以我们考虑二次型

$$Q'(x,y)=|\mu_1|v^2+|\mu_2|w^2$$

椭圆(或者,当 μ_1 或 μ_2 为零时为极限带) $Q'(x,y)\leqslant 1$ 被包含在区域 $|q(x,y)|\leqslant 1$ 中.如前一样把 $q(x,y)$ 对角化,我们写为

$$q(x,y)=\lambda_1t^2+\lambda_2u^2$$

其中,$\lambda_1\lambda_2=ac-(b^2/4)$,并且 $\{(x,y)\mid |q(x,y)|\leqslant 1\}$ 是 $\{(t,u)\mid |\lambda_1t^2+\lambda_2u^2|\leqslant 1\}$ 的一个旋转.从上述关于椭圆最大面积的讨论,我们得到

$$\frac{2\pi}{\sqrt{|4AC-B^2|}}=\frac{\pi}{\sqrt{|\mu_1\mu_2|}}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{|\lambda_1\lambda_2|}}=\frac{2\pi}{\sqrt{|4ac-b^2|}}$$

由此即得问题中叙述的不等式.

A－5　一条 Dyck$n$－路是一条具有 n 个上行(1,1)和 n 个下行(1,－1)的格点路,它从原点出发,并且总不落到 x 轴之下.一个回归是相连下行的一个最大序列,它结束于 x 轴上.例如,图1中的 Dyck 5－路有两个回归,长度分别是3和1.证明:在无长度为偶数回归的 Dyck n－路的集合与 Dyck $(n-1)$－路的集合之间有一个一一对应.



图 1

解　我们在(所要求对应的)两个集合之间构作一个一一映射.假设一个给定的 Dyck n－路没有偶数长度的回归.如果它以 $UD\ldots$ 开始①,只须把初始的 UD 去掉即得到一个 Dyck $(n-1)$－路.否则,它以 UU 开始,因而在之后必定以 DD 回到 x 轴,事实上,因为此路没有偶数长度的回归,因此必定以 DDD 回到 x 轴.这样,它的第一次回归到 x 轴上其长度必定至少是3.现在,去掉此路的第一步 U 和这个回归中的最后一步 D,其结果再一次是一个 Dyck $(n-1)$－路.与第一个情形不同,这次所得到的路包含了一个偶数长度的回归.这个映射即为我们所希望的一一对应.反之,假设 P 是一个给定的 Dyck $(n-1)$－路.如果 P 没有偶数长度的回归,加 UD 于 P 之首;否则,找出 P 从开始到最后一个偶数长度回归的这一端,并"提升"它,即,把 U 放在此段前,而 D 置于其后.

A－6　对于非负整数的一个集合 S,令 $r_S(n)$ 表示有序对 (s_1,s_2) 的数目,它们满足 $s_1\in S,s_2\in S,s_1\neq s_2$,并且 $s_1+s_2=n$.是否能把所有的非负整数分成两个集合 A 和 B,使得对所有的 n 有 $r_A(n)=r_B(n)$?

解　可以的,并且除了 A 和 B 互换外只有唯一一种方式.假设 A 和 B 是这样的一个分法.令 $f(z)=\sum\limits_{a\in A}z^a,g(z)=\sum\limits_{b\in B}z^b$②.在 $f(z)^2$ 中 z^n 的系数是有序对 (a_1,a_2) 的数目,其中 $a_1,a_2\in A$,使得 $a_1+a_2=n$.这里有可能 $a_1=a_2$.为了消去这种情形,减去 $f(z^2)$,因而

$$f(z)^2-f(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}r_A(n)z^n,g(z)^2-g(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}r_B(n)z^n$$

① 文字 U 和 D 分别表示"上行"和"下行".—— 译者注
② 此处出现的 z 均应满足 $|z|<1$.—— 校者注

这两个函数必定是恒等的,因而

$$(f(z)-g(z))(f(z)+g(z))=f(z^2)-g(z^2)$$

"A 和 B 分割了非负整数集"这一事实蕴涵了

$$f(z)+g(z)=1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z}$$

最后两个方程蕴涵

$$f(z)-g(z)=(1-z)(f(z^2)-g(z^2))$$

用 z^2 代替 z,并把新得的恒等式代进原来的恒等式,即得

$$f(z)-g(z)=(1-z)(1-z^2)(f(z^4)-g(z^4))$$

进行迭代,我们发现对于每个正整数 K 有

$$f(z)-g(z)=\Big(\prod_{k=0}^{K-1}(1-z^{2^k})\Big)(f(z^{2^K})-g(z^{2^K}))$$

令 A 是包含 0 的那个集合.则 $\lim\limits_{K\to\infty}f(z^{2^K})=1$,并且 $\lim\limits_{K\to\infty}g(z^{2^K})=0$.这样

$$f(z)-g(z)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-z^{2^k})$$

若 $w(n)$ 表示 n 的二进制表示中 1 的个数,那么上面恒等式的右端即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{w(n)}z^n$.我们推断,$A$ 是使得 $w(n)$ 是偶数的非负整数的集合,而 B 是使得 $w(n)$ 是奇数的非负整数的集合.

B-1　是否存在多项式 $a(x),b(x),c(y),d(y)$,使得

$$1+xy+x^2y^2=a(x)c(y)+b(x)d(y)$$

成为恒等式?

解　不存在这样的多项式.为了看到这点,假设存在这样的多项式.记 $a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 和 $b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$.(在所要求的恒等式中)令 $1,x,x^2$ 的系数分别相等,我们得到方程组

$$1=a_0c(y)+b_0d(y)$$
$$y=a_1c(y)+b_1d(y)$$
$$y^2=a_2c(y)+b_2d(y)$$

因为 $c(y)$ 和 $d(y)$ 在 Q 上张成 $Q[y]$ 的一个至多二维的子空间,$\{1,y,y^2\}$ 被包含在这个子空间中;但是多项式 $1,y,y^2$ 是线性无关的.这是一个矛盾.因此上述方程组无解.

B－2　令 n 是一个正整数.从序列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$ 开始,取其相邻两项的平均值,形成一个具有 $n-1$ 项的新序列 $\frac{3}{4},\frac{5}{12},\cdots,\frac{2n-1}{2n(n-1)}$.对第 2 个序列相邻两项取平均值,得到一个具有 $n-2$ 项的第 3 个序列.继续下去,直到最后得到的序列由一个数 x_n 组成.证明:$x_n<2/n$.

解　更一般地,关于序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 来实施过程.相继的序列形成后,其中第 k 个序列的第一项即为在乘积

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{k-1}(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1})$$

中 x^{k-1} 的系数.因而,第 n 个序列的单独的项即为在乘积

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{n-1}(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1})=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1}\sum_{r=1}^{n}a_rx^{r-1}=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r+1}x^r$$

中 x^{n-1} 的系数.在这个表达式中 x^{n-1} 的系数是

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{1}{n-i}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-i-1}\frac{1}{n-i}=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n-i}=$$

$$\frac{1}{n2^{n-1}}(2^n-1)<\frac{2}{n}$$

B－3　对于每个正整数 n,证明

$$n!=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{lcm}\{1,2,\cdots,[n/i]\}$$

(这里 lcm 表示最小公倍数,而$[x]$表示不超过 x 的最大整数.)

解　对每个素数 p,令 $v_p(n)$ 表示使得 p^r 整除 n 的最大指数 r,则

$$v_p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

形成一个所谓的 Ferrers 图表,它是由一些点组成的左对齐的行,第 1 行有$[n/p]$个点,第 2 行有$[n/p^2]$个点,如此等等.我们断言,$v_p(\mathrm{lcm}\{1,2,\cdots,[n/j]\})$ 等于这个 Ferrers 图表第 j 列中点的数目.

因而,整除要证明的恒等式左端和右端的 p 的最大幂都等于这个 Ferrers 图表中点的数目. 因为对于每个 p 都是这个情形,因而要证明的恒等式成立. 为了验证断言,固定 n,固定 p,并令 r_j 表示使得 $p^r \leqslant n/j$ 的最大指数 r. 显然,$v_p(\operatorname{lcm}\{1,2,\cdots,[n/j]\}) = r_j$. 对于每个 $j \geqslant 1$,只要 $p^i \leqslant n/j$,即有 $[n/p^i] \geqslant j$,因而这样的 i 中的最大者是 r_j. 这意味着,对于行 $i = 1,2,\cdots,r_j$,在图表的第 j 列恰有点存在,这就建立了断言.

B-4 令 $f(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)$,其中 a,b,c,d,e 是整数,$a \neq 0$. 证明:如果 $r_1 + r_2$ 是有理数,并且 $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$,那么 $r_1 r_2$ 是有理数.

解 令

$$t = r_1 + r_2$$

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -b/a$$

$$\sigma_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = c/a$$

$$\sigma_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -d/a$$

$$\sigma_4 = r_1 r_2 r_3 r_4 = e/a$$

这些量都是有理的,因而 $r_3 + r_4 = \sigma_1 - t$ 也是有理的. 我们注意到

$$(r_1 + r_2)(r_3 + r_4) = \sigma_2 - r_1 r_2 - r_3 r_4$$

即

$$r_1 r_2 + r_3 r_4 = t^2 - \sigma_1 t + \sigma_2 \qquad ①$$

另一方面

$$\sigma_3 = r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2)$$

这就是说

$$(\sigma_1 - t) r_1 r_2 + t r_3 r_4 = \sigma_3 \qquad ②$$

在 ① 和 ② 中,我们有 $r_1 r_2$ 和 $r_3 r_4$ 的两个不同的线性组合. 为了消去 $r_3 r_4$,我们用 t 乘以 ①,并从所得到的方程减去 ②,这给出

$$(2t - \sigma_1) r_1 r_2 = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$$

这里,右端和 $2t - \sigma_1$ 是有理的. 因而若 $2t - \sigma_1 \neq 0$,即若 $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$,则 $r_1 r_2$ 是有理的.

B - 5　令 A, B, C 是圆心在原点 O 的单位圆周上的等距离点,并令 P 是圆的任意一个内点.令 a, b, c 分别是 P 到 A, B, C 三点的距离.证明:存在一个以 a, b, c 为边长的三角形,其面积仅依赖于从 P 到 O 的距离.

解　用复数表示平面中的点,我们不妨取 $A = 1, B = \omega$,以及 $C = \omega^2$,其中 $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ 是 1 的一个三次根.这样,题中所述 3 条线段分别有长度 $|P - 1|, |P - \omega|, |P - \omega^2|$.考虑 Möbius 变换

$$T\zeta = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}$$

那么

$$T\omega = (1 + \omega)/(1 - \omega) = i/\sqrt{3}$$

因而 $T\omega^2 = T\overline{\omega} = -i/\sqrt{3}$.并且

$$T\zeta_2 - T\zeta_1 = \frac{2(\zeta_2 - \zeta_1)}{(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2)}$$

取 ζ_1 和 ζ_2 为 P, ω, ω^2 中的两个,并把 P 写为 z,我们即看到,以 $Tz, T\omega, T\overline{\omega}$ 为顶点的三角形有边长

$$\frac{2|\omega - z|}{\sqrt{3}|1 - z|}, \frac{2|\overline{\omega} - z|}{\sqrt{3}|1 - z|}, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

这正是题中所希望的边长各乘以因子 $2/(\sqrt{3}|1 - z|)$.这就建立了题中的第 1 个论断.

由于 $\triangle_{Tz, T\omega, T\overline{\omega}}$ 的一条边位于虚轴上,对此三角形的面积用公式 $bh/2$,则我们要求的面积为

$$\left(\frac{\sqrt{3}|1 - z|}{2}\right)^2 \text{面积} \triangle_{Tz, T\omega, T\overline{\omega}} =$$

$$\frac{3|1 - z|^2}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{Re} \frac{1 + z}{1 - z}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \mathrm{Re} |1 - z|^2 \frac{1 + z}{1 - z} = \frac{\sqrt{3}}{4} \mathrm{Re}(1 + z)(1 - \overline{z}) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \mathrm{Re}(1 - |z|^2 + z - \overline{z}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - |z|^2)$$

这就建立了题中的第 2 个论断.

(注意:亦可在单位圆外取点 P,此时的面积为 $\sqrt{3}(|z|^2 - 1)/4$).

B－6 令 $f(x)$ 是定义在区间[0,1]上的一个实值连续函数.证明

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

解 令 $P=\{x\in[0,1] \mid f(x)\geqslant 0\}$，以及 $N=\{x\in[0,1] \mid f(x)<0\}$. 令 $P=\mu\rho, N=\mu\nu$（分别为 ρ 和 ν 的测度）. 若 $P=0$ 或 $N=0$，则不等式是显然的. 这样，我们不妨假设 $P>0$，且 $N>0$. 考虑 $|f|$ 在 ρ 和 ν 上的均值

$$\mu_p=\frac{1}{P}\int_\rho f(x)\mathrm{d}x,\mu_n=-\frac{1}{N}\int_\nu f(x)\mathrm{d}x$$

如果必要，以 $-f(x)$ 代替 $f(x)$，我们不妨假设 $\mu_p\geqslant\mu_n$. 显然

$$\iint_{\rho\times\rho}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2P^2\mu_p$$

$$\iint_{\nu\times\nu}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2N^2\mu_n$$

此外

$$\iint_{\rho\times\nu}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\left|\iint_{\rho\times\nu}(f(x)+f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=$$

$$|NP_{\mu_p}-NP_{\mu_n}|=NP(\mu_p-\mu_n)$$

并且在 $\nu\times\rho$ 上同样的积分不等式成立. 这样，题中左端的表达式大于或等于

$$2P^2\mu_p+2NP(\mu_p-\mu_n)+2N^2\mu_n=$$

$$P(\mu_p-\mu_n)+(2N-1)^2\mu_n+P\mu_p+N\mu_n\geqslant P\mu_p+N\mu_n=$$

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

第65届美国大学生数学竞赛

A－1　篮球明星 Shanille O'Keal 所属篮球队的统计员保留着成功自由投篮数 $S(N)$ 的记录，这个记录是她在赛季的前 N 次进攻中所做的. 在赛季的早期，$S(N)$ 不足 N 的 80%，但是在赛季的后期，$S(N)$ 超过 N 的 80%. 是否在其间一定存在一个时刻 $S(N)$ 恰好是 N 的 80%？

解　是的，令 N 是在赛季中使得 $S(N)/N \geqslant 4/5$ 的特定的区间中的最小整数. 这样

$$\frac{S(N-1)}{N-1} < \frac{4}{5} \leqslant \frac{S(N)}{N} \qquad ①$$

但是
$$S(N-1) = S(N) - 1$$
并且不等式
$$\frac{S(N)-1}{N-1} < \frac{4}{5}$$
等价于
$$5S(N) < 4N + 1$$
式 ① 中第 2 个不等式等价于 $5S(N) \geqslant 4N$. 这样
$$4N \leqslant 5S(N) < 4N + 1$$
因而 $5S(N) = 4N$.

A－2　对于 $i = 1,2$，令 T_i 是边长为 a_i, b_i, c_i，面积为 A_i 的三角形. 假设 $a_1 \leqslant a_2, b_1 \leqslant b_2, c_1 \leqslant c_2$，并且 T_2 且一个锐角三角形. 是否可得 $A_1 \leqslant A_2$？

解　是的. 令 α_i, β_i 和 γ_i 分别是边 a_i, b_i 和 c_i 所对的角，$i = 1, 2$. 由 $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi$ 即得下述 3 个不等式 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2, \beta_1 \leqslant \beta_2, \gamma_1 \leqslant \gamma_2$ 中至少有一个成立. 不失一般性，设 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ 成立. 但是 $\alpha_2 \leqslant \pi/2$，并且 $\sin x$ 在 $[0, \pi/2]$ 中单调增，因而

$$A_1 = \frac{1}{2} b_1 c_1 \sin \alpha_1 \leqslant \frac{1}{2} b_2 c_2 \sin \alpha_2 = A_2$$

A－3 由 $u_0=u_1=u_2=1$，然后再对所有的 $n\geqslant 0$ 由条件

$$\det\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix}=n!$$

定义一个序列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. 证明：对有的 $n\geqslant 0$，u_n 为整数.（按惯例，$0!=1$）

解 首先注意，对 $n=0,1,2$ 有 $u_nu_{n+1}=n!$. 假设它对于满足 $k\leqslant n$ 的所有 k 成立. 那么，由归纳假设我们看到

$$n!(n-1)!=u_nu_{n+1}\det\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} u_{n-1}u_n & u_nu_{n+1} \\ u_nu_{n+1} & u_{n+1}u_{n+2} \end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix} (n-1)! & n! \\ n! & u_{n+1}u_{n+2} \end{pmatrix}=$$

$$(n-1)!u_{n+1}u_{n+2}-n!n!$$

这就导致

$$u_{n+1}u_{n+2}=\frac{n!(n-1)!+n!n!}{(n-1)!}=$$

$$\frac{n!(n-1)!(n+1)}{(n-1)!}=(n+1)!$$

因而由归纳法，对所有 n 这个式子成立.

由此即得

$$\frac{u_n}{u_{n-2}}=\frac{u_nu_{n-1}}{u_{n-1}u_{n-2}}=\frac{(n-1)!}{(n-2)!}=n-1$$

或者，等价地

$$u_n=(n-1)u_{n-2}\qquad ,n\geqslant 2$$

反复应用这个恒等式即证明了对于 $n\geqslant 3$ 有

$$u_n=(n-1)!!=\begin{cases}(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1, & \text{若 } n \text{ 是偶数}\\ (n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2, & \text{若 } n \text{ 是奇数}\end{cases}$$

A－4 证明：对于任意正整数 n，存在一个整数 N，使得乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 恒可表示为下述形式

$$x_1x_2\cdots x_n=\sum_{i=1}^{N}c_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^n$$

其中，c_i 是有理数，而每个 a_{ij} 是 3 个数 $-1,0,1$ 之一.

解 我们证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}(x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k})^n=n!x_1x_2\cdots x_n$$

这里,左端是单项式 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ 的线性组合,其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$,对于 $\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_n)$,令 $J(\boldsymbol{a}) = \{j \mid a_j > 0\}$. 单项式 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ 出现在 $(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k})^n$ 的展开式中,当且仅当 $J(\boldsymbol{a}) \subseteq \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$,并且,当这个条件成立时,此单项式的系数为①

$$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n}$$

这样,我们所提出的恒等式的左端即为

$$\sum_{\substack{a \\ \sum a_i = n}} \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{J(\boldsymbol{a}) \subseteq \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}} 1$$

假设 $\operatorname{card}(J(\boldsymbol{a})) = r$($\operatorname{card}(J(\boldsymbol{a}))$ 为集合 $J(\boldsymbol{a})$ 的势②. 那么,当 $k < r$ 时上式中最内层的和式为 0,当 $k \geqslant r$ 时为 $\binom{n-r}{k-r}$. 这样

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{J(a) \subseteq \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}} 1 = & \sum_{k=r}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-r}{k-r} = \\ & \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^{n-r-j} \binom{n-r}{j} = \\ & (1-1)^{n-r} = \begin{cases}1, \text{若 } r = n \\ 0, \text{若 } r < n\end{cases}\end{aligned}$$

若 $r = n$,则对所有的 i 都有 $a_i = 1$,并且 $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n} = n!$,这样,我们即得所述的结果.

解法 2 令 $N = 2^{n-1}$. 对于 $i = 1,2,\cdots,N$,在二进制中写成

$$i - 1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} 2^{j-1} = (b_{in} b_{i(n-1)} \cdots b_{i2} b_{i1})_2$$

其中 $b_{ij} = 0$ 或 1,并且对所有 i,$b_{in} = 0$. 令 $a_{ij} = 1 - 2b_{ij}$;即,当 i 变动时,我们取前 $n-1$ 个 a_{ij} 为 ± 1 的所有组合,并且取 $a_{in} = 1$. 在 $(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n)^n$ 的展开式中,每一项即为单项式 $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$(它与 i 无关)(其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$)乘以系数

$$a_{i1}^{k_1} a_{i2}^{k_2} \cdots a_{in}^{k_n} \binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_n}$$

---

① 原文为 $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n}$,这与二项式系数 $\binom{n}{A}$ $(A = a_1 a_2 \cdots a_n)$ 易混淆. 因此我们把它改写为 $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n}$. 事实上,$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n} = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n - \sum_{j=1}^{k} a_j}{a_{k+1}}$(其中约是 $\sum_{j=1}^{0} a_j = 0$). —— 译者注

② 在现在的情形,即为 $J(\boldsymbol{a})$ 中元素的个数. —— 译者注

若 k_j 是偶数①,则 $a_{ij}^{k_j}=1$;否则 $a_{ij}^{k_j}=a_{ij}$.并且,在任何情形有 $a_{in}^{k_n}=1$.分别处理,$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 在每个被加项中的系数有相同的大小,与 i 无关,但有一个依赖于那些对 k_j 为奇数的 j 所作的 a_{ij} 乘积的正负号.因为和式 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 可能有 k_j 为奇数的 j 的相同的集合,因而可能有某些项,作为 i 的函数有相同的符号类型.令 $S_1,S_2,\cdots,S_N$ 表示 $X=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的 $N=2^{n-1}$ 个子集.对于每个 m,因为使得 $k_j(j<n)$ 是奇数的项当且仅当 $j\in S_m$,所以作为 i 的函数的符号类型是相同的,并且由 $\prod\limits_{j\in S_m}a_{ij}$ 给出.

总而言之,我们看到

$$(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^n=\sum_{m=1}^{N}t_{im}P_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

这里 $$P_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

以及 $t_{im}=\prod\limits_{j\in S_m}a_{ij}$,其中表示 P_m 的和式是对于满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=n$ 并且恰好在 $j\in S_m$ 时 $k_j(j<n)$ 是奇数的所有非负 k_j 而取的.

我们不妨取 $S_N=\{1,2,\cdots,n-1\}$,由于每个 k_i 是奇数且其和为 n 的唯一方式是每个 k_i 都等于 1,因此 $P_N(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n!\,x_1x_2\cdots x_n$.

这样,我们即看到,我们要求诸有理数 c_i 使得

$$\sum_{i=1}^{N}c_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^n=$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}c_it_{im}P_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$
$$\frac{P_N(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{n!}=x_1x_2\cdots x_n$$

也就是,我们要解

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)\boldsymbol{T}_n=(0,0,\cdots,0,1/n!)$$

其中 $\boldsymbol{T}_n=(t_{im})$ 是一个其元素为 1 或 -1 的 $N\times N$ 矩阵.因而,如果 $\boldsymbol{T}_n$ 是可逆矩阵时即有 $(c_1,c_2,\cdots,c_N)=(0,0,\cdots,0,1/n!)\boldsymbol{T}_n^{-1}$,因而诸 c_i 是有理数.

这就表明,对于诸集合 S_m 取相同的二元指标系统是不难的,即 $j\in S_m$,当且仅当 $b_{jm}=1$(即,当且仅当 $a_{jm}=-1$).这样,$N\times N$ 矩阵可用 4 块 $N/2\times N/2$ 矩阵表为

$$\boldsymbol{T}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{n-1} & \boldsymbol{T}_{n-1}\\ \boldsymbol{T}_{n-1} & -\boldsymbol{T}_{n-1}\end{pmatrix}$$

① 原文把本行 3 处 k_j 误为 k_i.—— 校者注

其第一个为 $\boldsymbol{T}_1=(1)$. 最后,我们看到

$$\det(\boldsymbol{T}_n)=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{n-1} & \boldsymbol{T}_{n-1}\\ \boldsymbol{T}_{n-1} & -\boldsymbol{T}_{n-1}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2\boldsymbol{T}_{n-1} & 0\\ \boldsymbol{T}_{n-1} & -\boldsymbol{T}_{n-1}\end{pmatrix}=(-2)^{2^{n-2}}\det(\boldsymbol{T}_{n-1})^2$$

并且 $\det(\boldsymbol{T}_1)=1$. 所以 $\det(\boldsymbol{T}_2)=-2$, $\det(\boldsymbol{T}_3)=16$,诸如此类. 由归纳法,所有 $\boldsymbol{T}_n$ 非零,因而对每个 n, $\boldsymbol{T}_n$ 可逆.

A - 5　随机地给一个 $m\times n$ 棋盘涂以颜色:每个格子以 1/2 的概率独立地涂以红色或黑色. 我们说两个格子 p 和 q 位于同一个单色连通区域中,如果存在一个以 p 为起点、q 为终点的相同颜色的格子序列,该序列中相连的格子有一条公共边. 证明:同色连通区域的数目的期望值大于 $mn/8$.

解　我们不妨假设问题中的单位正方形是格 $\boldsymbol{Z}^2$ 中的胞腔. 还假设平面上不在矩形①中的部分被染以第 3 种颜色,比如绿色. 从一个格点 (a,b) 到与其相邻的格点($(a\pm1,b)$,或 $(a,b\pm1)$)连一条边,如果它位于两个不同色的正方形之间. 若格点 (a,b) 是一条所连边的端点,我们就称它为一个顶点,也就是说,围绕该点的 4 个单位正方形不全同色. 令 V 表示所有顶点的数目,E 表示所有边的数目,R 是连通同色区域(不计绿色的无限分支)的数目,C 表示顶点中的连通分支数②. 由欧拉公式有 $V-E+R-C=0$. 这样,$\varepsilon(R)=\varepsilon(E)-\varepsilon(V)+\varepsilon(C)$(这里 ε 表示"期望值"). 矩形有 $2m+2n$ 条外边,它们都在 E 中被计数. 矩形还有 $2mn-m-n$ 条内"边",它们 中的一个被连成边的概率为 1/2. 这样

$$\varepsilon(E)=2m+2n+\frac{1}{2}(2mn-m-n)=mn+\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}n$$

矩形的边界包含 $2m+2n$ 个格点,它们都在 V 中被计数. 矩形有 $(m-1)(n-1)$ 个内格点,它们中的每一个成为顶点的概率为 7/8. 这样

$$\varepsilon(V)=2m+2n+\frac{7}{8}(m-1)(n-1)=\frac{7}{8}mn+\frac{9}{8}m+\frac{9}{8}n+\frac{7}{8}$$

因而　$$\varepsilon(R)=\frac{1}{8}mn+\frac{3}{8}m+\frac{3}{8}n-\frac{7}{8}+\varepsilon(C)$$

① 即所讨论的棋盘 $m\times n$ 矩形;下同.——译者注

② 两个顶点在一个连通分支中,如果它们是由边连成的一条折线的两个端点.——译者注

$\varepsilon(C)$ 的确切值难以求得,但恒有 $C \geqslant 1$. 这样,如所断言的,有 $\varepsilon(R) > mn/8$.

A－6 假设 $f(x,y)$ 是单位正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上的实值连续函数. 证明

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y + \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 (f(x,y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 对于整数 m 和 n,令

$$\hat{f}(m,n) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(mx+ny)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

表示 f 的傅里叶系数. 特别地

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \hat{f}(0,0) \qquad ①$$

函数 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 x 的函数,其傅里叶级数是 $\sum\limits_m \hat{f}(m,0)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx}$. 由帕舍伐尔(parseval)恒等式即得

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m,0)|^2 \qquad ②$$

类似地

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(0,n)|^2 \qquad ③$$

由 $L^2(T^2)$ 中的帕舍伐尔恒等式得

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x,y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m,n)|^2 \qquad ④$$

组合 ① ~ ④ 我们即看到,在问题中所述不等式的右端减去其左端为

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} |\hat{f}(m,n)|^2$$

因为这是非负的,所以问题中所提出的不等式成立.

B－1 令 $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ 是一个整系数多项式. 假设 r 是一个有理数使得 $P(r) = 0$. 证明: n 个数

$$c_nr, c_nr^2 + c_{n-1}r, c_nr^3 + c_{n-1}r^2 + c_{n-2}r, \cdots,$$
$$c_nr^n + c_{n-1}r^{n-1} + \cdots + c_1r$$

都是整数.

解法 1 对于相对素数 a 和 $q(q>0)$，令 $r=a/q$. 对 $P(r)=0$ 的两端乘以 q^n，我们得到

$$c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}q+\cdots+c_0q^n=0$$

因而

$$c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}q+\cdots+c_{n-m+1}a^{n-m+1}q^{m-1}\equiv 0(\bmod q^m)$$

即，q^m 整除

$$a^{n-m}(c_na^m+c_{n-1}a^{m-1}q+\cdots+c_{n-m+1}aq^{m-1})$$

但是 a 和 q 是互素的，因此 q^m 整除上述表达式中第2个因子. 换言之

$$c_n(a/q)^m+c_{n-1}(a/q)^{m-1}+\cdots+c_{n-m+1}(a/q)$$

是一个整数，此即为所希望的结果.

解法 2 对于整数 a 和 q，用最低项表示 $r=a/q$，并令

$$S_k=c_nr^k+c_{n-1}r^{k-1}+\cdots+c_{n-k+1}r$$

即，$S_1=c_nr$，并且当 $1<k\leqslant n$ 时

$$S_k=(S_{k-1}+c_{n-k+1})r$$

注意到 $S_n+c_0=P(r)=0$，因而 $S_n=-c_0$ 是一个整数. 通过对 k 下降地应用归纳法我们来建立结论. 假设 S_k 是一个整数，并注意到

$$q^kS_k=c_na^k+c_{n-1}a^{k-1}q+\cdots+c_{n-k+1}aq^{k-1}$$

这里等号的右端显然是 a 的倍数. 既然 $a\mid q^kS_k$ 并且 $(a,q^k)=1$，即得 $a\mid S_k$，因而

$$S_{k-1}=\frac{qS_k}{a}-c_{n-k+1}$$

是一个整数.

B－2 令 m 和 n 是正整数. 证明：

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}}<\frac{m!}{m^m}\frac{n!}{n^n}$$

解法 1 欲求证的不等式等价于下述不等式

$$\binom{m+n}{m}\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n<1 \qquad ①$$

二项式定理断言

$$(x+y)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^ky^{m+n-k}$$

我们取 $x=m/(m+n)$，$y=n/(m+n)$，并且注意到上式右端的被加项当 $k=m$ 时为式 ① 的左端. 因为所有项都是严格正的，我

们就得到 ①.

解法 2 把欲求证的不等式重新安排,我们必须证明

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}<\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$$

由对称性,我们还不妨假设 $m\leqslant n$.此时,对于左端我们有

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}=\binom{m+n}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

(左端是 $m+n$ 个元素的集合中 m 个元素的子集合的数目,也是 m 个元素的集合中 k 个元素的子集合的数目与 n 个元素的集合中 $n-k$ 个元素的子集合的数目乘积关于 $k=0,1,\cdots,m$ 的总和.)①

对于右端

$$\begin{aligned}\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}&=\left(\frac{m+n}{m}\right)^m\left(\frac{m+n}{n}\right)^n=\\&\left(1+\frac{n}{m}\right)^m\left(1+\frac{m}{n}\right)^n=\\&\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(\frac{n}{m}\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{m}{n}\right)^j\right)=\\&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\left(\frac{n}{m}\right)^{i-j}\end{aligned}$$

这个共有 $(m+1)(n+1)$ 个正项的和包含了其中 $i=j$ 的 $m+1$ 项.这样

$$\begin{aligned}\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}&=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\left(\frac{n}{m}\right)^{i-j}>\\&\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}=\frac{(m+n)!}{m!n!}\end{aligned}$$

这就完成了证明.

B-3 确定所有的实数 $a>0$,使得对于某个实数 k,存在定义在 $[0,a]$ 上的一个有下述性质的非负连续函数 $f(x)$:区域

$$R=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

的周长为 k 个单位,并且其面积为 k 个平方单位.

解 答案是任何大于 2 的实数.

因为 f 在闭区间上是连续的,所以它在那个区间上达到最大值,譬如,对于 $[0,a]$ 中的某个 c,$P=(c,M)$.(我们注意,$M>0$;

① 注意,$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.——译者注

否则,退化的区域有正的周长,但面积为 0.)

显然,区域 R 上有界,它被$[0,a]$上高为 M 的矩形所界,因而它的面积 k 满足 $k \leqslant aM$.另一方面,因为 $2M$ 小于从$(0,0)$到 P 以及从 P 到$(a,0)$的距离之和,而此和又小于区域的全周长 k,所以 $2M < k$.由这两个事实即得 $2M < aM$,因此 $a > 2$.

反之,若 $a > 2$,我们可以取 $f(x) = 2a/(a-2)$,那么区域 R 是一个矩形,其面积为 $2a^2/(a-2)$,而周长为

$$2a + 2\left(\frac{2a}{a-2}\right) = \frac{2a^2}{a-2}$$

B－4　令 n 是一个满足 $n \geqslant 2$ 的正整数,并且 $\theta = 2\pi/n$.在 xy－平面上对 $k = 1,2,\cdots,n$ 定义 n 个点 $P_k = (k,0)$.令 R_k 是围绕点 P_k 在平面上作反时针旋转 θ 角度的映射.令 R 表示依次作 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 所得到的映射.对于一个任意的点(x,y),求出,并且简化 $R(x,y)$ 的坐标.

解　复合映射 R 是沿 x 方向移动 n 个单位长度的一个平移.

把 xy－平面上的点(x,y)对应于复平面上的点 $z = x + \mathrm{i}y$.关于原点旋转角度 θ 等价于乘以 $\zeta = \exp(\mathrm{i}\theta)$.关于一个点 P 旋转把 z 映为

$$\zeta(z-p) + p = \zeta z + (1-\zeta)p$$

因而①

$$R_1(z) = \zeta z + (1-\zeta)$$

$$R_2(R_1(z)) = \zeta(\zeta z + 1 - \zeta) + 2(1-\zeta) = \zeta^2 z + 2 - (\zeta + \zeta^2)$$

并且,由归纳法

$$R_k(R_{k-1}(\cdots(R_2(R_1(z)))\cdots)) = \zeta^k z + k - (\zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^k)$$

因为 ζ 是单位的 n 次根,并且 $\zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^n = 0$(因为 $n > 1$),取 $k = n$,并逐次施行映射就把 z 映为

$$\zeta^n z + n - (\zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^n) = z + n$$

用坐标的语言,(x,y)被映为$(x+n,y)$,这就是我们的断言.

B－5　求值:

$$\lim_{x \to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right)^{x^n}$$

① 原文把下面第 2 式中间一项 $2(1-\xi)$ 误为 $(1-\xi)^2$.——译者注

解法 1 极限是 2/e.

首先我们取对数

$$\ln\prod_{n=0}^{N}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}=\sum_{n=0}^{N}x^n(\ln(1+x^{n+1})-\ln(1+x^n))=$$
$$\sum_{n=0}^{N}x^n\ln(1+x^{n+1})-\sum_{n=0}^{N}x^n\ln(1+x^n)$$

在对第一个和式重新定其指标后,我们看到最后的表达式变为

$$\sum_{n=1}^{N+1}x^{n-1}\ln(1+x^n)-\sum_{n=0}^{N}x^n\ln(1+x^n)=$$
$$\sum_{n=1}^{N}(x^{n-1}-x^n)\ln(1+x^n)-\ln 2+$$
$$x^N\ln(1+x^N)$$

因为当 $N\to\infty$ 时最后一项趋于零,我们推得所讨论的乘积的极限是 $\exp(S(x)-\ln 2)$,其中

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)\ln(1+x^n)$$

函数 $\ln(1+x)$ 在[0,1]上是连续的,因而在那里是黎曼可积的.并且

$$x^N\ln 1+\sum_{n=1}^{N}(x^{n-1}-x^n)\ln(1+x^n)$$

对于这个积分以及[0,1]上的分点 $0,x^N,x^{N-1},\cdots,x,1$ 而言是一个黎曼和.因为 $\ln 1=0$,第一项即为零.若 N 大,则这个分划的细度为 $1-x$.令 $I=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.这样,对于每个 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得若 $1-\delta<x<1$,则对所有充分大的 N,有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(x^{n-1}-x^n)\ln(1+x^n)-I\right|<\varepsilon$$

令 N 趋于无穷,我们即推得 $|S(x)-I|\leqslant\varepsilon$.因而,由分部积分法得到

$$\lim_{x\to1^-}S(x)=I=[(1+x)\ln(1+x)-(1+x)]_0^1=2\ln 2-1$$

因此,原来乘积之极限是

$$\exp(\ln 2-1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$$

解法 2 极限是 2/e.

固定 $x<1$.在区间[0,1]上对于分划 $0,x^n,x^{n-1},\cdots,x,1$ 考虑单调增函数 $\ln(1+x)$ 积分的左、右黎曼和,我们看到,当 n 足够大使得 $x^n<1-x$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}(x^{i-1}-x^{i})\ln(1+x^{i}) < \int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x <$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x^{i-1}-x^{i})\ln(1+x^{i-1}) + (1-x)\ln 2$$

当 $n\to\infty$ 时,左端的和增加,并且上有界,因而它收敛,而且

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x^{i-1}-x^{i})\ln(1+x^{i}) < \int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x < \sum_{i=1}^{\infty}(x^{i-1}-x^{i})\ln(1+x^{i-1}) + (1-x)\ln 2$$

这样
$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{i=1}^{\infty}(x^{i-1}-x^{i})\ln(1+x^{i}) = \int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)-x]_0^1 = 2\ln 2-1$$

因此即得
$$\lim_{x\to 1^-}\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{i})^{x^{i-1}-x^{i}} = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

因而

$$\lim_{x\to 1^-}\prod_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{i+1}}{1+x^{i}}\right)^{x^{i}} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1+x^{1}}{1+1}\right)^{1}\left(\frac{1+x^{2}}{1+x^{1}}\right)^{x^{1}}\left(\frac{1+x^{3}}{1+x^{2}}\right)^{x^{2}}\cdots = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+1}\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{i})^{x^{i-1}-x^{i}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

B－6　令 A 是正整数的一个非空集合,并令 $N(x)$ 表示 A 中不超过 x 的元素的个数.令 B 表示正整数 b 的集合,这里 b 可以写成形式 $b=a-a'$,其中 $a\in A, a'\in A$.令 $b_1<b_2<\cdots$ 是 B 中按增序排列的一列数.证明:如果序列 $b_{i+1}-b_i$ 是无界的,则

$$\lim_{x\to\infty}N(x)/x = 0$$

解　(基于参赛学生试卷的综合)假设

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x} = \varepsilon > 0$$

我们证明,序列 $b_{i+1}-b_i$ 是有界的.

对于 $k\in N$ 和 $S\subset N$, 我们记 $A_k = A\cap\{1,2,\cdots,k\}$, $k+S=\{k+s\mid s\in S\}$, 以及 $D(S)=\{s-t\mid s,t\in S\}$.令 $n>2/\varepsilon$,并且 $n\in N$.

引理:若 $S\subseteq N$,并且 $|S|=n$,则 $D(S)\cap B\neq\varnothing$.

引理的证明:假设相反,即 $D(S)\cap B=\varnothing$.那么对于任何 $s, t\in S$,有

$$(s+A)\cap(t+A)=\varnothing$$

令 $m = \max_{s\in S} s$,并选取 $x \in N$,满足 $x > m$ 和 $N(x)/x \geqslant 2/n$.那么,因为诸集合 $\{s + A\}_{s\in S}$ 互不相交,所以

$$\left|\bigcup_{s\in S}(s + A_x)\right| = n \mid A_x \mid = nN(x) \geqslant 2x$$

但是

$$\bigcup_{s\in S}(s + A_x) \subseteq \{1,2,\cdots,x + m\}$$

因而

$$\left|\bigcup_{s\in S}(s + A_s)\right| \leqslant x + m < 2x$$

这是一个矛盾!

现在令 S 是满足 $D(S) \cap B = \varnothing$ 的 N 的最大子集.由引理,S 是有限的(事实上,$|S| < n$).令 $m = \max_{s\in S} s$.我们断言对所有的 i,有 $b_{i+1} - b_i \leqslant m$,设其反,即对某个 i,有 $b_{i+1} - b_i > m$,则 $b_{i+1} \notin S$,并且,由 S 的选取知 $D(S \cup \{b_{i+1}\}) \cap B \neq \varnothing$.然而,这意味着对于某个 $s \in S$ 有 $b_{i+1} - s \in B$.另一方面

$$b_{i+1} > b_{i+1} - s \geqslant b_{i+1} - m > b_i$$

这与 b_i 和 b_{i+1} 是 B 中的相邻元素这一事实相矛盾.

第 66 届美国大学生数学竞赛

A－1　证明:每个正整数是一个或多个形如 2^r3^s 之数的和,其中 r 和 s 是非负整数(例如,$23 = 9 + 8 + 6$).并且,每个被加数不能整除其它的被加数.

解　我们用归纳法来论证.显然,$1 = 2^0 3^0$,因此数 1 可以表示为所希望的形式.如果 n 是偶数,那么由归纳假设,$n/2$ 有这样的一个表示,只须把每个被加项乘以 2 即可.假设 n 是奇数,并令 k 是使 $3^k \leqslant n$ 的最大整数.如果 $n = 3^k$,那么我们就得到了结果.如果 $3^k < n < 3^{k+1}$,则 $m = (n - 3^k)/2$ 是一个正整数.因为 $m < n$,由归纳假设我们即得,我们可以把 m 写为 $m = \sum\limits_i 2^{r_i}3^{s_i}$.这样就有 $n = 3^k + \sum\limits_i 2^{r_i+1}3^{s_i}$.只须证明“没有被加数整除其它的被加数”即可.利用归纳假设,仅当 $i = j$ 时 $2^{r_i+1}3^{s_i}$ 整除 $2^{r_j+1}3^{s_j}$.此外,因为 2 是 $2^{r_i+1}3^{s_i}$ 的因子,但不是 3^k 的因子,所以 $2^{r_i+1}3^{s_i}$ 不整除 3^k.最后

$$m = (n - 3^k)/2 < (3^{k+1} - 3^k)/2 = 3^k$$

这样,$2^{r_i}3^{s_i} < 3^k$①,因而 3^k②不整除 $2^{r_i+1}3^{s_i}$.

A－2　令 $S = \{(a,b) \mid a = 1,2,\cdots,n, b = 1,2,3\}$.$S$ 的一个城堡形游程是一条折线路径,它由依次连接诸点 $p_1, p_2,\cdots,p_{3n}$ 的线段组成,使得(1)$p_i \in S$,(2)对于 $1 \leqslant i < 3n$,p_i 与 p_{i+1} 相距一个单位,(3)对每个 $p \in S$,存在唯一的 i,使得 $p_i = p$.有多少条城堡形游程,以(1,1)为起点,并以(n,1)为终点?

(对于 $n = 5$,一条这样的城堡形游程由图 1 描绘.)

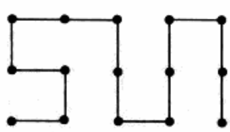


图 1

解　令 $T(n)$ 是以(1,1)为起点,并以(n,1)为终点的城堡形游程 $S_n \equiv S$ 的数目,并令 $U(n)$ 是以(1,1)为起点,并以(n,3)为终点的城堡形游程 S_n 的数目.令 $j(0 \leqslant j \leqslant n-2)$ 表示在第一个垂直移动前所作的向右移动的次数.一旦作了第一次向上移动,

① 原文误为 $2^{r_i+1}3^{s_i} < 3^k$.——译者注
② 不整除 $2^{r_i}3^{s_i}$.——校者注

无阻碍地通过前 $j+1$ 列中所有方块的唯一方法是向左移动 j 次，向上移动，再向右移动 $j+1$ 次. 这时局中人①位于 $(j+2,3)$. 剩下还需以 $(j+2,3)$ 为起点，以 $(n,1)$ 为终点地穿过一个 $3\times(n-1-j)$ 棋盘. 由定义，这可以用 $U(n-1-j)$ 种方法做到. 这样

$$T(n)=\sum_{j=0}^{n-2}u(n-1-j)$$

类似地

$$U(n)=\sum_{j=0}^{n-1}T(n-1-j)$$

其中约定 $T(0)=1$. 显然，有 $T(1)=0$ 和 $U(1)=1$. 我们断言，当 $n\geqslant 2$ 时有 $T(n)=U(n)=2^{n-2}$. 这个结论从上面两个恒等式通过归纳法即得.

A－3　令 $p(z)$ 是一个次数为 n 的多项式，它的所有零点在复平面中的绝对值皆为 1. 令 $g(z)=p(z)/z^{n/2}$. 证明：$g'(z)$ 的所有零点的绝对值也都为 1.

解　我们记 $p(z)=c(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. 这样即有

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z-z_k}-\frac{1}{2z}\right)$$

因而

$$2z\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z+z_k}{z-z_k} \qquad ①$$

对于固定的 k，考虑以 z,z_k 和 $-z_k$ 为顶点的三角形. 因为从 $-z_k$ 到 z_k 的线段是单位圆的直径，因此如果 $|z|>1$，则三角形在 z 处的顶角是锐角. 在此情形有

$$|\arg((z+z_k)/(z-z_k))|<\pi/2$$

这就是说

$$\mathrm{Re}((z+z_k)/(z-z_k))>0$$

由于这个不等式对每个 k 成立，因此当 $|z|>1$ 时式 ① 的右端有正的实部. 这样，当 $|z|>1$ 时 $g'(z)=0$ 无解. 类似地，如果 $|z|<1$，则在 z 处的角是钝角，对所有的 k 有

$$\pi/2<|\arg((z+z_k)/(z-z_k))|<\pi$$

并且

$$\mathrm{Re}((z+z_k)/(z-z_k))<0$$

在此情形式 ① 的右端的实部是负的，因而 $g'(z)=0$ 再次是不可能的.

A－4　令 $\boldsymbol{H}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，它的所有元素是 1 或 －1，并且它的各行相互垂直. 假设 $\boldsymbol{H}$ 有一个 $a\times b$ 子矩阵，其元素皆为 1. 证明：$ab\leqslant n$.

① 解答中假设有一人(称为局中人)沿着城堡形游程在行走.—— 译者注

解 我们记 $\boldsymbol{H}=[h_{ij}]$,并令 I 和 J 是如下选择的区间,使得题中所述的那个子矩阵由 i 取自于 I,并且 j 取自于 J 而得到的.令 $\boldsymbol{H}$ 的诸行为 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$,并令 $v=\sum_{i\in I}\boldsymbol{r}_i$.一方面,由于诸行是正交的,因此即得②

$$\|\boldsymbol{v}\|^2=\sum_{i_1\in I}\sum_{i_2\in I}\boldsymbol{r}_{i_1}\cdot\boldsymbol{r}_{i_2}=\sum_{i\in I}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i=an$$

另一方面,$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个分量是 $\sum_{i\in I}h_{ij}$,因而

$$\|\boldsymbol{v}\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in I}h_{ij}\right)^2$$

这里,所有的被加项都是非负的,并且对于 $j\in J$,被加项是 a^2.因而 $\|\boldsymbol{v}\|^2\geqslant a^2b$③.由此即得 $a^2b\leqslant an$,这就给出了所述的结论.

A-5 求值 $\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解法 1 令 I 表示问题中的积分.因为对所有 $x\in[0,1]$ 有 $x=\tan(\arctan x)$,因此,作了代换 $\arctan x=t$ 后,我们有

$$I=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

令 $u=\pi/4-t$,则得

$$I=\int_{\pi/4}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)(-\mathrm{d}u)=$$
$$\int_0^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u=$$
$$\int_0^{\pi/4}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/4}\ln 2\mathrm{d}u-I$$

即得 $2I=(\pi/4)\ln 2$,即 $I=(\pi/8)\ln 2$.

解法 2 令 I 表示问题中的积分.代换 $x=(1-u)/(1+u)$ 直接导致

$$I=(\ln 2)\pi/4-I$$

A-6 令 $n\geqslant 4$ 给定,并设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个在一个圆周上随机地、独立地、均匀地选取的点.考虑顶点为所有 P_i 的凸 n 边形.这个多边形至少有一个顶角为锐角的概率是多少?

---

① 原文把下面第 2 个式子误为 $\sum_{i_1\in I}\sum_{i_2\in J}\boldsymbol{r}_{i_1}\boldsymbol{r}_{i_2}$.——译者注

② 原文误为 $\|\boldsymbol{v}\|^2\geqslant a^2\mathrm{b}$.——译者注

解 令 A,B 和 C 表示圆周上3个相继的点.说$\angle ABC$是锐角,等价于说在圆周上由 A 经过 B 到 C 的弧的度量大于 π.这样,在圆周上没有足够的地方可以有两个锐角,如果它们不相邻的话.在问题所考虑的情形下,存在唯一一个点,在该点处的角是钝角,而按逆时针方向相邻的一个点处是锐角.假设$0\leqslant\theta\leqslant 1$和$0\leqslant\varnothing\leqslant 1/2$. n 个点中恰有一个点位于弧$(2\pi\theta,2\pi\theta+2\pi\Delta\theta)$上,并且恰有一个点位于弧$(2\pi(\theta+\varnothing),2\pi(\theta+\varnothing)+2\pi\Delta\theta)$上的概率近似为$n(n-1)\Delta\theta\Delta\varnothing$.如果没有两个或多个点位于这两条弧的某一条上,或两条弧没有重合部分,那么这个估计是精确的.当$\Delta\theta$和$\Delta\varnothing$小的时候,有两个或多个点位于这两条弧的某一条上,或两条弧有重合部分,这两种可能性可以被忽略.令 A 表示在第一段弧上的点,B 表示在第二段弧上的点.为了在 B 点处的角是锐角,所有其它的点必定位于从 A 到它的对径点的半圆周上.这个概率是$1/2^{n-2}$③.令 A' 表示 A 的对径点,B' 表示 B 的对径点.我们不想所有这些剩下的点都在 A' 与 B' 之间.这一事件的概率至少是$(\varnothing-\Delta\theta)^{n-2}$,但是不大于$(\varnothing+\Delta\varnothing)^{n-2}$.这样,题中所述事件的概率为

$$n(n-1)\int_0^1\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2^{n-2}}-\varnothing^{n-2}\right)\mathrm{d}\varnothing\,\mathrm{d}\theta=$$

$$n(n-1)\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}\right)=\frac{n(n-2)}{2^{n-1}}$$

B-1 求一个非零多项式 $P(x,y)$,使得对于所有实数 a,有 $P([a],[2a])=0$.
(注:$[v]$是小于或等于 v 的最大整数)

解 一个这样的多项式是

$$P(x,y)=(2x-y)(2x-y-1)$$

为了看到这点,令 a 是一个实数,并令 $n=[a]$.若 $a\in[n,n+\frac{1}{2})$,则$[2a]=2[a]$,因而 $P([a],[2a])=0$.若 $a\in[n+\frac{1}{2},n+1)$,则$[2a]=2[a]+1$,因而再一次 $P([a],[2a])=0$.

B-2 找出所有的正整数 $n,k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $k_1+k_2+\cdots+k_n=5n-4$,并且$\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_n}=1$.

解 一些可能的解是

$$n=1,k_1=1$$

$$n=3,\{k_1,k_2,k_3\}=\{2,3,6\}$$

① 原文误为$1/2^{n-1}$.—— 校者注

$$n = 4, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$$

从算术平均－几何平均(或 Cauchy-Schwarz)不等式我们知道

$$(k_1 + \cdots + k_n)\left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right) \geqslant n^2 \quad ①$$

并且,等号成立当且仅当 $k_1 = \cdots = k_n$.因而 $5n - 4 \geqslant n^2$,这等价于 $n(n-4) \leqslant 0$.这样即有 $n \in \{1,2,3,4\}$.对于 $n = 1$ 或 $n = 4$,① 中的等号成立,因而 $k_1 = \cdots = k_n$.我们得到解 $n = 1, k_1 = 1$ 和 $n = 4, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$.现在只剩下情形 $n = 2$ 和 $n = 3$ 了.对于 $n = 2$,方程组 $k_1 + k_2 = 6, 1/k_1 + 1/k_2 = 1$ 在正整数集上是不可解的.对于 $n = 3$,我们要寻找三元组(k_1, k_2, k_3),使得 $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ 和 $1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3 = 1$.令 $k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 = k_1k_2k_3 = q$.则 k_1, k_2 和 k_3 是方程 $x^3 - 11x^2 + qx - q = 0$ 的正整数解.由此可知其一个解 x 是一个异于1和11的正整数,因而

$$q = \frac{-x^3 + 11x^2}{x - 1} = -x^2 + 10x + 10 + \frac{10}{x - 1}$$

因为 q 是一个正整数,所以 $x - 1$ 是 10 的一个正因子,并且异于 10.这样,$x - 1 \in \{1,2,5\}$,因而 $x \in \{2,3,6\}$.一个简单的分析证明了$\{k_1, k_2, k_3\} = \{2,3,6\}$.

B－3　找出所有的可微函数$f:(0,\infty) \to (0,\infty)$,对于这样的函数,存在一个正实数 a,使得对于所有的 $x > 0$,有

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}$$

解　对于 $x \in (0,\infty)$ 定义 $g(x) = f(x)f(a/x)$.我们断言,g 是一个常值函数.事实上,在给定的条件下对 x 作代换a/x 导致 $x > 0$ 时

$$f(a/x)f'(x) = a/x$$

因而

$$g'(x) = f'(x)f(a/x) + f(x)f'(a/x)(-a/x^2) = a/x - a/x = 0$$

这保证了 g 是某个正常数b.

从原来要求 f 满足的条件我们可以写为

$$b = g(x) = f(x)f\left(\frac{a}{x}\right) = f(x)\left(\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{f'(x)}\right)$$

这就给出了

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{bx}$$

对两边积分,我们得到

$$\ln f(x) = (a/b)\ln x + \ln c$$

其中 $c > 0$ 为常数.由此即得,对 $x > 0$ 有 $f(x) = cx^{a/b}$.代换回原来的条件中,得到

$$c \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a^{a/b-1}}{x^{a/b-1}} = \frac{x}{cx^{a/b}}$$

这等价于
$$c^2 a^{a/b} = b$$

消去 c 后我们找到一族解

$$f_b(x) = \sqrt{b}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^{a/b}, b > 0$$

B－4 对于正整数 m 和 n,令 $f(m,n)$ 表示满足下述条件的整数的 n 数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的数目:$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leqslant m$.证明:

$$f(m,n) = f(n,m)$$

解法 1 只须证明

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k \binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

即可,因为此等式右端关于 m 和 n 是对称的.首先,根据非零坐标的数目,我们把所有点分类.称之个数为 k.有 $\binom{n}{k}$ 种方式来选择哪些坐标非零.对于每个非零坐标,我们必须选取其符号.共有 2^k 种方式来选取这些符号.余下只须计算满足条件 $\sum a_i \leqslant m$ 的 k－数组 $(a_1, \cdots, a_k)$ 的数目.令 $b_i = a_i - 1$,则 $(b_1, \cdots, b_k)$ 是一个非负整数的 k－数组,其坐标的和至多为 $m-k$.令这个和为 r.众所周知,和 r 的非负整数的 k－数组的数目为 $\binom{k+r-1}{k-1}$.因而 k－数组的数目为

$$\sum_{r=0}^{m-k}\binom{k+r-1}{k-1} = \binom{m}{k}$$

这导致关于 $f(m,n)$ 的所断言的公式.

解法 2 把定义扩展到包括 $m = 0$ 或 $n = 0$,但不同时为 0.对于情形 $m = 0$,唯一适合的 n－数组是 $(0,0,\cdots,0)$,因而对于 $n > 0$ 有 $f(0,n) = 1$①.对于情形 $n = 0$,唯一适合的 0－数组是 $\varnothing$,因而 $f(m,0) = 1$.这样,$f(0,n) = f(m,0) = 1$.

通过在 n－数组中考虑 x_n 的可能取值,我们知道,如果 $n > 0$,则

① 原文误为 $f(0,n) = 0$.—— 译者注

$$f(m,n)=\sum_{i=-m}^{m}f(m-|i|,n)=$$
$$f(m,n-1)+\sum_{i=1}^{m}2f(m-i,n-1) \quad ①$$

因为最后的表达式中包含了具有 $x_n=i(-m\leqslant i\leqslant m)$ 的 n - 数组.

把这个对于正整数 m 的结果应用于 $m-1$,我们得到

$$f(m-1,n)=f(m-1,n-1)+\sum_{i=1}^{m-1}2f((m-1)-i,n-1) \quad ②$$

从 ① 中减去 ②,导致递推公式

$$f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)+f(m-1,n-1) \quad ③$$

这样,所要证的结果通过两次利用 ③,对于 $m+n$ 用强归纳法而立即得到,即

$$\begin{aligned}f(m,n+1)&=f(m-1,n+1)+f(m,n)+f(m-1,n)=\\&f(n+1,m-1)+f(m,n)+f(n,m-1)=\\&f(n+1,m)\end{aligned}$$

解法 3 令 $S(m,n)$ 由 $f(m,n)$ 计数的 n - 数组的集合,并令 $T(m,n)$ 是序列

$$(a_1,b_1,e_1),(a_2,b_2,e_2),\cdots,(a_k,b_k,e_k)$$

的集合,此序列满足下列条件

$$k\geqslant 0$$
$$0<a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant m$$
$$0<b_1<b_2<\cdots<b_k\leqslant n$$
$$e_i=\pm 1,\quad 1\leqslant i\leqslant k$$

显然,对应 $(a_i,b_i,e_i)\mapsto(b_i,a_i,e_i)$ 诱导了一个从 $T(m,n)$ 到 $T(n,m)$ 上的双射.因而只须描述 $T(m,n)$ 和 $S(m,n)$ 之间的一个双射即可.

定义 $\phi:T(m,n)\to S(m,n)$ 如下

$$\phi((a_1,b_1,e_1),(a_2,b_2,e_2),\cdots,(a_k,b_k,e_k))=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中 $$x_i=\begin{cases}e_j(b_j-b_{j-1}),\text{若 } i=a_j(\text{注}:b_0\text{ 取作 }0)\\0,\text{若对任意 } j(1\leqslant j\leqslant k),i\neq a_j\end{cases}$$

定义 $\psi:S(m,n)\to T(m,n)$ 如下

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=((a_1,b_1,e_1),(a_2,b_2,e_2),\cdots,(a_k,b_k,e_k))$$

其中 $k=|\{x_i\mid x_i\neq 0\}|$,并且对于 $i=1,2,\cdots,k$.

$a_i=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中第 i 个非零元素的指标

$$b_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant a_i} | x_j |$$

$$e_i = \operatorname{sign}(x_{a_i})$$

容易证明 $\phi \circ \psi$ 和 $\psi \circ \phi$ 都是恒等函数，因而我们有一个双射.

B－5 令 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 表示变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的实系数多项式，并假设

(1) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) P(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0$;

以及

(2) $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 整除 $P(x_1, \cdots, x_n)$.

证明：$P \equiv 0$.

解 记 $P = \sum_k P_k$，其中 P_k 是 k 次齐次多项式. 如果 P 有所要求的性质，那么每个 P_k 亦然. 这样，我们不妨假设 P 是齐次的，譬如说它是 d 次的. 令 $S = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. 则环 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个唯一的因式分解整环，并且 S 是不可约的(否则，S 可以分解为线性因式，因而在 R^n 中有非平凡零点，然而它并没有). 这样 $P \neq 0$，那么在 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 中存在一个唯一的多项式 Q 和唯一的 m，使得 $P = S^m Q$. 由问题中的假设(2)知 $m > 0$. 我们现在来计算 P 的二阶偏导数. 首先

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = m S^{m-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} Q + S^m \frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

再对 x_i 取偏导数，我们得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = m(m-1) S^{m-2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 Q + m S^{m-1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} Q +$$

$$2m S^{m-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i} + S^m \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}$$

但是 $\partial S / \partial x_i = 2x_i$，并且 $\partial^2 S / \partial x_i^2 = 2$，这就导致

$$4m(m-1) S^{m-2} x_i^2 Q + 2m S^{m-1} Q + 4m S^{m-1} x_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} + S^m \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} \quad ①$$

Q 是 $d - 2m$ 次齐次的. 从欧拉恒等式即得

$$\sum_i x_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = (d - 2m) Q$$

这样，当我们对表达式 ① 关于 i 求和时，我们即发现

$$0 = 4m(m-1) S^{m-1} Q + 2mn S^{m-1} Q +$$

$$4m(d - 2m) S^{m-1} Q + S^m \sum_i \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}$$

从等式两边消去 S^{m-1}，我们得到

$$-2m(2m-2+n+2d-4m)Q=S\sum_i \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}$$

这里左端的常数是正的,因而即得 S 整除 Q,这与 m 是 P 中 S 的最高幂这一假设矛盾.

B-6 令 S_n 表示诸数 $1,2,\cdots,n$ 的所有置换的集合.对于 $\pi\in S_n$,若 π 是一个偶置换,则令 $\sigma(\pi)=1$;若 π 是一个奇置换,则令 $\sigma(\pi)=-1$.并令 $v(\pi)$ 表示 π 的不动点的数目.证明:

$$\sum_{\pi\in S_n}\frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1}=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$

解 我们在数 $v(\pi)$ 上求和

$$\sum_{\pi\in S_n}\frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\sum_{\pi\in S_n,v(\pi)=i}\sigma(\pi)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\sum_{\pi\in S_{n-i},v(\pi)=0}\binom{n}{i}\sigma(\pi)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}\sum_{\pi\in S_{n-i},v(\pi)=0}\sigma(\pi)$$

现在我们断言,$D_n=\sum\limits_{\pi\in S_n,v(\pi)=0}\sigma(\pi)$,由

$$D_n=-(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

递归地导出.为了看到这点,考虑 S_n 中满足 $v(\pi)=0$ 的 π.或者有 $\pi^2(n)=n$,或者有 $\pi^2(n)\neq n$.若 $\pi^2(n)=n$,则 $(n,\pi(n))\circ\pi$ 使得 n 和 $\pi(n)$ 不动,因而可以与 S_{n-2} 的一个重排等同.否则,$(n,\pi(n))\circ\pi$ 使得 n 不动,因而可以与 S_{n-1} 的一个重排等同.对于 $\pi(n)$ 有 $n-1$ 种选择,并且 $\sigma((n,\pi(n))\circ\pi)=-\sigma(\pi)$,这就建立了递推关系.

显然,$D_2=-1$ 和 $D_3=2$,并且我们断言 $D_n=(-1)^{n-1}(n-1)$.对于 $n=2$ 和 $n=3$,这是成立的,因而由递推公式和归纳假设,有

$$D_n=-(n-1)((-1)^{n-2}(n-2)+(-1)^{n-3}(n-3))=$$
$$(-1)^{n-1}(n-1)((n-2)-(n-3))=$$
$$(-1)^{n-1}(n-1)$$

然后,注意到 $D_0=1$ 和 $D_1=0$(它们也满足上述公式),我们得到

$$\sum_{\pi\in S_n}\frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}(-1)^{n-i-1}(n-i-1)=$$

$$(-1)^n\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}(-1)^{n+1}n-\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}(-1)^i(1+i)\right)=$$

$$(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}(-1)^{n+1}n=$$

$$(-1)^n n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{i+1}(-1)^{1+i}=$$

$$(-1)^n\frac{n}{n+1}\cdot$$

$$\left(\sum_{i=-1}^{n}\binom{n+1}{i+1}(-1)^{1+i}-\binom{n+1}{0}\right)=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$

第 67 届美国大学生数学竞赛

A－1　求出满足关系
$$(x^2+y^2+z^2+8)^2 \leqslant 36(x^2+y^2)$$
的点所组成的区域的体积.

解　我们变换到柱坐标,即设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.那么所给的不等式等价于
$$r^2+z^2+8 \leqslant 6r$$
或
$$(r-3)^2+z^2 \leqslant 1$$
这定义了一个轮胎面;其表面是由 xz 平面上的圆 $(x-3)^2+z^2 \leqslant 1$ 旋转而得.由 Pappus 定理,其体积等于这个圆的面积 π 乘以质心旋转的距离 $(2\pi)3$,那样,总体积就是 $6\pi^2$.

A－2　Alice 和 Bob 玩一种从一堆石子中轮流取走石块的游戏,这堆石块一开始有 n 块.游戏的规则是每一次取走的石块数必须比某个素数小 1.赢者是最后取走石块的人.Alice 先走.证明:存在无穷多个使得 Bob 能赢的 n.(例如,如果 $n=17$,那么 Alice 可能取走 6 块,剩下 11 块;然后 Bob 可能取走 1 块,剩下 10 块;然后 Alice 可以取走所剩的石块而赢.)

解　假设不然,即使得 Bob 可以有获胜策略的 n 值的集合 B 是有限的.为方便起见,我们设 $n=0$ 也在 B 中.那么对每个不在 B 中的非负整数 n,Alice 必须从一堆有 n 块石块的石块堆中移动一些次,最后导致那样一种位置,使得下一次走时可以赢.那就是说,每个不在 B 中的非负整数可以写成 $b+p-1$ 的形式,其中 $b \in B$ 而 p 是一个素数.然而有很多方式说明这是不可能发生的.

解法 1　设 t 是任意大于所有 $b \in B$ 的整数.那么易于写出 t 个相连的合数.例如 $(t+1)!+2,\cdots,(t+1)!+(t+1)$,令 $n=(t+1)!+t$,那么对每个 $b \in B$,$n-b+1$ 是一个我们刚才写下的那些合数中的数.

解法 2 设 $p_1,\cdots,p_{2m}$ 是任意素数，那么由中国剩余定理可知，存在一个正整数 x 使得

$$x-b_1\equiv -1(\bmod p_1p_{m+1})$$
$$\vdots$$
$$x-b_n\equiv -1(\bmod p_mp_{2m})$$

对每个 $b\in B$，唯一的使得 $x=b+p-1$ 的整数至少可被两个素数整除，因此它本身不可能是一个素数.

解法 3 (Catalin Zara 提供)设 $b_1=0$ 并取 $n=(b_2-1)\cdot\cdots\cdot(b_m-1)$，那么 n 是一个合数. 由于 $3,8\in B$ 并且对任意非零的 $b\in B,n-b_i+1$ 是可分解的但不等于 b_i-1.（也可取 $n=b_2\cdots b_m-1$ 使得 $n-b_i+1$ 可被 b_i 整除）

A－3 设 1,2,3,…,2 005,2 006,2 007,2 009,2 012,2 016,…是由 $x_k=k,k=1,2,\cdots,2\,006$ 和 $x_{k+1}=x_k+x_{k-2\,005},k\geqslant 2\,006$ 所定义的叙列. 证明：在此叙列中存在 2 005 个连续的项，其中每一项都能被 2 006 整除.

解 我们首先看出，给了任何满足迭代关系

$$x_k=f(x_{k-1},\cdots,x_{k-n})(k>n)$$

的整数叙列 $x_1,x_2,\cdots$，其中 n 是一个固定的数而 f 是一个固定的 n 个变量的整系数多项式，对任意正整数 N，以 N 为模，则所给的叙列最终是周期的，由于在模 N 下，叙列仅有有限个值. 一旦达到周期状态，叙列就开始重复，同样，叙列的每个子叙列也是重复的.

其次我们观察到如果我们可以把同一个迭代关系重写成

$$x_{k-n}=g(x_{k-n+1},\cdots,x_k)(>n)$$

其中，g 也是一个整系数多项式，那么这个叙列就可以以唯一的方式延伸成一个双边无穷叙列

$$\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots$$

它对任意的模 N 都是完全周期的. 我们现在的情况正是如此，由于我们可以把给定的迭代关系重写成

$$x_{k-2\,005}=x_{k+1}-x_k$$

这就可以对任意固定的 N，在双边无穷叙列中求出 2 005 个连续的可被 N 整除的项（特别对 $N=2\,006$）. 反向迭代易于求出

$$x_1=x_0=\cdots=x_{-2\,004}=1$$
$$x_{-2\,005}=\cdots=x_{-4\,009}=0$$

这就导致所需的结果.

A－4　设 $n>1, S=\{1,2,\cdots,n\}$. 说 S 的一个置换 π 在 $k\in S$ 处有局部极大，如果

(1) 对 $k=1, \pi(k)>\pi(k+1)$;

(2) 对 $1<k<n, \pi(k-1)<\pi(k), \pi(k)>\pi(k+1)$;

(3) 对 $k=n, \pi(k-1)<\pi(k)$.

(例如，如果 $n=5$，而对 $2,1,4,5,3$，π 的值是 $1,2,3,4,5$，那么 π 在 $k=1$ 处有局部极大 2 而在 $k=4$ 处有局部极大 5.) 当遍历 S 的所有置换时，S 的置换的局部极大的平均值是多少？

解法 1　由期望的线性性可知局部极大的平均数就等于当 k 遍历 $1,2,\cdots,n$ 时，在 k 处取得局部极大的概率的和. 对 $k=1$，这个概率是 1/2：给定对 $\{\pi(1),\pi(2)\}$，这就等价于 $\pi(1)$ 或 $\pi(2)$ 之中那个可能较大的概率. 同理，对 $k=n$，这个概率也是 1/2. 对 $1<k<n$，这个概率是 1/3：给定对 $\{\pi(k-1),\pi(k),\pi(k+1)\}$，这就等价于这三个数之中那个可能最大的概率. 那样，局部极大的的平均数就是

$$2\cdot\frac{1}{2}+(n-2)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+1}{3}$$

解法 2　另一个应用期望的线性性的方法是计算 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 作为一个局部极大的概率. 对此最有效的方法是想象在一个圆周上按某种顺序写下一个由符号 $1,\cdots,n,*$ 组成的置换. 数字 i 是一个局部极大如果两个都属于集合 $\{*,1,\cdots,i-1\}$ 的符号是相邻的. 有 $i(i-1)$ 对那种符号，总共有 $n(n-1)$ 个对子，因此 i 是一个局部极大的概率是 $i(i-1)/n(n-1)$，而局部极大的平均数就是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{2}=\frac{2}{n(n-1)}\binom{n+1}{3}=\frac{n+1}{3}$$

也可以归纳地获得一个类似的结果(稍微更烦一点)，通过拿走一个已知的局部极大 n 并将其分成两个较短的叙列.

注：局部极大的通常意义是一个山峰. 山峰的数目的全分布是已知的；Richard Stanley 建议参考：F. N. David 和 D. E. Barton, Combinatorial Chance, Hafner, New York, 1962, 第 162 页及下文.

A－5 设 n 是一个正奇数，θ 是一个使得 θ/π 为无理数的实数. 设 $a_k = \tan(\theta + k\pi/n)$，$k = 1,2,\cdots,n$. 证明

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

是一个整数并且确定它的值.

解 由于所要的表达式涉及 $a_1,\cdots,a_n$ 的对称函数，我们首先求出以 $a_1,\cdots,a_n$ 为根的多项式. 注意

$$1 \pm \mathrm{i}\tan\theta = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}\sec\theta$$

因而
$$1 \pm \mathrm{i}\tan\theta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i}\tan\theta)$$

其次如果我们令 $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\theta}$，那么多项式

$$Q_n(x) = (1 + \mathrm{i}x)^n - \omega(1 - \mathrm{i}x)^n$$

有根 $a_1,\cdots,a_n$. 由于它们是不同的并且 Q_n 的阶是 n，因此这就恰是它的全部的根. 如果我们写

$$Q_n(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$$

那么
$$a_1 + \cdots + a_n = -c_{n-1}/c_n,\ a_1 \cdots a_n = -c_0/c_n$$

因此我们所求的比率就是 c_{n-1}/c_0. 由观察法可知

$$c_{n-1} = n\mathrm{i}^{n-1} - \omega n(-\mathrm{i})^{n-1} = n\mathrm{i}^{n-1}(1 - \omega),\ c_0 = 1 - \omega$$

因此
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_1 \cdots a_n}\begin{cases} n, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -n, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

注 同理可以说明任意两个奇的 $a_1,\cdots,a_n$ 的初等对称函数的比例是不依赖于 θ 的.

A－6 在一个给定的圆内，随机地选取4个点. 求出这4个点构成一个凸四边形的概率.

解法1(Daniel Kane) 所求的概率是 $1 - \frac{35}{12\pi^2}$. 我们首先给出一些符号和简化. 为简单起见，不失一般性假设圆的半径是1. 设 E 表示随机变量遍历 P,Q,R 的所有选择时的期望值. $[XYZ]$ 表示 $\triangle XYZ$ 的面积. 如果 P,Q,R,S 是四个点，我们可以忽略其中三个点共线的情况，由于这种情况发生的概率为零. 那么它们无法构成一个凸四边形顶点的唯一可能就是其中一个点位于另外三个点构成的三角形的内部的情况. 根据其中哪个点位于三角形内部一共有四种那种构型. 而且这四种构型是互相排除的. 因此所求的概率是1减去四倍的 S 落在 $\triangle PQR$ 内部的概率. 而后者的概率就等于 $E([PQR])$ 除以圆的面积.

设 O 表示圆心，P',Q',R' 是 P,Q,R 从 O 到圆上的射影. 适

当选择符号后,我们可以写

$$[PQR]=\pm[OPQ]\pm[OQR]\pm[ORP]$$

其中的符号可按下述方法确定.如果点 P',Q',R' 不位于一个半圆上,那么所有的符号都是正的.如果 P',Q',R' 位于一个半圆上而使得 Q 位于 $\triangle OPR$ 的内部,那么$[OPR]$的符号是正的,而其它的是负的.如果 P',Q',R' 位于一个半圆上而使得 Q 位于三角形 OPR 的外部,那么$[OPR]$的符号是负的,而其它的是正的.

我们首先算出

$$E([OPQ]+[OQR]+[ORP])=3E([OPQ])$$

设 $r_1=OP,r_2=OQ,\theta=\angle POQ$,因此

$$[OPQ]=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$$

r_1 在$[0,1]$上的分布由 $2r_1$ 给出(即极坐标公式中变量的变化值),对 r_2 类似.θ 在$[0,\pi]$上的分布是一致的.这三个分布是互相独立的,因此

$$E([OPQ])=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 2r^2\mathrm{d}r\right)^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{4}{9\pi}$$

而

$$E([OPQ]+[OQR]+[ORP])=\frac{4}{3\pi}$$

我们现在处理 P',Q',R' 位于一个半圆上的情况.设 $\theta_1=\angle POQ,\theta_2=\angle QOR$;那么 θ_1,θ_2 在区域

$$0\leqslant\theta_1,0\leqslant\theta_2,\theta_1+\theta_2\leqslant\pi$$

上的分布是一致的.特别 $\theta=\theta_1+\theta_2$ 在$[0,\pi]$上的分布是$\frac{2\theta}{\pi^2}$.令 $r_P=OP,r_Q=OQ,r_R=OR$.与上面同样,r_P 在$[0,1]$众的分布是 $2r_P,r_Q,r_R$ 类似.潭门是互相独立的并且也与 θ_1,θ_2 无关.设 $E'(X)$ 是随机变量关于这一部分区域的期望值.

设 χ 是随机变量,当 Q 位于 $\triangle OPR$ 内部是其值为 1,其余情况为 0.我们现在算出

$$E'([OPR])=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 2r^2\mathrm{d}r\right)^2\left(\int_0^{\pi}\frac{2\theta}{\pi^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{4}{9\pi}$$

$$E'(\chi[OPR])=E'(2[OPR]^2/\theta)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_0^1 2r^3\mathrm{d}r\right)^2\left(\int_0^{\pi}\frac{2\theta}{\pi^2}\theta^{-1}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{1}{8\pi}$$

我们再回忆给定任意 $\triangle XYZ$,如果 T 是在三角形内部一致的随机选择的,那么$[TXY]$的期望值就是 XY 边和 $\triangle XYZ$ 的质心所围成的三角形的面积,即$\frac{1}{3}[XYZ]$.

设 χ 是随机变量,当 Q 位于 $\triangle OPR$ 内部是其值为 1,其余情况为 0.那么

$$E'([OPQ]+[OQR]+[ORP]-[PQR])=$$
$$2E'(\chi([OPQ]+[OQR])+2E'((1-\chi)[OPR])=$$
$$2E'(\frac{2}{3}\chi[OPR])+2E'([OPR])-2E'(\chi[OPR])=$$
$$2E'([OPR])-\frac{2}{3}E'(\chi[OPR])=\frac{29}{36\pi}$$

最后注意 P',Q',R' 按某种顺序位于半圆上的概率是 3/4.(从 P' 按顺时针方向到末点排列的情况有 1/4 的概率,这种情况和其它两种类似的情况是互相排除的,并且包括了所有可能的情况)因此

$$E([PQR])=E([OPQ])+E([OQR])+E([ORP])-$$
$$\frac{3}{4}E'([OPQ]+[OQR]+[ORP]-[PQR])=$$
$$\frac{4}{3\pi}-\frac{29}{48\pi}=\frac{35}{48\pi}$$

因此原来的概率就是

$$1-\frac{4E([PQR])}{\pi}=1-\frac{35}{12\pi^2}$$

解法 2(David Savitt) 像解法 1 中那样,只须检验当 P,Q,R 在圆中一致的随机的选择时,$E([PQR])=\frac{35}{48\pi}$ 即可.作直线 PQ,QR,RP,它们以概率 1 把圆的内部分成了 7 个区域.设 $a=[PQR]$,b_1,b_2,b_3 表示三个由三角形的两边和圆所围成的区域的面积,而 c_1,c_2,c_3 是其余三部分的面积.设 $A=E(a)$,$B=E(b_1)$,$C=E(c_1)$,因而 $A+3B+3C=\pi$.

注意 $c_1+c_2+c_3+a$ 是我们可以选一个 S 使得 $PQRS$ 无法构成一个凸四边形的那种区域的面积.通过比较期望值,我们有 $3C+A=4A$,因此 $A=C$ 而 $4A+3B=\pi$.

我们将算出 $B+2A=B+2C$,这是圆被一根通过随机的点 D,E,并且不包含第三个随机的点 F 的弦所割开的部分的预期面积.设 h 是从圆心 O 到 DE 的距离.我们现在来确定 h 的分布.

设 $r=OD$,r 在$[0,1]$上的分布是 $2r$.不是一般性,设 O 是原点而 D 位于正 x 轴上.对固定的 r,h 遍历$[\theta,r]$时的分布可以通过计算一个无穷小区域的面积而得,在此区域中,E 可以选得使通过DE 的弦到O 的距离在h/π和$(h+dh)/\pi$之间.这个区域分成了两个对称的片,其中之一在两根弦之间,其中一根弦和 x 轴之间的夹角为 $\arcsin(h/r)$,另一根弦和 x 轴之间的夹角为 $\arcsin((h+dh)/r)$.这两根弦之间的夹角是 $d\theta=dh/(r^2-h^2)$.做一根通过 D 并且到O 的距离是h 的弦,并且设 L_1,L_2 是 D 的两边的线段

的长度;那么我们所求的面积就是$\frac{1}{2}(L_1^2+L_2^2)\mathrm{d}\theta$.由于

$$\{L_1,L_2\}=\sqrt{1-h^2}\pm\sqrt{r^2-h^2}$$

我们所求的面积(经过加倍后)就是

$$2\frac{1+r^2-2h^2}{\sqrt{r^2-h^2}}$$

除以 π,再对 r 积分,我们就求得 h 的分布是

$$\frac{1}{\pi}\int_h^1 2\frac{1+r^2-2h^2}{\sqrt{r^2-h^2}}2r\mathrm{d}r=\frac{16}{3\pi}(1-h^2)^{3/2}$$

我们现在回过头来计算 $B+2A$.设 $A(h)$ 表示圆被到圆心的距离为 h 的弦所分成的两部分区域中面积最小的部分的面积.第三个点位于较小部分(位于较大部分)的机会是 $A(h)/\pi$(相应的 $1-A(h)/\pi$).而我们所要计算的面积是 $\pi-A(h)$(相应的 $A(h)$).利用 h 的分布和下述事实

$$A(h)=2\int_h^1\sqrt{1-h^2}\mathrm{d}h=\frac{\pi}{2}-\arcsin(h)-h\sqrt{1-h^2}$$

我们求出

$$B+2A=\frac{2}{\pi}\int_0^1 A(h)(\pi-A(h))\frac{16}{3\pi}(1-h^2)^{3/2}\mathrm{d}h=\frac{35+24\pi^2}{72\pi}$$

由于 $4A+3B=\pi$,我们解方程即得到像解法1中那样 $A=\frac{35}{48\pi}$.

解法3(Noam Elkies) 再次我们把问题归结为计算在单位圆内部三个随机的点 A,B,C 所形成的三角形的面积.设 O 是圆心,$c=\max\{OA,OB,OC\}$,那么 $c\leqslant r$ 的概率是$(r^2)^3$,因此 c 在$[0,1]$上的分布是$6c^5dc$.给定 c,$[ABC]$的期望值等于 c^2 乘以 X,它是在圆内由两个随机的点 P,Q 和一个固定的点 R 所形成的三角形的期望面积.我们引入以 R 为中心的极坐标系,在此坐标系中,圆由 $r=2\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$给出.当 θ 遍历$[0,\pi]$以及 r 遍历$[\theta,2\sin\theta]$时,圆上的随机点的分布是$\frac{1}{\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.如果$(r,\theta)$和$(r',\theta')$是两个随机的点,那么那个面积就是$\frac{1}{2}rr'\sin|\theta-\theta'|$.

先对 r 和 r' 实行积分,我们求出

$$X=\frac{32}{9\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\sin^3\theta\sin^3\theta'\sin|\theta-\theta'|\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{64}{9\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\theta\sin^3\theta\sin^3\theta'\sin|\theta-\theta'|\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\theta$$

这个积分是令人不愉快的,但却是可以直接计算的,这就得出 $X=35/(36\pi)$,而 $E([PQR])=\int_0^1 6c^7X\mathrm{d}c=35/(48\pi)$,这就给出

所要的结果.

注 这是一个最古老的几何概率问题,它是Sylvest四点问题的一个例子,这个问题今天通常是利用一个假定已知Crofton公式的装置去解.我们建议读者访问 http://mathworld.wolfram.com/去做进一步的讨论.

B-1 说明曲线 $x^3+3xy+y^3=1$ 上只有三个不同的可构成一个等边三角形的点 A,B,C,并且求出这个等边三角形的面积.

解 "曲线"$x^3+3xy+y^3-1=0$实际上是可约的,由于左边可分解因式如下

$$(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$$

此外,第二个因式是

$$\frac{1}{2}((x+1)^2+(y+1)^2+(x-y)^2)$$

因此它只在$(-1,-1)$处变为零.那样问题中的曲线仅由一个单独的点$(-1,-1)$和直线 $x+y=1$ 组成.为了用这条曲线上的三个点构成一个三角形,其中一个顶点必须是$(-1,-1)$.其余两个顶点位于直线 $x+y=1$ 上.因此从$(-1,-1)$所引的高是从$(-1,-1)$到$(1/2,1/2)$之间的距离,或者 $3\sqrt{2}/2$.高为 h 的等边三角形的面积为 $h^2\sqrt{3}/3$,因此所求的面积是 $3\sqrt{3}/2$.

注 上面所用的因式分解是下述分解的一种特殊情况

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

其中 ω 表示1的立方原根.这一事实又是从循环矩阵

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

的行列式的计算而来.这个行列式的特征值对应的特征向量是$(1,\omega^i,\omega^{2i})$,$i=0,1,2$.

B-2 证明:对每个包含 n 个实数的集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 都存在一个 X 的非空子集 S 和一个整数 m 使得

$$\left|m+\sum_{s\in S}s\right|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

解 设$\{x\}=x-[x]$表示 x 的分数部分.对 $i=0,\cdots,n$ 设 $s_i=x_1+\cdots+x_i$(因此 $s_0=0$).把$\{s_0\},\cdots,\{s_n\}$按大小重新排列

并记为 $t_0,\cdots,t_n$. 由于 $0=t_0\leqslant\cdots\leqslant t_n<1$,因此差

$$t_1-t_0,\cdots,t_n-t_{n-1},1-t_n$$

是至多为 1 的非负数. 因而(应用抽屉原则) 这些差中的某一个不大于 $1/(n+1)$;如果这个差不是 $1-t_n$,那么对某个 $0\leqslant i<j\leqslant n$,它等于 $\pm(\{s_i\}-\{s_j\})$. 令 $S=\{x_{i+1},\cdots,x_j\}$ 以及 $m=[s_i]-[s_j]$,那么

$$\left|m+\sum_{s\in S}s\right|=|m+s_j-s_i|+|\{s_i\}-\{s_j\}|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

即得欲证. 在 $1-t_n\leqslant 1/(n+1)$ 的情况下,我们取 $S=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 以及 $m=-[s_n]$,那么我们再次得到所要证的结论.

B-3 设 S 是一个平面上有限个点的集合. S 的线性分划是 S 的子集 A,B 的一个无序对 $\{A,B\}$ 使得 $A\cup B=S,A\cap B=\varnothing$ 并且 A,B 位于某条和 S 不相交的直线的两边(A 或 B 可能是空集). 设 L_S 是 S 的线性分划的数目,对每个正整数 n,求出当遍历所有 n 个点的集合 S 时,L_S 的最大值.

解 最大数是 $\binom{n}{2}+1$,排除平凡的情况后(在此情况中所有的点都在一个部分中) 达到此数的例子是一个凸的正 n 边形,当穿过一个唯一的一对边画直线时就产生一个分划.

解法 1 我们将证明在任何没有两根都包含 S 中的点是平行线的构型中,$L_S=\binom{n}{2}+1$. 这就足以推出所有构型的最大数:给定一个最大构型,我们可以稍微变动它的点以得到另外一个最大构型,而此构型满足我们的假设. 为方便起见,设 $n\geqslant 3$,由于 $n=1,2$ 的情况是容易解决的. 设 P 是实射影平面中的在无穷远处的直线,即 P 是平面中直线的所有可能的方向的集合,它可以看成是一个圆. 去掉那些通过 S 中两个点的直线所对应的方向后,就留下了$\binom{n}{2}$个缺口.

给定一个这种缺口中的方向,考虑所有由平行于这一方向的直线所给出的线性分划的集合. 注意所得的分划的集合仅依赖于缺口. 然后再注意这个集合与相邻的缺口所联系的集合只有一个元素是不同的.

把 S 的所有的点都分在一边的平凡分划在每一个上述集合中. 我们现在观察那种另外的线性分划 $\{A,B\}$,使得缺口的集合对于 $\{A,B\}$ 来说是

(1) 一个连续的缺口的块,但

(2) 这个块不是全部的缺口.

对于(1) 注意如果 l_1, l_2 是两条不平行的达到同样分划的直线,那么我们可以围绕它们的交点旋转以达到所有在一边或另一边的中间方向.对于(2),$n = 3$ 的情况是显然的;为了把一般情况归结为这种情况,取点 P, Q, R 使得 P 位于 Q 和 R 所在的分划的对边.

现在这就得出除了平凡的分划之外,每个线性分划都恰在一个地方发生,在那个地方,分划和某个缺口相连但此缺口不是按反时针方向和它紧挨着的那个缺口.换句话说,线性分划的数目要比缺口的数目多 1,即像我们所要的那样是 $\binom{n}{2} + 1$.

解法 2 我们对 n 用数学归纳法来证明上界.在 S 的凸壳中选一点 P.令 $S' = S \setminus \{P\}$,那么由归纳法假设,至多存在 $\binom{n-1}{2} + 1$ 个 S' 的分划.注意 S 的每个线性分划造成一条分划 S' 的直线,因而也造成一个 S' 的分划.此外如果 S 的两个线性分划造成 S' 中的相同的分划,那么 S' 中的那个分划是由一条通过 P 的直线造成的.

通过旋转通过 P 的直线,我们看出,S' 中至多有 $n - 1$ 个分划是由通过 P 的直线造成的,即分划旨在旋转的直线通过 S 中的点时才会发生变化,这就得出所要的结果.

解法 3(Noam Elkies) 通过添加一条无穷远直线而把平面扩大成射影平面.然后应用中心在 $O \in S$ 的极对偶地图就得出对偶的射影平面中 S 到 S' 的 $n - 1$ 条直线的集合 S'.设 O' 是对偶平面中对应于原来的无穷远直线的点,那么它不位于 S' 中的任何一条直线上.

设 l 是原平面中对应于对偶平面上的一点 P 的直线.如果我们用 l 构成一个线性分划,那么 $S \setminus \{O\}$ 的点将位于 O 所对应的中的 S' 中的直线的同一部分,这条直线穿过线段 $O'P$.如果我们考虑对偶的仿射平面被 S' 中的直线所分成的区域,那么 S' 中的直线穿过线段 $O'P$ 并且由 P 所在的区域确定.

那样我们原来的最大数就等于划分仿射平面的 $n - 1$ 条直线所在区域的最大数,由对 n 的归纳法容易得出,这个最大数为 $1 + \binom{n}{2}$.

注 给出 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有限点集 S,S 的一个非 Radon 分划是一个可被超平面分开的完全子集的对 (A, B).Radon 定理说如果

$\# S \geqslant n+2$,那么不是每个(A,B)都是一个非 Radon 分划.问题中的结果已被大为推广,特别是在矩阵胚理论和有向矩阵胚理论中.Richard Stanley 建议以下参考文献:T. H. Brylawski, A combinatorial perspective on the Radon convexity theorem, Geom. Ded. 5 (1976), 459-466; and T.Zaslavsky, Extremal arrangements of hyperplanes, Ann.N. Y. Acad. Sci. 440 (1985), 69-87.

B-4 设 Z 表示 $\mathbf{R}^n$ 中坐标为0或1的点的集合.(因此 Z 有 2^n 个元素,它们是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位超正方体的顶点)给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个向量子空间 V,设 $Z(V)$ 表示 Z 在 V 中的元素的数目.设 k 是一个整数使得 $0 \leqslant k \leqslant n$.求出当遍历所有的 k 维子空间时,$V \cap Z$ 中点的数目的最大值①.

解 最大数是 2^k,在子空间 $\{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1=\cdots=x_{n-k}=0\}$ 的例子中达到.

解法1 更一般的,我们证明 $\mathbf{R}^n$ 中的任意 k 维仿射平面至多包含 2^k 个 Z 中的点.我们通过对 $k+n$ 做数学归纳法来证明,对 $k=n=0$ 的情况命题显然成立.

假设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 k-平面.用 V_0 和 V_1 表示超平面 $\{x_n=0\}$ 和 $\{x_n=1\}$.如果 $V \cap V_0$ 和 $V \cap V_0 V \cap V_1$ 都至多是 $(k-1)$-维的,那么由归纳法假设,$V \cap V_0 \cap Z$ 和 $V \cap V_1 \cap Z$ 都至多含 2^{k-1} 个元素,因而 $V \cap Z$ 至多有 2^k 个元素.如果 $V \cap V_0$ 或 $V \cap V_1$ 是 k-维的,那么 $V \subset V_0$ 或 $V \subset V_1$;现在把 V 看成 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的子集,对 V 应用归纳法假设就得出最后的结论.

解法2 设 S 是 Z 的包含在一个 V 的 k-维子空间中的子集.这就等价于去求任何满足非平凡相关 $c_1t_1+\cdots+c_{k+1}t_{k+1}=0$, $c_1,\cdots,c_{k+1} \in \mathbf{R}$ 关系的 $t_1,\cdots,t_{k+1} \in S$.

由于 $t_1,\cdots,t_{k+1} \in \mathbf{Q}^n$,因此所给的线性相关关系是我们总可以另一个相关关系使得 $c_1,\cdots,c_{k+1} \in \mathbf{Q}$,然后通过去分母,我们就可以求出 $c_1,\cdots,c_{k+1} \in \mathbf{Z}$ 且 $c_1,\cdots,c_{k+1}$ 没有公因数.

设 F_2 表示两个元素的域,且让 $\overline{S} \subseteq F_2^n$ 是对模2同余的 S 中的点.那么任意 $t_1,\cdots,t_{k+1} \in \overline{S}$ 满足非平凡的线性相关关系,由于我们可以从上一段末和对2同余来取所需的依赖关系.因此被包含在 F_{2^n} 的 k-维子空间中,而后者至多有 2^k 个元素,因此 S 也是.

① 确实,这一命题也可写成 $Z(V)$ 以代替"$V \cap Z$ 中点的数目",但是这没有什么本质的不同.

证明的变形版本(由 David Savitt 建议):如果 $\overline{S}$ 含有 $k+1$ 个线性无关的元素,则由这些元素构成的 $(k+1)\times n$ 矩阵有非零的最大子式,这个子式返回到 **R** 中去的副本也不为零,因此 S 将包含 $k+1$ 个线性无关的元素.

解法 3(Catalin Zara) 设 V 是一个 k - 维子空间.构造一个行是由 $V\cap Z$ 中的元素组成的矩阵.由此矩阵的构造就得出它的行秩至多为 k,因而它的列秩也至多为 k.特别,我们可以选择 k 个坐标使得 $V\cap Z$ 中的每个点由这 k 个坐标确定.由于 Z 中的点的坐标只能取两个值,因此 $V\cap Z$ 至多只可能有 2^k 个元素.

注 提出者可能没有意识到这个问题在竞赛前 3 个月时已出现在网址为 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t = 105991.的网页上了.(也很可能出现得更早)

B - 5 对每个 $[0,1]\to\mathbf{R}$ 的连续函数 f,设

$$I(f)=\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x,J(f)=\int_0^1 x(f(x))^2\mathrm{d}x$$

求当遍历所有那种函数 f 时,$I(f)-J(f)$ 的最大值.

解 答案是 1/16.我们有

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x^3/4-x(f(x)-x/2)^2\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 x^3/4\mathrm{d}x=1/16$$

等号在 $f(x)=x/2$ 时成立.

B - 6 设 k 是一个大于 1 的整数,$a_0>0$,对 $n>0$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$$

解法 1 我们从给出 a_n 的某些容易得出的上界和下界开始.我们写 $O(f(n))$ 和 $\Omega(f(n))$ 分别表示使得 $f(n)/g(n)$ 和 $g(n)/f(n)$ 有上界的函数 $g(n)$.由于 a_n 是不减的叙列,$a_{n+1}-a_n$ 是有上界的,因此 $a_n=O(n)$.这意味着

$$a_n^{-1/k}=\Omega(n^{-1/k})$$

因此

$$a_n=\Omega\left(\sum_{i=1}^n i^{-1/k}\right)=\Omega(n^{(k-1)/k})$$

事实上，正如我们所需，当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to\infty$. 由带余项的 Taylor 定理得出，对 $1<m<2$ 和 $x>0$

$$|(1+x)^m-1-mx|\leqslant\frac{m(m-1)}{2}x^2$$

取

$$m=(k+1)/k$$

和

$$x=a_{n+1}/a_n=1+a_n^{-(k+1)/k}$$

我们得出

$$\left|a_{n+1}^{(k+1)/k}-a_n^{(k+1)/k}-\frac{k+1}{k}\right|\leqslant\frac{k+1}{2k^2}a_n^{-(k+1)/k}$$

特别

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^{(k+1)/k}-a_n^{(k+1)/k})=\frac{k+1}{k}$$

一般的，如果 x_n 是一个使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ 的叙列，那么由 Cesaro 引理，也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=c$$

确切的说，对任意 $\varepsilon>0$，我们可以求出 N 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|x_n-c|\leqslant\varepsilon/2$，那样当 n 充分大时

$$\left|c-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{N}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(c-x_i)\right|$$

从而右边是小于 ε 的.

在我们的情况中，我们导出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{(k+1)/k}}{n}=\frac{k+1}{k}$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

如我们所欲证的.

注 上面所用的 Cesaro 引理是 Cesaro – Stolz 定理在 $b_n=n$ 时的特殊情况. 这一定理是：设 a_n,b_n 是那种叙列使得 b_n 是正的，严格递增的并且是无界的叙列，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

解法 2 在此解法中，不用对 $1<m<2$ 和 $x>0$ 时的带余项的 Taylor 定理，而只用凸性导出

$$(1+x)^m\geqslant 1+mx$$

这就给出

$$a_{n+1}^{(k+1)/k}-a_n^{(k+1)/k}\geqslant\frac{k+1}{k}$$

因而对某个 $c\in\mathbf{R}$

$$a_n^{(k+1)/k} \geqslant \frac{k+1}{k}n + c$$

特别
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n^{(k+1)/k}}{n} \geqslant \frac{k+1}{k}$$

因而
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{k/(k+1)}} \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k/(k+1)}$$

但是另一方面

$$a_{n+1} - a_n = a_n^{-1/k} \leqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^{-1/(k+1)} n^{-1/(k+1)}(1 + o(1))$$

其中 $o(1)$ 表示当 $n \to \infty$ 时趋于 0 的函数,得出

$$a_n \leqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^{-1/(k+1)} \sum_{i=1}^{n} i^{-1/(k+1)}(1 + o(1)) =$$
$$\frac{k+1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-1/(k+1)} n^{k/(k+1)}(1 + o(1)) =$$
$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k/(k+1)} n^{k/(k+1)}(1 + o(1))$$

因而
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{k/(k+1)}} \leqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k/(k+1)}$$

这就完成了证明.

解法 3 像在解法 1 中那样,我们断言 $a_n \to \infty$.对后面将要确定的 L 写 $b_n = a_n - Ln^{k/(k+1)}$,我们有

$$b_{n+1} = b_n + a_n^{-1/k} - L((n+1)^{k/(k+1)} - n^{k/(k+1)}) = e_1 + e_2$$

其中
$$e_1 = b_n + a_n^{-1/k} - L^{-1/k}n^{-1/(k+1)}$$
$$e_2 = L((n+1)^{k/(k+1)} - n^{k/(k+1)}) - L^{-1/k}n^{-1/(k+1)}$$

我们首先估计 e_1.对 $-1 < m < 0$,由 $(1+x)^m$ 和 $(1+x)^{1-m}$ 的凸性,我们有

$$1 + mx \leqslant (1+x)^m \leqslant 1 + mx(1+x)^{m-1}$$

因此
$$-\frac{1}{k}L^{-(k+1)/k}n^{-1}b_n \leqslant e_1 - b_n \leqslant -\frac{1}{k}b_n a_n^{-(k+1)/k}$$

注意所给的两个界都和 b_n 反号.此外,由 $a_n = \Omega(n^{(k-1)/k})$,对充分大的 n,这两个界的绝对值都严格小于 b_n,因此,当 n 充分大时,$|e_1| \leqslant |b_n|$.

我们现在估计 e_2.由对 $x > 0, 0 < m < 1$ 应用带余项的 Taylor 公式可得

$$1 + mx \geqslant (1+x)^m \geqslant 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2$$

$L((n+1)^{k/(k+1)} - n^{k/(k+1)})$ 的"主项"是 $L\dfrac{k}{k+1}n^{-1/(k+1)}$ 为使它和 $\dfrac{k}{k+1}n^{-1/(k+1)}$ 相同,令

$$L = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k/(k+1)}$$

然后我们求出 $e_2 = O(n^{-2})$. 由于 $b_{n+1} = e_1 + e_2$,我们有

$$|b_{n+1}| \leqslant |b_n| + |e_2|$$

因此
$$|b_n| = O\left(\sum_{i=1}^{n} i^{-2}\right) = O(1)$$

以及
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k} = L^{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

注 $k=2$的情况在2004年罗马尼亚(区水平的)奥林匹克数学竞赛中出现过.

仿照本题的证法可以对由 $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$ 给出的任意叙列给出一个类似的证明,其中 f 是递减函数.

代替本题所给的迭代,Richard Stanley 建议了一个

用微分方程

$$y' = y^{-1/k}$$

的渐近行为去确定由

$$a_{n+1} - a_n = a_n^{-1/k}$$

给出的叙列的渐近行为的启发式的思路.

第68届美国大学生数学竞赛

A－1 求出所有使曲线 $y = \alpha x^2 + \alpha x + \frac{1}{24}$ 和曲线 $x = \alpha y^2 + \alpha y + \frac{1}{24}$ 相切的 α 的值.

解 仅有的 α 是 $2/3, 3/2, (13 \pm \sqrt{601})/12$.

解法1 设 C_1 和 C_2 分别是曲线 $y = \alpha x^2 + \alpha x + \frac{1}{24}$ 和 $x = \alpha y^2 + \alpha y + \frac{1}{24}$,并且设 L 是直线 $y = x$.我们考虑三种情况.

i 如果 C_1 和 L 相切,则切点 (x, x) 满足 $2\alpha x + \alpha = 1, x = \alpha x^2 + \alpha x + \frac{1}{24}$,由对称性,$C_2$ 也和 L 在那相切,因此 C_1 和 C_2 相切.在上面的第一个方程中写 $\alpha = 1/(2x + 1)$ 并代入第二个方程,我们有

$$x = \frac{x^2 + x}{2x + 1} + \frac{1}{24}$$

它可化简为

$$0 = 24x^2 - 2x - 1 = (6x + 1)(4x - 1) \text{ 或 } x \in \{1/4, -1/6\}$$

这就得出

$$\alpha = 1/(2x + 1) \in \{2/3, 3/2\}$$

ii 如果 C_1 不和 L 相交,那么 C_1 和 C_2 被 L 分开,因此它们不可能相切.

iii 如果 C_1 和 L 交于两个不同的点 P_1, P_2,那么它不可能和 L 在其它点相切.假设在这两点之一,比如说 P_1,C_1 的切线是垂直于 L 的,则由对称性,C_2 也是这样,因此 C_1 和 C_2 将在 P_1 处相切.在这种情况,点 $P_1 = (x, x)$ 满足

$$2\alpha x + \alpha = -1, x = \alpha x^2 + \alpha x + \frac{1}{24}$$

在上面的第一个方程中写 $\alpha = -1/(2x + 1)$ 并代入第二个方程,我们有

$$x = -\frac{x^2 + x}{2x + 1} + \frac{1}{24}$$

或 $x = (-23 \pm \sqrt{601})/72$,这导致

$$\alpha = -1/(2x+1) = (13 \pm \sqrt{601})/12$$

如果 C_1 在 P_1,P_2 的切线不与 L 垂直,那么我们断言 C_1 和 C_2 不可能有任何切点.确实,如果我们去数 C_1 和 C_2 的交点个数(通过把 C_1 代入到 C_2 中的 y,然后对 y 求解),我们算上重数至多得出 4 个解.其中两个是 P_1 和 P_2,而任意切点就是多出来的两个.然而除了和 L 的交点之外,任意切点都有一个镜像,它也是切点.但是我们不可能有 6 个解,这样,我们就求出了所有可能的 α.

解法 2 对 α 的任何非零的值,二次曲线在复射影平面 $P^2(C)$ 上将交于 4 点.为了确定这些交点的 y - 坐标,把两个方程相减得到

$$y - x = \alpha(x-y)(x+y) + \alpha(x-y)$$

因此在交点处或者 $x = y$,或者 $x = -1/\alpha - (y+1)$.把这两个可能的线性条件代入第二个方程说明交点的 y - 坐标是 $Q_1(y) = \alpha y^2 + (\alpha - 1)y + 1/24$ 的根或 $Q_2(y) = \alpha y^2 + (\alpha+1)y + 25/24 + 1/\alpha$ 的根.

如果两条曲线相切,则至少有两个交点将重合;反过来也对,由于一条曲线是 x 的图象.当 Q_1 或 Q_2 的至少一个的判别式是 0 时,曲线将重合.计算 Q_1 或 Q_2 的判别式(精确到常数因子)产生

$$f_1(\alpha) = 6\alpha^2 - 13\alpha + 6$$

和

$$f_2(\alpha) = 6\alpha^2 - 13\alpha - 18$$

另一方面,如果 Q_1 或 Q_2 有公根,则它必须也是 $Q_2(y) - Q_1(y) = 2y + 1 + 1/\alpha$ 的根,这得出

$$y = -(1+\alpha)/(2\alpha)$$

和

$$0 = Q_1(y) = -f_2(\alpha)/(24\alpha)$$

那样,使得两条曲线相切的 α 的值必须被包含在 f_1 和 f_2 的零点的集合即 $2/3, 3/2$ 和 $(13 \pm \sqrt{601})/12$ 之中.

注 在 $P^2(C)$ 中,两条二次曲线算上重数将交于 4 个点是 Bezout 定理的特例,这个定理是:$P^2(C)$ 中的两条阶为 m,n 并且没有公因子的曲线算上重数恰相交于 mn 个点.

很多解答者感到提出者选择参数 1/24 是否有特殊的原因,这一选择给出两个有理根和两个无理根.事实上,这一参数如何选择对问题没有本质关系.为使 4 个根都是有理数,用 β 代替 1/24 使 $\beta^2 + \beta$ 和 $\beta^2 + \beta + 1$ 都是完全平方数即可.但除了平凡情况($\beta = 0, -1$)这一例外,由于椭圆曲线 24A1(按照 Cremona 的记号)的秩是

0(感谢 Noam Elkies 提供的计算),实际上不可能发生这种情况①.

然而,存在着处于中间状态的选择,例如 $\beta = 1/3$ 给出 $\beta^2 + \beta = 4/9$ 和 $\beta^2 + \beta + 1 = 13/9$,而 $\beta = 3/5$ 给出 $\beta^2 + \beta = 24/25$ 和 $\beta^2 + \beta + 1 = 49/25$.

A - 2 求出平面上和双曲线 $xy = 1$ 的两支以及 $xy = -1$ 的两支都相交的凸集的最小可能的面积.(平面上一个集合 S 称为是凸的,如果对 S 中的任何两个点,连接它们的线段都被包含在 S 之内)

解 最小值是 4,在顶点是 $(\pm 1, \pm 1)$ 的正方形的情况下达到.

解法 1 为证明 4 是下界,设 S 是具有所述形式的凸集.在两个双曲线的分支上选 $A,B,C,D \in S$ 使得 A 位于右上象限,B 在左上,C 在左下,D 在右下,那么四边形 $ABCD$ 的面积是 S 的面积的一个下界.

设 $A = (a,1/a)$,$B = (b,-1/b)$,$C = (-c,-1/c)$,$D = (-d,1/d)$,$a,b,c,d > 0$,那么 $ABCD$ 的面积是

$$\frac{1}{2}(a/b + b/c + c/d + d/a + b/a + d/c + a/d)$$

由算数 - 几何平均不等式可得上式至少是 4.

解法 2 像解法 1 中那样选择 A,B,C,D.注意两条双曲线和 $ABCD$ 的凸壳对任意 $m > 0$ 在变换 $(x,y) \mapsto (xm, y/m)$ 下是不变的.对小的 m,从 AC 到 BD 的角趋于 0,对大的 m,这一角度趋于 π.因而由连续性对某个 m,这一角度将成为 $\pi/2$,即 AC 和 BD 将成为垂直的,这时 $ABCD$ 的面积是 $AC \cdot BD$.

现在只要注意 $AC \geqslant 2\sqrt{2}$(对 BD 类似)就够了.而此式成立是由于如果我们在点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 处作双曲线 $xy = 1$ 的切线,那么 A 和 C 将位于这两条线所夹的区域之外.如果我们把线段 AC 垂直投影到直线 $x = y$ 上,那么所得的投影的长度至少是 $2\sqrt{2}$,因此 AC 的长度也至少是 $2\sqrt{2}$.

解法 3(Richard Stanley) 像解法 1 中那样选择 A,B,C,D.现在固定 A 和 C,移动 B 和 D 使它们是曲线的平行于 AC 的切线的切点,这不增加四边形 $ABCD$ 的面积(甚至在四边形不凸的情况下).

① 指 $\beta^2 + \beta$ 和 $\beta^2 + \beta + 1$ 都是完全平方数的情况.——译者注

注意现在 B 和 D 的位置是截然相对的，因此可设 $B=(-x, 1/x)$ 和 $D=(x,-1/x)$. 如果我们重复上面的论述，而固定 B 和 D 并且移动 A 和 C 到和 BD 平行的切线的切点处，那么 A 和 C 必须移动到 $(x,1/x)$ 和 $(-x,-1/x)$ 处，从而构成一个面积为 4 的矩形.

注 很多几何的解法是可能的. 一个例子是由 David Savitt 建议的(归于 Chris Brewer)：注意 AD 和 BC 分别穿过正的和负的 x 轴，因此 $ABCD$ 的凸壳包含 O，然后验证 $\triangle OAB$ 的面积至少是 1，其它类似.

A－3 设 k 是一个正整数. 设按照随机的顺序写下 $1,2,3,\cdots,3k+1$. 什么是事件——不存在一个时刻使得到此时刻按照上述方法写下的数目之和可被 3 整除的概率？你的答案必须是封闭形式的，但是可以包含因式.

解 假设我们有一个按某种次序排列的 $1,2,\cdots,3k+1$，使得其中没有任何一个从头开始的子叙列的和是 $0 \pmod 3$ 的. 如果我们从这个叙列中去掉 3 的倍数，那么剩下的叙列在模 3 下必形如 $1,1,-1,1,-1,\cdots$ 或 $-1,-1,1,-1,1,\cdots$. 由于按此顺序在模 3 下同余于 1 的整数比同余于 -1 的整数多一个. 因此在模 3 下，此叙列必形如 $1,1,-1,1,-1,\cdots$.

这就得出当且仅当下列两条件成立时所说的次序满足所给的条件：在此次序中，第一个元素不能被 3 整除并且在模 3 下所给的叙列(略去 0 后)形如 $1,1,-1,1,-1,\cdots$ 这两个条件是独立的，并且第一个条件成立的概率是 $(2k+1)/(3k+1)$，而第二个条件成立的概率是 $1/\binom{2k+1}{k}$，由于有 $\binom{2k+1}{k}$ 种方法去给 $(k+1)$ 个 1 和 k 个 -1 排定次序. 因此所求的概率就是这两个概率的乘积 $\frac{k!(k+1)!}{(2k+1)!(2k)!}$.

A－4 repunit 是一个在十进位制下各位数字都是 1 的数. 求出所有的实系数多项式 f 使得如果 n 是一个 repunit，那么 $f(n)$ 也是.

解 注意当且仅当对某个比 1 大的 10 的幂，$9n+1=10^m$ 时，n 是一个 repunit. 反过来，如果我们令

$$g(n)=9f\left(\frac{n-1}{9}\right)+1$$

那么当且仅当 g 把大于的 10 的幂变为大于的 10 的幂时,f 把 repunit 变为 repunit. 我们将表明仅有的那种函数形如 $g(n)=10^c n^d$, $d\geqslant 0$, $c\geqslant 1-d$,这意味着所需的多项式 f 对同样的 c, d 形如

$$f(n)=\frac{1}{9}(10^c(9n+1)^d-1)$$

10 的幂的更方便的说法是对任意整数 k,形如 10^k 的数. 用这种说法,只须验证对任意使 $d\geqslant 0$ 的整数 c, d,形如 $10^c n^d$ 的函数把大于 1 的 10 的幂变为大于 1 的 10 的幂.

解法 1　设 $g(x)$ 的首项是 ax^d,并且注意 $a>0$. 当 $x\to\infty$ 时,我们有 $g(x)/x^d\to a$;然而,当 x 是一个大于 1 的 10 的幂时, $g(x)/x^d$ 是一个 10 的幂. 10 的幂的集合没有正极限点,因此对 k 充分大,$x=10^k$, $g(x)/x^d$ 必须等于 a,因此我们必须对某个 c 有 $a=10^c$. 多项式 $g(x)-10^c x^d$ 有无穷多个根,因此必须恒等于 0.

解法 2　我们对 $d=\deg(g)$ 实行数学归纳法. 如果 $d=0$,对某个 c,我们有 $g(n)=10^c$. 否则由(对任意 d 阶的多项式取至少 $d+1$ 个不同的有理数变为有理数应用)Lagrange 内插公式,g 有有理系数,因此 $g(0)=t$ 是有理数. 此外 g 只能有限次取某个值,因此叙列 $g(10^0)$, $g(10^1)$, $\cdots$ 包括了任意大的 10 的幂. 假设 $t\neq 0$,那么我们可选择一个正数 h 使得数 t 不能被 10^h 整除. 但是对 c 充分大,对某个 $b>hg(10^c)-t$ 有可被 10^b 整除的分子,矛盾. 因此必有 $t=0$,而我们可以对 $g(n)/n$ 应用归纳法假设而得出结论.

注　解法 2 利用了这一事实:g 作为一个有理系数的多项式,在 Q 上,对 2 - adic 和 5 - adic 拓扑是连续的. 而在解法 1 中使用了对"∞ - adic"拓扑即通常的实拓扑的连续性.

A - 5　设有限群恰有 n 个阶为 p 的元素,其中 p 是一个素数. 证明:或者 $n=0$,或者 p 整除 $n+1$.

解　在以下所有的解法中,都设 G 是 m 阶的有限群.

解法 1　由 Lagrange 定理,如果 m 不能被 p 整除,那么 $n=0$. 否则,设 S 是使得 $a_0\cdots a_{p-1}=e$ 的 p - 元组 $(a_0,\cdots,a_{p-1})\in G^p$ 的集合,那么 S 有 m^{p-1} 个元素,它们都可被 p 整除. 注意这个集合在圆置换下是不变的,即如果 $(a_0,\cdots,a_{p-1})\in S$,那么也有 $(a_1,\cdots,a_{p-1},a_0)\in S$. $(a,\cdots,a)$, $a^p=e$ 是此操作的不动点. 所有其它在圆置换下的群的轨道都具有同样的长度 p. 反过来,使得 $a\in G$,

$a^p = e$ 的 a 的数目是可被 p 整除的,由于这个数是 $n+1$(只有 e 是 1 阶的),这就证明了断言.

解法 2 (Anand Deopukar) 假设 $n > 0$ 并设 H 是 G 的任意 p 阶子群. 设 S 是 $G \setminus H$ 的所有阶整除 p 的元素的集合,并设 H 通过共轭作用在 G 上. 除了和 H 可交换的个别元素 g 外,每条轨道的长度都是 p. 对每个那种元素 g, g 和 H 生成一个初等的阶为 p^2 的 G 的阿贝尔子群. 然而,根据那种 g 可以和 H 生成的子群,我们可以把这些 g 合并成大小为 $p^2 - p$ 的集合. 因此 S 的元素个数可被 p 整除,再加上 H 中的 $p-1$ 个非平凡元素就得出所要的 $n \equiv -1 \pmod p$.

解法 3 设 S 是 G 中阶整除 p 的元素的集合,并且设 H 是 G 种阶最大的初等阿贝尔 p - 群. 如果 $|H| = 1$,那么结论已证. 因此设对某个 $k \geqslant 1$, $|H| = p^k$,并设 H 通过共轭作用在 S 上. 设 $T \subset S$ 表示这个作用的不动点集合. 那么每个 S 上的 H 轨道的长度都整除 p^k,因此 $|S| \equiv |T| \pmod p$. 另一方面, $H \subset T$ 并且 T 含有一个不在 H 中的元素将和 H 的最大性矛盾. 这就得出 $H = T$,因而

$$|S| \equiv |T| = |H| = p^k \equiv 0 \pmod p$$

这就是说 $|S| = n + 1$ 是 p 的倍数.

注 这个结果是柯西的一个定理;第一个解是属于 McKay 的. 一个更一般的(同时也是更难得)结果是由 Frobenius 证明的:对任意正整数 m,如果 G 是一个阶可被 m 整除的有限群,那么 G 中阶整除 m 的元素个数是 m 的倍数.

A - 6 一个多边形 P 的三角剖分 T 是一些三角形,它们的并是 P 并且其中任意两个三角形的交或者是空集或者是它们的公共顶点或公共边. 此外,多边形的每条边恰是一个 T 中三角形的边. 称 T 是可行的,如果 T 中的每个内部的顶点由 6 或更多个三角形公用. 证明:存在一个只依赖于 n 的整数 M_n 使得有 n 条边的多边形 P 的任意可行三角剖分至多有 M_n 个三角形.

解 对一个可行的三角剖分 T 设 P 的顶点数依次为 $v_1, \cdots, v_n$,并设 a_i 是 T 的从 v_i 产生的边的数目. 注意对所有的 i, $a_i \geqslant 2$.

我们首先断言 $a_1 + \cdots + a_n \leqslant 4n - 6$. 设 V, E, F 分别表示 T 中顶点、边和面的数目. 由欧拉公式可知 $(F+1) - E + V = 2$(在数面数时,必须为 P 的内部加一个 1). 每个面有三个边并且除了

n 条边外,每条边都属于两个面,因此 $F = 2E - n$.另一方面,每条边有两个端点,并且 $V - n$ 个内部顶点都至少是6条边的端点;因此 $a_1 + \cdots + a_n + 6(V - n) \leqslant 2E$,将此不等式和前面的两个等式合并考虑就像所断言的

$$a_1 + \cdots + a_n \leqslant 2E + 6n - 6(1 - F + E) = 4n - 6$$

现在 $A_3 = 1$ 以及对 $n \geqslant 4, A_n = A_{n-1} + 2n - 3$;我们将用对 n 的归纳法证明 T 至多有 A_n 个三角形.对 $n = 3$,由于 $a_1 + a_2 + a_3 = 6, a_1 = a_2 = a_3 = 2$,因此 T 只含一个三角形.

下一步设 $(n - 1)$ - 边形的可行三角剖分至多有 A_{n-1} 个三角形.如果有任意 $a_i = 2$,那么我们可以拿掉 T 中包含顶点 v_i 的三角形以获得一个 $(n - 1)$ - 边形的可行三角剖分,那么 T 中三角形的数目由归纳法假设至多为 $A_{n-1} + 1 < A_n$.否则我们有所有的 $a_i \geqslant 3$.现在 $a_1, \cdots, a_n$ 的平均数小于4,那样使 $a_i = 3$ 的 a_i 的个数要比 $a_i = 5$ 的 a_i 的个数多.这就得出在对某个 $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, P 中有 k 个相继的顶点组成的叙列,它们的度顺序为3,4,4,…,4,3(有可能 $k = 2$,没有度为4的顶点分开度为3的顶点).如果我们从 T 中拿走 $2k - 1$ 个包含至少一个这些顶点的三角形,那么我们剩下一个 $(n - 1)$ - 边形的可行三角剖分,这就得出在 T 中至多有 $A_{n-1} + 2k - 1 \leqslant A_{n-1} + 2n - 3 = A_n$ 个三角形.这就完成了归纳法的步骤同时也完成了证明.

注 我们可以在某种程度上改善 A_n 的界.假设对所有的 i, $a_i \geqslant 3$, $a_1 + \cdots + a_n \leqslant 4n - 6$ 蕴含使得 $a_i = 3$ 的指标至少要比使得 $a_i \geqslant 5$ 的指标多6个.那样就存在6个具有度3,4,…,4,3的叙列,其总长度至多为 $n + 6$.那样我们可以选择一个长小于等于 $\left[\frac{n}{6}\right] + 1$ 的叙列,因此我们可以上界改进为 $A_n = A_{n-1} + 2\left[\frac{n}{6}\right] + 1$,或者渐进于 $\frac{1}{6}n^2$.

然而(像 Noam Elkies 注意到的)如果在剖分中用边界尽可能靠近正规的六角形代替三角形就可渐进地达到 $\frac{1}{6}n^2$ 个三角形.

> B - 1 设 f 是系数都是正整数的多项式.证明:如果 n 是一个正整数,则当且仅当 $n = 1$ 时 $f(n)$ 整除 $f(f(n) + 1)$①.

解 如果允许 f 是常数,例如取 $f(n) = 1$,则问题不成立.因而我们设 f 不是常数,令

① 本题需假设 f 不是常数.—— 译者注

$$f(n)=\sum_{i=0}^{d}a_in^i,a_i>0$$

那么 $f(f(n)+1)=\sum_{i=0}^{d}a_i(f(n)+1)^i\equiv f(1)(\bmod f(n))$

如果 $n=1$,那么这蕴含 $f(f(n)+1)$ 可被 $f(n)$ 整除.在其他情况下,$0<f(1)<f(n)$,由于 f 不是常数并且有正系数,因而 $f(f(n)+1)$ 不可能被 $f(n)$ 整除.

B－2 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 有连续导数并且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明:对每一个 $\alpha\in(0,1)$

$$\left|\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$$

解 设 $B=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$ 及 $g(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$. 由于 $g(0)=g(1)=0$, 因此 $|g(x)|$ 的最大值必发生在满足 $g'(y)=f(y)=0$ 的临界点 $y\in(0,1)$ 处.我们可在这以及以后取 $\alpha=y$.由于

$$\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{1-\alpha}f(1-x)\mathrm{d}x$$

因此我们可设 $\alpha\leqslant 1/2$.如果需要用 $-f(x)$ 代替 $f(x)$,我们可设 $\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.从不等式 $f'(x)\geqslant -B$,我们得出对 $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $f(x)\leqslant B(a-x)$,因而

$$\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\alpha}B(\alpha-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}B(\alpha-x)^2\Big|_0^{\alpha}=\frac{\alpha^2}{2}B\leqslant\frac{1}{8}B$$

B－3 设 $x_0=1$,当 $n\geqslant 0$ 时 $x_{n+1}=3x_n+[x_n\sqrt{5}]$.特别 $x_1=5,x_2=26,x_3=136,x_4=712$.对 $x_{2\,007}$ 求出一个封闭形式的表达式.($[a]$ 表示小于等于 a 的最大整数)

解法 1 观察出 $x_2/2=13,x_3/4=34,x_4/8=89$,我们猜测 $x_n=2^{n-1}F_{2n+3}$,其中 F_k 是第 k 个斐波那契数.那样我们断言

$$x_n=\frac{2^{n-1}}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+3}-\alpha^{-(2n+3)})$$

其中 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.这就得出答案是

$$x_{2\,007}=\frac{2^{2\,006}}{\sqrt{5}}(\alpha^{3\,997}-\alpha^{-3\,997})$$

我们用归纳法证明此断言;奠基情况 $x_0=1$ 是对的,因此只

要迭代 $x_{n+1}=3x_n+[x_n\sqrt{5}]$ 对 x_n 满足我们的公式即可.实际上,由于 $\alpha^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,我们有

$$x_{n+1}-(3+\sqrt{5})x_n=\frac{2^{n-1}}{\sqrt{5}}(2(\alpha^{2n+5}-\alpha^{-(2n+5)})-(3+\sqrt{5})(\alpha^{2n+3}-\alpha^{-(2n+3)}))=2^n\alpha^{-(2n+3)}$$

现在
$$2^n\alpha^{-(2n+3)}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3(3-\sqrt{5})^n$$
是介于 0 和 1 之间的数,因此得出迭代成立,由于 x_n,x_{n+1} 都是整数.

解法 2(Catalin Zara) 由于 x_n 是有理数,我们有 $0<x_n\sqrt{5}-[x_n\sqrt{5}]<1$.我们现在有不等式

$$x_{n+1}-3x_n<x_n\sqrt{5}<x_{n+1}-3x_n+1$$
$$(3+\sqrt{5})x_n-1<x_{n+1}<(3+\sqrt{5})x_n$$
$$4x_n-(3-\sqrt{5})<(3-\sqrt{5})x_{n+1}<4x_n$$
$$3x_{n+1}-4x_n<x_{n+1}\sqrt{5}<3x_{n+1}-4x_n+(3-\sqrt{5})$$

由于 $0<3-\sqrt{5}<1$,这就得出$[x_{n+1}\sqrt{5}]=3x_{n+1}-4x_n$,因此我们可以把所给的迭代对 $n\geqslant 2$ 重写成 $x_{n+1}=6x_n-4x_{n-1}$,这就把问题归结为解这个循环关系,并且获得和上面同样的解.

注 如果把初值设为1,这个问题就成了 Slonane 的在线百科全书整数叙列的 A018903 叙列.(http://www.research.att.com/~njas/sequences/)以下叙列被叙述的就像叙列 $S(a_0,a_1)$ 中的情况 $S(1,5)$ 那样,在这种情况中,a_{n+2} 是使得 $a_{n+2}/a_{n+1}>a_{n+1}/a_n$ 的最小整数.Sloane 引自 D. W. Boyd, Linear recurrence relations for some generalized Pisot sequences, Advances in Number Theory (Kingston, ON, 1991), Oxford Univ. Press, New York, 1993, 333-340.

B－4 设 n 是一个正整数,求出使得
$$(P(x))^2+(Q(x))^2=x^{2n}+1,且\ \deg P>\deg Q$$
的实系数多项式对(P,Q)的数目.

解 对的数目是 2^{n+1}.阶条件迫使 P 是 n 阶的并且只要乘以 2 后,首项系数就是 ±1.在两边分解因式

$$(P(x)+Q(x)\mathrm{i})(P(x)-Q(x)\mathrm{i})=$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x-\exp(2\pi i(2j+1)/(4n)))\cdot$$
$$\prod_{j=0}^{n-1}(x+\exp(2\pi i(2j+1)/(4n)))$$

然后,每对 P,Q 的选择都对应的使得 $P(x)+Q(x)\mathrm{i}$ 等于右边的某 n 个因式的乘积,在此乘积中,我们对每个 $j=0,\cdots,n-1$ 恰选择两个因式(我们必须恰选择 n 个因式,由于作为具有复系数的 x 的多项式,$P(x)+Q(x)\mathrm{i}$ 的阶是 n).对每一个 j 我们必须选的使 $P(x)+Q(x)\mathrm{i}$ 和 $P(x)-Q(x)\mathrm{i}$ 是复共轭的,因此 P,Q 具有实系数,那样,共有 2^n 个那种对;乘以 2 后允许 P 的首项系数为 -1 就产生所需的结果.

注 如果我们允许 P 和 Q 有复系数但是仍要求 $\deg(P)>\deg(Q)$,那么对的数目增加到 $2\binom{2n}{n}$,由于我们可以使用 $x^{2n}+1$ 的 $2n$ 个因式中的任意 n 个来构成 $P(x)+Q(x)\mathrm{i}$.

B-5 设 k 是一个正整数.证明:存在多项式 $P_0(n)$,$P_1(n),\cdots,P_{k-1}(n)$(可能依赖于 k)使得对任意整数 n

$$\left[\frac{n}{k}\right]^k=P_0(n)+P_1(n)\left[\frac{n}{k}\right]+\cdots+P_{k-1}(n)\left[\frac{n}{k}\right]^{k-1}$$

($[a]$ 表示小于等于 a 的最大整数).

解 对 n 个整数,我们有 $\left[\frac{n}{k}\right]=\frac{n-j}{k}$,对 $\{0,\cdots,k-1\}$ 中唯一的使得在模 k 下与 n 同余的 j,因此

$$\prod_{j=0}^{k-1}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{n-j}{k}\right)=0$$

把此式展开,我们就获得所需的多项式 $P_0(n),\cdots,P_{k-1}(n)$.

注 利用 Lagrange 内插或 Vandermonde 行列式所做的这个解答的变形,可能使得 P_i 的构造不那么确切.

B-6 对每个正整数 n,设 $f(n)$ 是用无序的,面值为 $k!$,$1\leqslant k\leqslant n$ 的硬币组成 $n!$ 的方法数目.证明:存在某个不依赖于 n 的常数 C,使得

$$n^{n^2/2-Cn}\mathrm{e}^{-n^2/4}\leqslant f(n)\leqslant n^{n^2/2+Cn}\mathrm{e}^{-n^2/4}$$

解 (由 Oleg Golberg 建议)假设 $n\geqslant 2$,不然问题是平凡的不成立.以下证明中,任意 C_i 将表示一个正常数,其数值不是实质性的.就像在 Stirling 逼近中那样,对任何固定的 $c\in\mathbf{R}$,我们通过比较和与积分来估计

$$\sum_{i=1}^{n}(i+c)\ln i=\frac{1}{2}n^2\ln n-\frac{1}{4}n^2+O(n\ln n)$$

这给出

$$n^{n^2/2-C_1n}e^{-n^2/4}\leqslant 1^{1+c}2^{2+c}\cdots n^{n+c}\leqslant n^{n^2/2+C_2n}e^{-n^2/4}$$

现在把 $f(n)$ 看成使得 $a_1 1!+\cdots+a_n n!=n!$的非负整数的组$(a_1,\cdots,a_n)$的数目.为获得 $f(n)$ 的上界,我们利用不等式 $0\leqslant a_i\leqslant n!/i!$去导出对 a_i 来说,至多有 $n!/i!+1\leqslant 2(n!/i!)$ 种选择,因此

$$f(n)\leqslant 2^n\frac{n!}{1!}\cdots\frac{n!}{n!}=2^n2^13^2\cdots n^{n-1}\leqslant n^{n^2/2+C_3n}e^{-n^2/4}$$

为获得 $f(n)$ 的下界,注意对 $i=2,\cdots,n-1$ 有 $0\leqslant a_i\leqslant(n-1)!/i!$以及 $a_n=0$,那么 $0\leqslant a_2 2!+\cdots+a_n n!\leqslant n!$,因此 a_1 只有唯一的使得 $a_1 1!+\cdots+a_n n!=n!$的选择,所以

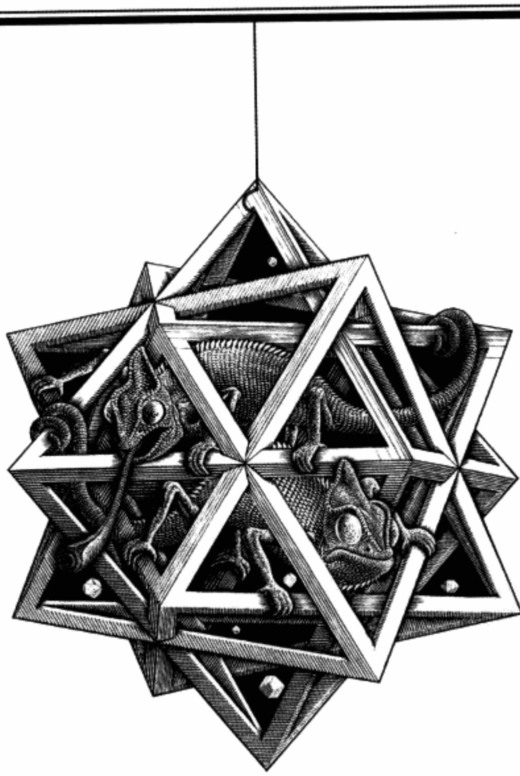
$$f(n)\geqslant\frac{(n-1)!}{2!}\cdots\frac{(n-1)!}{(n-1)!}=$$

$$3^14^2\cdots(n-1)^{n-3}\geqslant n^{n^2/2+C_4n}e^{-n^2/4}$$

第二编

培训

侯晋川　编译



第二篇

[illegible]

1.① 令 p 为奇素数，$\omega=\exp(2\pi i/p)$. 求乘积

$$E(p)=(\omega^{r_1}+\omega^{r_2}+\cdots+\omega^{r_{(p-1)/2}})\cdot(\omega^{n_1}+\omega^{n_2}+\cdots+\omega^{n_{(p-1)/2}})$$

的值，其中 $r_1,\cdots,r_{(p-1)/2}$ 表示以 p 为模的 $(p-1)/2$ 二次剩余而 $n_1,\cdots,n_{(p-1)/2}$ 是以 p 为模 $(p-1)/2$ 的非二次剩余.

解 记

$$q=(p-1)/2$$

$$\varepsilon=\begin{cases}0,\text{当 } p\equiv 1(\bmod 4)\\1,\text{当 } p\equiv 3(\bmod 4)\end{cases}\qquad ①$$

对于 $k=0,1,\cdots,p-1$，令

$$N(k)=\sum_{\substack{i,j=1\\ r_i+n_j\equiv k(\bmod p)}}^{q}1\qquad ②$$

如果 k 是二次剩余（或非剩余）$(\bmod p)$，则 $\{kr_i\mid i=1,2,\cdots,q\}$ 是二次剩余完备系（或非剩余完备系）$(\bmod p)$，且 $\{kn_j\mid j=1,2,\cdots,q\}$ 是非二次剩余（或剩余）完备系 $(\bmod p)$. 在 ② 中用 kr_i 和 kn_j 分别代替 r_i 和 n_j，$1\leqslant k\leqslant p-1$，得到

$$N(k)=N(1),k=1,2,\cdots,p-1\qquad ③$$

其次注意到

$$N(0)=\sum_{\substack{i,j=1\\ r_i\equiv -n_j(\bmod p)}}^{q}1=\varepsilon q\qquad ④$$

这是由于 -1 是二次剩余 $(\bmod p)$ 当 $p\equiv 1(\bmod 4)$，而 -1 是非二次剩余 $(\bmod p)$ 当 $p\equiv 3(\bmod 4)$. 现在由于

$$\sum_{k=0}^{p-1}N(k)=\sum_{i,j=1}^{q}1=q^2\qquad ⑤$$

从 ③，④ 及 ⑤ 我们得到

$$\varepsilon q+2qN(1)=q^2$$

① 本编由山西理工大学侯晋川编译.

此即

$$N(1) = (q - \varepsilon)/2 \tag{6}$$

最后,我们有

$$\begin{aligned}E(p) &= \Big(\sum_{i=1}^{q}\omega^{r_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{q}\omega^{n_j}\Big) = \sum_{i,j=1}^{q}\omega^{r_i+n_j} = \\ &\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ r_i+n_j\equiv k(\bmod p)}}^{q}\omega^{r_i+n_j} = \sum_{k=0}^{p-1}\omega^k N(k) = \\ &N(0) + N(1)(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{p-1}) = \\ &N(0) - N(1) = \\ &\varepsilon q - (q - \varepsilon)/2 \quad (\text{根据 ④ 和 ⑥})\end{aligned}$$

所以

$$E(p) = \begin{cases}(1-p)/4, \text{当 } p \equiv 1(\bmod 4)\\ (1+p)/4, \text{当 } p \equiv 3(\bmod 4)\end{cases}$$

解毕.

2. 令 k 为一正整数,求满足下列条件

$$\begin{cases}|x| \leqslant k, |y| \leqslant k, |z| \leqslant k\\ |x-y| \leqslant k, |y-z| \leqslant k, |z-x| \leqslant k\end{cases}$$

的三元整数组 (x,y,z) 的个数.

解 所求三元组的个数 $N(k)$ 可由下式给出

$$N(k) = \sum_{|x|\leqslant k}\sum_{\substack{|y|\leqslant k\\ |x-y|\leqslant k}}\sum_{\substack{|z|\leqslant k\\ |y-z|\leqslant k\\ |z-x|\leqslant k}} 1 = \sum_{x=-k}^{k}\sum_{\substack{y=-k\\ x-y\leqslant y\leqslant x+k}}^{k}\sum_{\substack{s=-k\\ x-k\leqslant z\leqslant x+k\\ y-k\leqslant z\leqslant y+k}}^{k} 1$$

即

$$N(k) = \sum_{x=-k}^{k}\sum_{y}\sum_{z} \tag{1}$$

其中第二个和在 $\max(-k, x-k) \leqslant y \leqslant \min(k, x+k)$ 上取,第三个和在 $\max(-k, x-k, y-k) \leqslant z \leqslant \min(k, x+k, y+k)$ 上取.现在把 ① 右边和式分成六个部分 $S_1,\cdots,S_6$ 之和,其中对 x 和 y 限制如下

$$S_1, 0 \leqslant x \leqslant y$$
$$S_2, x < 0 \leqslant y$$
$$S_3, x \leqslant y < 0$$
$$S_4, 0 \leqslant y < x$$
$$S_5, y < 0 < x$$
$$S_6, y < x < 0$$

显然

$$S_1 = \sum_{x=0}^{k}\sum_{y=x}^{k}\sum_{z=y-x}^{k} 1 =$$

$$\sum_{x=0}^{k}\sum_{y=x}^{k}(2k+1-y) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{k}(k+1-x)(3k+2-x) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{k}((k+1)(3k+2)-(4k+3)x+x^2) =$$

$$\frac{1}{2}\Big((k+1)^2(3k+2)-\frac{(4k+3)k(k+1)}{2}+$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\Big) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3)$$

类似地,记 $E = k(k+1)(2k+1)/3$,我们有

$$S_2 = \sum_{x=-k}^{-1}\sum_{y=0}^{x+k}\sum_{z=y-k}^{x+k} 1 = E$$

$$S_3 = \sum_{x=-k}^{-1}\sum_{y=x}^{-1}\sum_{z=-k}^{x+k} 1 = E$$

$$S_4 = \sum_{x=1}^{k}\sum_{y=0}^{x-1}\sum_{z=x-k}^{k} 1 = E$$

$$S_5 = \sum_{x=0}^{k}\sum_{y=x-k}^{-1}\sum_{z=x-k}^{y+k} 1 = E$$

$$S_6 = \sum_{x=-k+1}^{-1}\sum_{y=-k}^{x-1}\sum_{z=-k}^{y+k} 1 = \frac{1}{6}(k-1)k(4k+1)$$

于是得

$$N(k) = S_1 + S_2 + \cdots + S_6 =$$

$$\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3) + \frac{4}{3}k(k+1)(2k+1) +$$

$$\frac{1}{6}(k-1)k(4k+1) =$$

$$4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 =$$

$$(k+1)^4 - k^4$$

3. 令 $p \equiv 1(\bmod 4)$ 为一素数，则存在唯一整数 $w = w(p)$ 使得

$$w^2 \equiv -1(\bmod p), 0 < w < \frac{p}{2}$$

(例如，$w(5) = 2, w(13) = 5$)求证：存在满足 $ad - bc = 1$ 的整数 a, b, c, d 使得

$$pX^2 + 2wXY + \frac{(w^2+1)}{p}Y^2 \equiv (aX+bY)^2 + (cX+dY)^2$$

(例如，当 $p = 5$)时有

$$5X^2 + 4XY + Y^2 \equiv X^2 + (2X+Y)^2$$

而当 $p = 13$ 时有

$$13X^2 + 10XY + 2Y^2 \equiv (3X+Y)^2 + (2X+Y)^2$$

解 我们将利用实数的下述性质：如果 r 是一实数，n 是一正整数，则存在有理数 h/k 满足

$$|r - h/k| \leqslant \frac{1}{k(n+1)}, 1 \leqslant k \leqslant n, \gcd(h,k) = 1 \qquad ①$$

取 $r = -w(p)/p, n = [\sqrt{p}]$，于是存在整数 a, e，使得

$$\left|\frac{-w(p)}{p} - \frac{e}{a}\right| < \frac{1}{a\sqrt{p}}, 1 \leqslant a < \sqrt{p} \qquad ②$$

记 $c = w(p)a + pe$，由②有 $|c| < \sqrt{p}$，从而 $0 < a^2 + c^2 < 2p$。然而 $c \equiv wa(\bmod p)$，故有

$$a^2 + c^2 \equiv a^2(1+w^2) \equiv 0(\bmod p)$$

这表明

$$p = a^2 + c^2 \qquad ③$$

因 p 是素数，由③知 $\gcd(a,c) = 1$，因此可选取整数 s, t 使其满足

$$at - cs = 1 \qquad ④$$

于是

$$\begin{aligned}(as+ct-w)(as+ct+w) &= (as+ct)^2 - w^2 = \\ &(a^2+c^2)(s^2+t^2) - \\ &(at-cs)^2 - w^2 = \\ &p(s^2+t^2) - (1+w^2) \equiv \\ &0(\bmod p)\end{aligned}$$

即有

$$as + ct \equiv fw(\bmod p), f = \pm 1 \qquad ⑤$$

故存在整数 g 使得

$$as + ct = fw + gp \qquad ⑥$$

令

$$b = s - ag, d = t - cg \quad ⑦$$

则由③,④,⑥及⑦得

$$ab + cd = fw, ab - bc = 1 \quad ⑧$$

现在

$$p(b^2 + d^2) = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2 = w^2 + 1$$

所以

$$b^2 + d^2 = (w^2 + 1)/p \quad ⑨$$

再由③,⑧及⑨,我们有

$$(aX + bY)^2 + (cX + dY)^2 = pX^2 + 2fwXY + \frac{(w^2+1)}{p}Y^2 \quad ⑩$$

如果 $f = 1$,则⑩就是所要证的恒等式.如果 $f = -1$,用 $-b$, $-c$, $-Y$ 分别代替 b, c, Y 则亦得所要求的结果.

4. 设 $d_r(n)$, $r = 0,1,2,3$,是 n 的形为 $4k + r$ 的正整数因子的个数,m 为正整数.求证

$$\sum_{n=1}^{m}(d_1(n) - d_3(n)) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left[\frac{m}{2j+1}\right] \quad ①$$

解 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}(d_1(n) - d_3(n)) &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{\substack{d/n\\ d\text{为奇数}}}(-1)^{(d-1)/2} = \\ &\sum_{d\text{为奇数}}\sum_{1\leqslant dk\leqslant m}(-1)^{(d-1)/2} = \\ &\sum_{d\text{为奇数}}(-1)^{(d-1)/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant m/d}1 = \\ &\sum_{d\text{为奇数}}(-1)^{(d-1)/2}\left[\frac{m}{d}\right] = \\ &\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left[\frac{m}{2j+1}\right]\end{aligned}$$

①得证.

5. 求证:方程

$$y^2 = x^3 + 23 \quad ①$$

没有整数解.

解 假设 (x, y) 是①的一组整数解.如果 $x \equiv 0 \pmod 2$,则

由①得 $y^2 \equiv 3 \pmod 4$，这是不可能的. 因此必有 $x \equiv 1 \pmod 2$. 如果 $x \equiv 3 \pmod 4$，则①给出 $y^2 \equiv 2 \pmod 4$，这也不可能. 所以只能是 $x \equiv 1 \pmod 4$. 在此情形有 $x^2 - 3x + 9 \equiv 3 \pmod 4$，因而至少存在一个素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ 整除 $x^2 - 3x + 9$. 由于 $x^2 - 3x + 9$ 是 $x^3 + 27$ 的因式，故有 $x^3 + 27 \equiv 0 \pmod p$. 于是由①我们有 $y^2 \equiv -4 \pmod p$，但这一同余式也是不可解的，因为对任何素数 $p \equiv 3 \pmod 4$，-4 都不是二次剩余. 这就证明了方程①没有整数解.

6. 设 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 是正定二次型. 求证：对所有实数 x_1, x_2, y_1, y_2，不等式

$$(f(x_1, y_1)f(x_2, y_2))^{1/2}f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqslant (ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \quad ①$$

都成立.

解 首先注意，由于 f 是正定的，有 $ac - b^2 > 0$. 我们将使用下面恒等式

$$(ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2)(ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2) = (ax_1x_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cy_1y_2)^2 + (ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \quad ②$$

记

$$E_1 = f(x_1, y_1) \geqslant 0, E_2 = f(x_2, y_2) \geqslant 0$$

$$F = | ax_1x_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cy_1y_2 | \geqslant 0$$

则①成为

$$E_1E_2 = F^2 + (ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \quad ③$$

我们也有

$$f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = E_1 + E_2 \pm 2F \quad ④$$

因此，利用③和④可得

$$\begin{aligned}
&(f(x_1, y_1)f(x_2, y_2))^{1/2}f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqslant \\
&(E_1E_2)^{1/2}(E_1 + E_2 - 2F) \geqslant \\
&(E_1E_2)^{1/2}(2(E_1E_2)^{1/2} - 2F) = \\
&2(E_1E_2) - 2(E_1E_2)^{1/2}F = \\
&2F^2 + 2(ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 - \\
&2F(F^2 + (ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2)^{1/2} = \\
&2F^2 + 2(ac - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 -
\end{aligned}$$

$$2F^2\left(1+\frac{(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)^2}{F^2}\right)^{1/2}\geqslant$$
$$2F^2+2(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)^2-$$
$$2F^2\left(1+\frac{(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)^2}{2F^2}\right)=$$
$$(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

证毕.

7. 设 R,S,T 是三个不全相同的实数.给出一个条件使得下列三个三元组中恰好只有一个满足该条件.

$$\begin{cases}(R,S,T)\\(T,-S+2T,R-S+T)\\(R-S+T,2R-S,R)\end{cases}\qquad ①$$

解 用 (a,b,c) 表示 ① 中的任一三元组,我们要证这三个三元组中恰好只有一个满足条件

i $$a\leqslant b<c\qquad ②$$

或 ii $$a\geqslant b>c\qquad ③$$

分六种情形来考虑.

i $R\leqslant S<T$.此时 $(a,b,c)=(R,S,T)$ 满足 ②i 但不满足 ③ii.由于

$$T<-S+2T,-S+2T>R-S+T$$

及 $$R-S+T>2R-S,2R-S<R$$

其它两个三元组既不满足 ② 也不满足 ③.

ii $R<T\leqslant S$.此时

$$(a,b,c)=(T,-S+2T,R-S+T)$$

满足 ③ 但不满足 ②.而由于

$$R<S,S>T$$

及 $$R-S+T>2R-S,2R-S<R$$

其余两个即不满足 ② 也不满足 ③.

iii $S<R\leqslant T$.此时

$$(a,b,c)=(R-S+T,2R-S,R)$$

满足 ③ 而不满足 ②.因为

$$R>S,S<T$$

及 $$T<-S+2T,-S+2T>R-S+T$$

其余两个均不满足 ② 和 ③ 中任何一个.

iv $S\leqslant T<R$.此时 $(a,b,c)=(T,-S+2T,R-S+T)$ 满足 ② 但不满足 ③.由于

$$R > S, S \leqslant T$$

及 $$R - S + T < 2R - S, 2R - S > R$$

其余两个三元组既不满足 ② 也不满足 ③.

v $T \leqslant R < S$.这时

$$(a, b, c) = (R - S + T, 2R - S, R)$$

满足 ② 而不满足 ③.因

$$R < S, S > T$$

和 $$T > -S + 2T, -S + 2T < R - S + T$$

其余两个都不满足 ② 和 ③ 中任何一个.

vi $T < S \leqslant R$.此时$(a, b, c) = (R, S, T)$满足 ③ 而不满足 ②.因为

$$T > -S + 2T, -S + 2T < R - S + T$$

及 $$R - S + T < 2R - S, 2R - S \geqslant R$$

其余两个三元组既不满足 ② 也不满足 ③.

8. 设 $ax^2 + bxy + cy^2$ 和 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 是两个正定二次型,且不成比例.求证

$$(aB - bA)x^2 + 2(aC - cA)xy + (bC - cB)y^2 \qquad ①$$

是不定的.

解 因 $ax^2 + bxy + cy^2$ 和 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 都是正定的,我们有

$$a > 0, c > 0, b^2 - 4ac < 0$$
$$A > 0, C > 0, B^2 - 4AC < 0$$

为证二次型

$$(aB - bA)x^2 + 2(aC - cA)xy + (bC - cB)y^2$$

是不定的,我们必须证明它的判别式

$$D = 4(aC - cA)^2 - 4(aB - bA)(bC - cB)$$

是正的.首先证 $D \geqslant 0$,这可由

$$a^2 D = (2a(aC - cA) - b(aB - bA))^2 - (b^2 - 4ac)(aB - bA)^2$$

看出.进而 $D > 0$,除非当

$$aB - bA = aC - cA = 0$$

而在此情形有 $$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

这是不可能出现的,因为假设 $ax^2 + bxy + cy^2$ 和 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 不成比例.

9. 求出极限

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} \quad ①$$

的值.

解 我们将证明 $L=2$. 对于 $n\geqslant 3$,有

$$\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{n-k}}{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\frac{n}{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{k}{n-k}\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k(n-k)}$$

所以

$$\left|\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k(n-k)}\right|=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k(n-k)}\leqslant\frac{1}{2(n-1)}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{(k^2-k)(n-k)}=$$

$$\frac{1}{2(n-1)}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)(n-k)}=$$

$$\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$\frac{1}{2(n-1)}+\frac{2}{n-1}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k}\leqslant$$

$$\frac{1}{2(n-1)}+\frac{2}{n-1}\ln n$$

当 $n\to\infty$, $\frac{1}{2(n-1)}+\frac{2}{n-1}\ln n\to 0$,故得

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2$$

10. 求证:不存在常数 $c\geqslant 1$ 使得对所有满足 $n\geqslant m$ 的正整数 n 和 m 都有

$$n^c\phi(n)\geqslant m^c\phi(m) \quad ①$$

成立.

解 假设存在常数 $c\geqslant 1$ 使其对所有满足 $n\geqslant m$ 的正整数 n 和 m 不等式 ① 都成立. 令 p 是一大于 $4c$ 的素数,则有

$\frac{3}{4}\geqslant\frac{p+1}{2(p-1)}\geqslant$ (因为 $p>4c\geqslant 4$)

$\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)} \geqslant$ (因为 $\phi(p+1) \leqslant \frac{p+1}{2}, \phi(p) = p-1$)

$\left(\frac{p}{p+1}\right)^c =$ (由 ①)

$\left(1-\frac{1}{p+1}\right)^c \geqslant$

$1-\frac{c}{p+1} >$ (利用 $x^c - 1 \geqslant c(x-1), x > 0$)

$1-\frac{c}{p} > \frac{3}{4}$(因为 $p > 4c$)

矛盾.所以这样的 c 不存在.

11. 设 D 是一个无平方因子的整数,$D > 1$ 且存在正整数 A_1, A_2, B_1, B_2 使得

$$\begin{cases} D = A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 \\ (A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \end{cases} \qquad ①$$

求证 $2D(D + A_1A_2 + B_1B_2)$

和 $2D(D + A_1A_2 - B_1B_2)$

都不是某整数的平方.

解 设 $2D(D + A_1A_2 + \varepsilon B_1B_2) = X^2$,其中 X 是整数而 $\varepsilon = \pm 1$.

如果 D 是奇数,由于它无平方因子,故 $2D$ 整除 X,即存在整数 U 使 $X = 2DU$,于是

$$D + A_1A_2 + \varepsilon B_1B_2 = 2DU^2 \qquad ②$$

其次

$$2D(D - A_1A_2 - \varepsilon B_1B_2) = 2D\frac{(D^2 - (A_1A_2 + \varepsilon B_1B_2)^2)}{D + A_1A_2 + \varepsilon B_1B_2} = \frac{2D(A_1B_2 - \varepsilon A_2B_1)^2}{D + A_1A_2 + \varepsilon B_1B_2}$$

即

$$2D(D - A_1A_2 - \varepsilon B_1B_2) = \left(\frac{A_1B_2 - \varepsilon A_2B_1}{U}\right)^2 \qquad ③$$

因为 ③ 的左边是整数,右边是一有理数的平方,故 ③ 的右边实际上是一整数的平方,亦即存在整数 Z 使

$$2D(D - A_1A_2 - \varepsilon B_1B_2) = Z^2 \qquad ④$$

$$A_1B_2 - \varepsilon A_2B_1 = UZ \qquad ⑤$$

与上述同理由 ④ 可知 $2D$ 整除 Z,故存在 V 使得 $Z = 2DV$. 于是 ④ 和 ⑤ 变成

$$D - A_1A_2 - \varepsilon B_1B_2 = 2DV^2 \qquad ⑥$$

$$A_1B_2-\varepsilon A_2B_1=2DUV \qquad ⑦$$

把 ② 和 ⑥ 相加得到 $2D=2DU^2+2DV^2$，所以 $U^2+V^2=1$，由此推出

$$(U,V)=(\pm 1,0)\text{ 或 }(0,\pm 1) \qquad ⑧$$

现在由 ②，⑥ 和 ⑦ 有

$$\begin{cases}A_1A_2+\varepsilon B_1B_2=D(U^2-V^2)\\ -\varepsilon B_1A_2+A_1B_2=2DUV\end{cases}$$

对 A_2,B_2，解此方程组可得

$$\begin{aligned}A_2&=(U^2-V^2)A_1-2\varepsilon UVB_1\\ B_2&=2UVA_1+\varepsilon(U^2-V^2)B_1\end{aligned} \qquad ⑨$$

应用 ⑧ 给出的 (U,V) 值由 ⑨ 得 $(A_2,B_2)=\pm(A,\varepsilon B_1)$，这显然不可能，因为 A_1,A_2,B_1,B_2 是正的且 $(A_1,B_1)\neq(A_2,B_2)$.

D 为偶数的情形可类似处理.

12. 用 Q 和 R 分别表示有理数域和实数域，设 K 是 R 中包含 Q 和 $\sqrt{1\,985+31\sqrt{1\,985}}$ 的最小子域，而 L 是 R 中包含 Q 和 $\sqrt{3\,970+64\sqrt{1\,985}}$ 的最小子域，证明 $K=L$.

解 记

$$\begin{cases}\alpha_+=\sqrt{1\,985+31\sqrt{1\,985}}\approx 58.018\\ \alpha_-=\sqrt{1\,985-31\sqrt{1\,985}}\approx 42.573\end{cases} \qquad ①$$

$$\begin{cases}\beta_+=\sqrt{3\,970+64\sqrt{1\,985}}\approx 82.591\\ \beta_-=\sqrt{3\,970-64\sqrt{1\,985}}\approx 33.445\end{cases} \qquad ②$$

容易验证

$$\alpha_+\alpha_-=32\sqrt{1\,985},\beta_+\beta_-=62\sqrt{1\,985} \qquad ③$$

$$(\alpha_++\alpha_-)^2=3\,970+64\sqrt{1\,985} \qquad ④$$

$$(\alpha_+-\alpha_-)^2=3\,970-64\sqrt{1\,985} \qquad ⑤$$

由此得到

$$\alpha_++\alpha_-=\beta_+,\alpha_+-\alpha_-=\beta_- \qquad ⑥$$

用 $Q(r_1,\cdots,r_n)$ 表示 R 的包含 Q 和实数 $r_1,\cdots,r_n$ 的最小子域，则有

$$\begin{aligned}Q(\alpha_+)&=Q(\alpha_+,\alpha_+^2)=Q(\alpha_+,\sqrt{1\,985})= \quad (\text{根据 ①})\\ &Q(\alpha_+,\alpha_-)\supseteq \quad (\text{根据 ③})\\ &Q(\alpha_++\alpha_-)=Q(\beta_+)= \quad (\text{根据 ⑥})\end{aligned}$$

$$Q(\beta_+,\beta_+^2) = Q(\beta_+,\sqrt{1\,985}) = \quad (\text{根据 ②})$$
$$Q(\beta_+,\beta_-) \supseteq \quad (\text{根据 ③})$$
$$Q(\beta_+ + \beta_-) = Q(\alpha_+) \quad (\text{根据 ⑥})$$

所以
$$K = Q(\alpha_+) = Q(\beta_+) = L$$

13. 设 k 和 l 为正整数且满足
$$\gcd(k,5) = \gcd(l,5) = \gcd(k,l) = 1$$
$$-k^2 + 3kl - l^2 = F^2$$
其中 $\gcd(F,5) = 1$,求证:方程组
$$\begin{cases} k = x^2 + y^2 \\ l = x^2 + 2xy + 2y^2 \end{cases} \quad ①$$
恰好有两对关于 x 和 y 的整数解.

解　根据条件有
$$F^2 \equiv 4k^2 + 8kl + 4l^2 \equiv 4(k + l)^2 (\bmod 5)$$
故
$$F \equiv \pm 2(k + l)(\bmod 5)$$
如果需要的话,用 $-F$ 代替 F,我们可以假设
$$F \equiv 2(k + l)(\bmod 5) \quad ②$$
于是
$$\begin{cases} 4k - l - 2F \equiv 0(\bmod 5) \\ -3k + 2l - F \equiv 0(\bmod 5) \\ k + l + 2F \equiv 0(\bmod 5) \end{cases} \quad ③$$
即有整数 R,S,T 使得
$$\begin{cases} 5R = 4k - l - 2F \\ 5S = -3k + 2l - F \\ 5T = k + l + 2F \end{cases} \quad ④$$
进而,由假设条件知
$$25(RT - S^2) = (4k - l - 2F)(k + l + 2F) - (-3k + 2l - F)^2 = -5k^2 + 15kl - 5l^2 - 5F^2 = 0$$
所以
$$RT = S^2 \quad ⑤$$
现在分下列三种情形来处理:

i $R = S = 0$, ii $R \neq 0, S = 0$, iii $S \neq 0$.

i　$R = S = 0$. 由 ④, $4k - l - 2F = 0$ 且 $-3k + 2l - F = 0$, 故 $k = F, l = 2F$. 但 k 和 l 是互素的正整数,从而 $F = 1, k = 1, l = 2$. 在此情形方程组 ① 有两组整数解 $(x,y) = \pm(0,1)$.

ii　$R \neq 0, S = 0$. 由 ⑤ 有 $T = 0$,从而由 ④ 可推出

$$\begin{cases}-3k+2l-F=0\\k+l+2F=0\end{cases}$$

因此 $k=l=-F$.因 k,l 是互素的整数,必有 $F=-1,k=l=1$.在此情形方程组 ① 有两组解 $(x,y)=\pm(1,0)$.

iii $S\neq 0$.由 ⑤ 知 $RT>0$.如果 $R<0$,则 $T<0,k=R+T<0$,此与 $k\geqslant 1$ 矛盾.所以 R 和 T 都是正数.其次注意到

$$(4k-l-2F)(4k-l+2F)=(4k-l)^2-4F^2=5(l-2k)^2$$

于是

$$R(4k-l+2F)=(l-2k)^2 \quad ⑥$$

显然 $4k-l+2F\neq 0$,否则有 $5R=-4F$,即 $5\mid F$,此与 $\gcd(F,5)=1$ 相矛盾.因此有非负整数 a,b,c 使

$$2^a\parallel R,2^b\parallel 4k-l+2F,2^c\parallel l-2k \quad ⑦$$

由 ⑥ 和 ⑦ 知

$$a+b=2c \quad ⑧$$

且

$$\frac{R}{2^a}\frac{4k-l+2F}{2^b}=\left(\frac{l-2k}{2^c}\right)^2 \quad ⑨$$

其中,$\frac{R}{2^a},\frac{4k-l+2F}{2^b},\frac{|l-2k|}{2^c}$ 是正奇数.假设

$$\gcd\left(\frac{R}{2^a},\frac{4k-l+2F}{2^b}\right)>1$$

则存在素数 p 整除 $\frac{R}{2^a},\frac{(4k-l+2F)}{2^b}$ 从而整除 $4k-l-2F,4k-l+2F$ 以及 $l-2k$,并由此陆续推出

$$p\mid 8k-2l,p\mid 4k-l,p\mid 2k,p\mid l$$

此与 $\gcd(k,l)=1$ 冲突,于是必有

$$\gcd\left(\frac{R}{2^a},\frac{4k-l+2F}{2^b}\right)=1 \quad ⑩$$

⑨ 和 ⑩ 蕴涵存在整数 X 使

$$\frac{R}{2^a}=X^2 \quad ⑪$$

下面证明 a 是偶数.当 $a=0$ 时显然,故可设 $a\geqslant 1$.于是 $2\mid R$ 从而 l 是偶数.由于 $\gcd(k,l)=1$,k 必是奇的.于是取

$$-k^2+3kl-l^2=F^2$$

依次除以 2,4 和 8 求余陆续得

$$F\equiv 1 \pmod 2 \quad ⑫$$

$$l\equiv 2 \pmod 4 \quad ⑬$$

$$l\equiv 2k \pmod 8 \quad ⑭$$

从而 $4k-l\pm 2F\equiv 0 \pmod 4$ 且 $a\geqslant 2,b\geqslant 2$.同时由于

$$2^{\min(a,b)} \mid (4k-l+2F)-(4k-l-2F)=4F$$

而 F 是奇数,所以 $\min(a,b)\leqslant 2$. 如果 $a\leqslant b$,那么 $a\leqslant 2$,此蕴涵 $a=2$. 如果 $b<a$,则 $b\leqslant 2$,此蕴含 $b=2,a=2c-2$. 两种情况都得到 a 是偶数. 置 $a=2d,x_0=2^dX$,则有 $R=x_0^2$. 由 ⑤ 推出 $T=y_0^2,S=\pm x_0y_0$. 必要时改变 x_0 的符号,就可设 $S=x_0y_0$. 于是可得

$$x_0^2+y_0^2=R+T=\frac{(5R+5T)}{5}=$$

$$\frac{(4k-l-2F+k+l+2F)}{5}=k$$

$$x_0^2+2x_0y_0+2y_0=R+2S+2T=l$$

所以(x_0,y_0)是 ① 的一组解.

现在令(x,y)是 ① 的任一解. 利用 ① 有

$$F^2=-k^2+3kl-l^2=(x^2+xy-y^2)^2$$

所以(选取 F 使之满足 ②)

$$x^2+xy-y^2=\pm F \qquad ⑮$$

对 x^2,xy,y^2 解 ① 和 ⑤ 得

$$\begin{cases}5x^2=4k-l\pm 2F\\ 5xy=-3k+2l\pm F\\ 5y^2=k+l\mp 2F\end{cases} \qquad ⑯$$

由于

$$F\equiv 2(k+l)\not\equiv 0 \pmod 5$$

⑯ 中在下方的符号必成立,即

$$\begin{cases}x^2=\dfrac{(4k-l-2F)}{5}\\ xy=\dfrac{(-3k+2l-F)}{5}\\ y^2=\dfrac{(k+l+2F)}{5}\end{cases} \qquad ⑰$$

因这对 ① 的任何解都对,故分别用 x_0,y_0 代替 x,y,⑰ 也成立,而此意味着

$$x^2=x_0^2,xy=x_0y_0,y^2=y_0^2$$

即 $$(x,y)=(x_0,y_0)\text{或}(-x_0,-y_0)$$

这就证明了 ① 恰有两组整数解.

14. 设 r 和 s 是非零整数,证明:方程

$$(r^2-s^2)x^2-4rsxy-(r^2-s^2)y^2=1 \qquad ①$$

没有整数解 x 和 y.

解 假设 x,y 是满足 ① 的整数. 对 ① 左端分解因式得

$$((r-s)x-(r+s)y)((r+s)x+(r-s)y)=1 \quad ②$$

由于②左端的每个因式都是整数,故有

$$\begin{cases}(r-s)x-(r+s)y=\varepsilon \\ (r+s)x+(r-s)y=\varepsilon\end{cases} \quad ③$$

其中 $\varepsilon=\pm 1$.对于 x,y 解③得

$$x=\frac{r\varepsilon}{r^2+s^2},y=\frac{-s\varepsilon}{r^2+s^2} \quad ④$$

因此 $(x^2+y^2)(r^2+s^2)=1,(r^2+s^2)=1$

即 $(r,s)=(\pm 1,0)\quad(0,\pm 1)$

但这是不可能的,因为 r 和 s 都是非零的整数.这就证明了①没有整数解.

15. 求积分

$$I=\int_0^1 \ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x \quad ①$$

的值.

解 函数 $\ln x\ln(1-x)$ 当 $0<x<1$ 时连续,但当 $x=0$ 和 $x=1$ 无定义,所以

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_\varepsilon^{1-\delta}\ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x \quad ②$$

对于满足

$$0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\delta<1 \quad ③$$

的 x 及正整数 n,我们有

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+x^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^{k-(n+1)}}{k}$$

所以 $\left|\ln(1-x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right|=x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{n+1+k}\leqslant$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

于是有

$$\left|\int_\varepsilon^{1-\delta}\ln x\left(\ln(1-x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^{1-\delta}(-\ln x)\frac{x^{n+1}}{(1-x)}\mathrm{d}x \quad ④$$

现在,对于 $y\geqslant 1$,我们有

$$0\leqslant \ln y=\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_1^y\mathrm{d}t=y-1 \quad ⑤$$

在⑤中令 $y=\frac{1}{x}$,得

$$0 \leqslant -\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \tag{6}$$

在 ④ 中利用不等式 ⑥ 便得

$$\left|\int_{\varepsilon}^{1-\delta} \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\int_{\varepsilon}^{1-\delta} x^k \ln x \mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{n+1}\int_{\varepsilon}^{1-\delta} x^n \mathrm{d}x < \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

令 $n \to \infty$,得

$$\int_{\varepsilon}^{1-\delta} \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\int_{\varepsilon}^{1-\delta} x^k \ln x \mathrm{d}x \tag{7}$$

由数学分析基本定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right) = x^k \ln x$$

故

$$\int_{\varepsilon}^{1-\delta} x^k \ln x \mathrm{d}x = \frac{(1-\delta)^{k+1}\ln(1-\delta)}{k+1} - \frac{(1-\delta)^{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{\varepsilon^{k+1}\ln \varepsilon}{k+1} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}$$

的以由 ⑦

$$\int_{\varepsilon}^{1-\delta} \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x = \ln \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k+1}}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k+1}}{k(k+1)^2} - \ln(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^{k+1}}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^{k+1}}{k(k+1)^2}$$

即

$$\int_{\varepsilon}^{1-\delta} \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x = (\ln \varepsilon)A(\varepsilon) - B(\varepsilon) - (\ln(1-\delta))A(1-\delta) + B(1-\delta) \tag{8}$$

其中,对于 $0 < y < 1$,$A(y)$ 和 $B(y)$ 分别定义为

$$A(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k(k+1)} \tag{9}$$

$$B(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k(k+1)^2} \tag{10}$$

下面我们证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln \varepsilon)A(\varepsilon) = 0 \tag{11}$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} (\ln(1-\delta))A(1-\delta) = 0 \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} B(\varepsilon) = 0 \tag{13}$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} B(1-\delta) = 2 - \frac{\pi^2}{6} \tag{14}$$

所以正如提示中断言,② 和 ⑧ 给出

$$I = 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad ⑮$$

在证 ⑪ ~ ⑭ 之前,先证

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln \varepsilon)\ln (1 - \varepsilon) = 0 \quad ⑯$$

对于 $0 < \varepsilon < 1$

$$-\ln (1 - \varepsilon) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \cdots + \begin{cases} > \varepsilon \\ < \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots = \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \end{cases}$$

从而 $$-\varepsilon \ln \varepsilon < (\ln \varepsilon)\ln (1 - \varepsilon) < -\frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 \quad ⑰$$

故 ⑯ 成立.

现在对于 $0 < \varepsilon < 1$,我们有

$$A(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} = -\varepsilon \ln (1 - \varepsilon) + \ln (1 - \varepsilon) + \varepsilon = (1 - \varepsilon)\ln (1 - \varepsilon) + \varepsilon$$

所以 $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln \varepsilon)A(\varepsilon) = 0$$

这就证明了 ⑪.

其次,由阿贝尔定理

$$\lim_{\delta \to 0^+} A(1 - \delta) = \lim_{\delta \to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \delta)^{k+1}}{k(k + 1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k + 1)} = 1$$

所以

$$\lim_{\delta \to 0^+} (\ln (1 - \delta))A(1 - \delta) = \ln 1 = 0$$

这就证得 ⑫,又因

$$| B(\varepsilon) | \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k + 1)^2}$$

故 $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} B(\varepsilon) = 0$$

即 ⑬ 成立.最后,由阿贝尔定理有

$$\lim_{\delta \to 0^+} B(1 - \delta) = \lim_{\delta \to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \delta)^{k+1}}{k(k + 1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k + 1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k + 1)} - \frac{1}{(k + 1)^2} \right) =$$

$$1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=2-\frac{\pi^2}{6}$$

这便证得 ⑭ 并完成 ⑮ 的证明.

16. 求解递推关系

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a(k)=\frac{n}{n+1}, n=1,2,\cdots \qquad ①$$

解 试证归纳假设:对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m$ 的正整数 n,有

$$a(n)=(-1)^{n+1}/(n+1)$$

由于 $a(1)=\frac{1}{2}$,这个假设对于 $m=1$ 是正确的.现在由(16,0)和归纳假设,我们有

$$a(m+1)=\frac{m+1}{m+2}-\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

因而须证

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=\frac{m+1-(-1)^m}{m+2}$$

或等价地
$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=\frac{m+1}{m+2}$$

由二项式定理,对任意实数 x,有

$$(1+x)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k \qquad ②$$

对 ② 关于 x 积分,得

$$\frac{(1+x)^{m+2}}{m+2}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{m+2} \qquad ③$$

在 ③ 中取 $x=-1$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=-\frac{1}{m+2}$$

从而
$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=1-\frac{1}{m+2}=\frac{m+1}{m+2}$$

这正是所要证的,现在,由数学归纳法得

$$a(n)=(-1)^{n+1}/(n+1), n=1,2,\cdots$$

17. 令 n 和 k 为正整数，p 为一素数，满足

$$p > (n^2+n+k)^2+k$$

求证序列

$$n^2, n^2+1, n^2+2, \cdots, n^2+l \quad ①$$

其中 $$l=(n^2+n+k)^2-n^2+k$$

含有一对整数 $(m, m+k)$ 使得

$$\left(\frac{m}{p}\right)=\left(\frac{m+k}{p}\right)=1$$

解 由于 n 和 k 为正整数且 $p>(n^2+n+k)^2+k$，故序列①中任何整数都不能被 p 整除. 如果 $\left(\frac{n^2+k}{p}\right)=1$，可取 $(m, m+k)=(n^2, n^2+k)$. 如果 $\left(\frac{(n+1)^2+k}{p}\right)=1$，可取

$$(m, m+k)=((n+1)^2, (n+1)^2+k)$$

最后，如果

$$\left(\frac{n^2+k}{p}\right)=\left(\frac{(n+1)^2+k}{p}\right)=-1$$

由于

$$\left(\frac{(n^2+n+k)^2+k}{p}\right)=\left(\frac{(n^2+k)((n+1)^2+k)}{p}\right)=$$
$$\left(\frac{n^2+k}{p}\right)\left(\frac{(n+1)^2+k}{p}\right)=$$
$$(-1)(-1)=1$$

所以可取 $(m, m+k)=((n^2+n+k)^2, (n^2+n+k)^2+k)$. 到此，证明了所求整数对的存在性.

18. 令

$$a_n=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}, n=0,1,2,\cdots$$

无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛吗？如果收敛，它的和是什么？

解 令 $s(N)=\sum_{n=0}^{N} a_n, N=0,1,2,\cdots$，则

$$s(N)=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)=$$
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4n+4}+\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)=$$

$$\sum_{m=1}^{4N+4}\frac{(-1)^{m-1}}{m}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2N+2}\frac{(-1)^{m-1}}{m}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{N\to\infty}S(N)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}=$$

$$\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}=\frac{3}{2}\ln 2$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,其和为 $\frac{3}{2}\ln 2$.

19. 设 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 $m(m\geqslant 2)$ 个实数,记

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,n=1,2,\cdots,m$$

求证

$$\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\leqslant 12\sum_{n=1}^{m}a_n^2 \qquad ①$$

解 对于 $n=1,2,\cdots,m$,有

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2=\left(a_n+\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2\leqslant 2a_n^2+2\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2=$$

$$4a_n^2+2\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-4a_n\frac{A_n}{n}$$

故

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}a_n^2+2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-4\sum_{n=1}^{m}a_n\frac{A_n}{n} \qquad ②$$

但由于 $-2a_nA_n=-(A_n^2-A_{n-1}^2)-a_n^2\leqslant-(A_n^2-A_{n-1}^2)$

我们有

$$-2\sum_{n=1}^{m}a_n\frac{A^n}{n}\leqslant-\sum_{n=1}^{m}\frac{(A_n^2-A_{n-1}^2)}{n}=$$

$$-\sum_{n=1}^{m-1}\frac{A_n^2}{n(n+1)}-\frac{A_m^2}{m}$$

即有

$$-2\sum_{n=1}^{m}a_n\frac{A_n}{n}\leqslant-\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n(n+1)} \qquad ③$$

应用③于②中得

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}a_n^2+2\sum_{n+1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-2\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n(n+1)}=$$

$$4\sum_{n=1}^{m}a_n^2+2\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n^2(n+1)}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{m}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{m}a_n^2 \quad ④$$

注意到当 $n=1$ 时,$1-\frac{2}{n+1}=0$,当 $n\geqslant 2$ 时 $1-\frac{2}{n+1}\geqslant\frac{1}{3}$,故由 ④ 立得不等式 ①.

20. 对所有的正整数 n,求出

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

的值.

解 因

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}-\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}=\frac{n!(2n-k)!}{(n-k)!2n!}-\frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k-1)!2n!}=$$

$$\frac{n!(2n-1-k)!}{(n-k)!(2n-1)!}\left(\frac{2n-k}{2n}-\frac{n-k}{2n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

所以

$$S=2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}-\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right)=$$

$$2\left(\frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n}{0}}-\frac{\binom{n}{n+1}}{\binom{2n}{n+1}}\right)=2$$

21. 设 a,b 为互素的正整数.对于正整数 k,记 $N(k)$ 为方程

$$ax+by=k, x\geqslant 0, y\geqslant 0 \quad ①$$

的整数解的个数,求出极限

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{N(k)}{k}$$

的值.

解 由于 a,b 互素,故存在整数 g,h 使得

$$ag + bh = k \tag{②}$$

于是

$$x = g + bt, y = h - at, x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{③}$$

给出 $ax + by = k$ 的全部解,设 t 为满足

$$\frac{h}{a} \geqslant t \geqslant -\frac{q}{b} \tag{④}$$

的整数,则 ① 的解由 ③ 中满足 ④ 的数给出.记

$$\lambda(b,g) = \begin{cases} 0, 当\ b\ 整除\ g \\ 1, 当\ b\ 不整除\ g \end{cases} \tag{⑤}$$

则 t 有 $\left[\frac{h}{a}\right] - \left[\frac{-g}{b}\right] - \lambda(b,g) + 1$ 个值满足 ④,因此有

$$N(k) = \left[\frac{h}{a}\right] - \left[\frac{-g}{b}\right] - \lambda(b,g) + 1 \tag{⑥}$$

从而 $$\left|N(k) - \frac{h}{a} - \frac{g}{b}\right| \leqslant 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

又由 ②,有

$$\left|\frac{N(k)}{k} - \frac{1}{ab}\right| \leqslant \frac{4}{k} \tag{⑦}$$

在上式中令 $k \to \infty$,得 $L = \frac{1}{ab}$.

22. 设 a, d, r 为正整数,对于 $k = 0,1,2,\cdots$,记

$$u_k = u_k(a,d,r) = \frac{1}{(a + kd)(a + (k+1)d)\cdots(a + (k+r)d)} \tag{①}$$

求出和 $$S = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

的值,其中 n 为正整数.

解 对于 $k = -1,0,1,\cdots$,令

$$v_k = v_k(a,b,r) = \frac{1}{(a + (k+1)d)\cdots(a + (k+r)d)rd} \tag{②}$$

则

$v_k - v_{k+1} =$

$\frac{1}{(a + (k+2)d)\cdots(a + (k+r)d)rd}\left(\frac{1}{(a + (k+1)d)} - \frac{1}{(a + (k+r+1)d)}\right) =$

$1/((a + (k+1)d)(a + (k+2)d) \cdot \cdots \cdot$

$(a + (k+r)d)(a + (k+r+1)d))$

即有 $$v_k - v_{k+1} = u_{k+1}$$

因此
$$S=\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=-1}^{n-1}u_{k+1}=\sum_{k=-1}^{n-1}(v_k-v_{k+1})=v_{-1}-v_n$$

即
$$S=\frac{1}{rd}\left(\frac{1}{a(a+d)\cdots(a+(r-1)d)}-\frac{1}{(a+(n+1)d)\cdots(a+(n+r)d)}\right)$$

23. 设 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $n(n>1)$ 个实数,令
$$x_{ij}=x_i-x_j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$$
又设 F 是$\frac{n(n-1)}{2}$ 个变量 x_{ij} 的实值函数使得对所有 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不等式
$$F(x_{12},x_{13},\cdots,x_{(n-1)n})\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \quad ①$$
都成立.求证:如果 $\sum_{k=1}^{n}x_k\neq 0$,① 中等号不能成立.

解 令 $M=(x_1+\cdots+x_n)/n$,在 ① 中用 x_i-M 代替 x_i 则得更强的不等式
$$F(x_{12},x_{13},\cdots,x_{(n-1)n})\leqslant\sum_{k=1}^{n}(x_k-M)^2=\sum_{k+1}^{n}x_k^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$
因此,若 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 $\sum_{k=1}^{n}x_k\neq 0$,则 ① 中的等式不成立.

24. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 是满足 $\sum_{n=1}^{m}a_n\neq 0$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 个实数,求证:不等式
$$\frac{\left(\sum_{n=1}^{m}na_n^2\right)}{\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right)^2}>\frac{1}{2\sqrt{m}} \quad ①$$

解 由柯西 - 许瓦尔兹不等式可得
$$\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{m}na_n^2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} \quad ②$$
其次我们有
$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\leqslant 1+\int_1^m\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant 1+\int_1^m\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=$$

$$1+(2\sqrt{m}-2)=2\sqrt{m}-1<2\sqrt{m}$$

应用此不等式于 ② 便得 ①.

25. 求证:存在无限多个不能表示为形如 n^2+p 的正整数,其中 n 为整数,p 为素数.

解 我们将证明整数 $(3m+2)^2, m=1,2,\cdots$ 不能表示为 n^2+p,其中 $n\geqslant 1$,p 为素数.事实上,如果假设存在 $m,n\geqslant 1$ 及素数 p 使得

$$(3m+2)^2=n^2+p$$

则

$$p=(3m+2-n)(3m+2+n) \quad ①$$

由于 p 是素数,$0<3m+2-n<3m+2+n$,故必有

$$3m+2-n=1, 3m+2+n=p \quad ②$$

对 m 和 n 解 ② 得

$$m=(p-3)/6, n=(p-1)/2$$

因而 $p=3(2m+1)$.由于 p 为素数,必有 $m=0$,但此与 $m\geqslant 1$ 相矛盾.

26. 求无穷级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$ 的值.

解 对于 $n\geqslant 1$ 我们有

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)=\arctan\frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)}=\arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)$$

所以当 $N\geqslant 2$ 时,有

$$\sum_{n=2}^{N}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{(n+2)}\right)\right)=\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{N}\right)-\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

令 $N\to\infty$ 便得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)=\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

所以
$$S=\frac{\pi}{4}+\arctan(2)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

27. 设 $p_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为 $n(n\geqslant 1)$ 个互不相同的整数，且 $f_n(x)$ 为 n 次多项式

$$f_n(x)=(x-p_1)\cdots(x-p_r)$$

求证:多项式

$$g_n(x)=(f_n(x))^2+1$$

不能表为两个非常数的整系数多项式之积.

解 假设 $g_n(x)$ 可以表为两个非常数的整系数多项式 $h(x)$ 和 $k(x)$ 之乘积,即

$$g_n(x)=h(x)k(x) \quad ①$$

由于 $g_n(x)>0$,$h(x)$ 和 $k(x)$ 都没有实根.于是当 x 取遍所有实数时,$h(X)$ 和 $k(x)$ 都不改变符号,因而可设

$$h(x)>0,k(x)>0,\text{对所有实数 } x \quad ②$$

因为 $g_n(p_i)=1$,$i=1,2,\cdots,n$,故 $h(p_i)=k(p_i)=1$,$i=1,2,\cdots,n$,如果 $h(x)$ 或 $k(x)$ 的次数小于 n,则它恒等于1,这不可能,由于 $h(x)$ 和 $k(x)$ 都是非常数多项式.所以 $h(x)$ 和 $k(x)$ 的次数都是 n,且存在整数 a,b,使得

$$\begin{cases}h(x)=1+a(x-p_1)\cdots(x-p_n)\\k(x)=1+b(x-p_1)\cdots(x-p_n)\end{cases} \quad ③$$

于是

$$(x-p_1)^2(x-p_2)^2\cdots(x-p_n)^2+1=1+(a+b)(x-p_1)\cdots(x-p_n)+ab(x-p_1)^2\cdots(x-p_n)^2 \quad ④$$

在④中让 x^{2n} 和 x^n 的系数相等,得

$$\begin{cases}ab=1\\a+b=0\end{cases} \quad ⑤$$

因为没有整数能满足⑤,这导出了矛盾.

28. 甲、乙二人进行一项比赛.甲胜的概率为 p,乙胜的概率为 q,平局的概率为 r.开始时,甲有 m 元钱,乙有 n 元钱.每一场比赛完毕,胜方从负方取走1元.如果甲、乙二人都同意一直比赛到他们中有一人输掉所有的钱,那么,甲赢得全部钱的概率是多少?

解 令 $p(k),k=0,1,\cdots$,为当甲有 k 元钱时甲胜的概率,显然有

$$p(0)=0,p(m+n)=1 \qquad ①$$

我们需要决定 $p(m)$.考察当甲有 $k+1$ 元钱时甲胜的机会.如果甲胜了下一场,则甲最终取胜的概率为 $ap(k+2)$.如果甲在下一场比赛中输了,则甲最终取胜的概率为 $bp(k)$.而当下场比赛是平局,则甲最终取胜的概率为 $cp(k+1)$.因此我们有

$$p(k+1)=ap(k+2)+bp(k)+cp(k+1)$$

因为 $a+b+c=1$,故得

$$ap(k+2)-(a+b)p(k+1)+bp(k)=0$$

解此差分方程,得到

$$p(k)=\begin{cases}A+Bk,a=b\\A+B(b/a)^k,a\neq b\end{cases}$$

其中 A 和 B 为待定常数,利用 ① 可得

$$\begin{cases}A=0,B=1/(m+n),a=b\\A=-B=1/(1-(b/a)^{m+n}),a\neq b\end{cases}$$

所以

$$p(m)=\begin{cases}m/(m+n),a=b\\(1-(b/a)^m)/(1-(b/a)^{m+n}),a\neq b\end{cases}$$

29. 设 $f(x)$ 是首项系数为1的 $n(n\geqslant 1)$ 次复系数多项式,令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 的 n 个复根.多项式 $f(x)$ 的判别式 $D(f)$ 为复数

$$D(f)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2 \qquad ①$$

用 $D(f)$ 表示 $f(x^2)$ 的判别式.

解 由于 $x_1,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 的 n 个根,于是 $f(x^2)$ 的 $2n$ 个根为

$$y_1=\sqrt{x_1},y_2=\sqrt{x_2},\cdots,y_n=\sqrt{x_n},$$
$$y_{n+1}=-\sqrt{x_1},\cdots,y_{2n}=-\sqrt{x_n}$$

所以 $f(x^2)$ 的判别式为

$$\prod_{1\leq i<j\leq 2n}(y_i-y_j)^2=$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(y_i-y_j)^2\prod_{1\leq i\leq n<j\leq 2n}(y_i-y_j)^2\prod_{n<i<j\leq 2n}(y_i-y_j)^2=$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^2\prod_{1\leq i\leq n<j\leq 2n}(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{j-n}})^2\cdot$$
$$\prod_{n<i<j\leq 2n}(-\sqrt{x_{i-n}}+\sqrt{x_{j-n}})^2=$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^2\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_j})^2\cdot$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(-\sqrt{x_i}+\sqrt{x_j})^2=$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^4\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_j})^4\prod_{1\leq i\leq n}(2\sqrt{x_i})^2=$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^4 2^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i=$$
$$2^{2n}(-1)^n f(0)(D(f))^2$$

30. 求证:对每个正整数 n,存在 xy - 平面中的圆使之恰好包含 n 个格点.

解 记 P 为点$(\sqrt{2},1/3)$.首先证明两个不同的格点 $R=(x_1,y_1)$,$S=(x_2,y_2)$ 到 P 的距离也不同.事实上,例如 R,S 到 P 的距离相同,则有

$$(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\frac{1}{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\frac{1}{3})^2$$

从而

$$2(x_2-x_1)\sqrt{2}=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2+\frac{2}{3}(y_1-y_2) \qquad ①$$

因为$\sqrt{2}$ 是无理数,由 ① 易知 $x_1-x_2=0$,因此

$$y_2^2-y_1^2+\frac{2}{3}(y_1-y_2)=0$$

即
$$(y_2-y_1)(y_2+y_1-2/3)=0$$

又因 y_1,y_2 为整数,$y_2+y_1-2/3\neq 0$,从而 $y_1=y_2$,此与 $R\neq S$ 的假设矛盾.

现在设 n 为任意自然数.令 C 是以 P 为中心,半径充分大的圆,使得 C 包含 n 个以上的格点,设为 $m(m>n)$ 个.显然 m 是有限数.由于 P 与各个格点之间的距离是不同的,可以按照距离增加的顺序,把 C 里面的格点排成序列 $P_1,P_2,\cdots,P_m$.显然,以 P 为中心,通过 P_{n+1} 的圆周 C_n 内恰好含有 n 个格点.

31. 设 n 为一给定的非负整数.确定方程

$$x+2y+2z=n \quad ①$$

的非负整数解 x,y,z 的组成 $S(n)$.

解 对于 $|t|<1$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n)t^n=(1+t+t^2+\cdots)(1+t^2+t^4+\cdots)^2=$$
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)^2}=\frac{1}{(1-t)^3(1+t)^2}=$$
$$\frac{3/16}{1-t}+\frac{1/4}{(1-t)^2}+\frac{1/4}{(1-t)^3}+\frac{3/16}{1+t}+\frac{1/8}{(1+t)^2}=$$
$$\frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty}t^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n+$$
$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}t^n+$$
$$\frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n+\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)t^n=$$
$$\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(3+4(n+1)+2(n+1)(n+2)+$$
$$3(-1)^n+2(-1)^n(n+1))t^n$$

所以

$$S(n)=\begin{cases}\dfrac{n(n+6)}{8}+1,\text{当 } n \text{ 为偶数}\\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{8},\text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

32. 设 $n\geqslant 2$ 为一固定整数,确定在区间 $(0,a)$ 上有界且适合函数方程

$$f(x)=\frac{1}{n^2}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{x+a}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{x+(n-1)a}{n}\right)\right) \quad ①$$

的所有函数 $f(x)$.

解 设 $f(x)$ 是在 $0<x<a$ 上有界且满足 ① 的函数.由于 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 有界.存在正常数 K 使得

$$|f(x)|<K,0<x<a \quad ②$$

对于 $s=0,1,\cdots,n-1$,有

$$0<\frac{x+sa}{n}<a,0<x<a$$

故由 ② 得

$$\left|f\left(\frac{x+sa}{n}\right)\right| < K, 0 \leqslant s \leqslant n-1, 0 < x < a$$

于是由①,对于 $0 < x < a$ 有

$$|f(x)| < \frac{1}{n^2}(K + K + \cdots + K)$$

即有

$$|f(x)| < \frac{K}{n}$$

用$\frac{K}{n}$代替界 K 并重复上面论证,得

$$|f(x)| < \frac{K}{n^2}, 0 < x < a$$

按此方法继续做下去,则有

$$|f(x)| < \frac{K}{n^l}, 0 < x < a, l = 0,1,2,\cdots \quad ③$$

令 $l \to \infty$ 便得 $f(x) \equiv 0, 0 < x < a$.

33. 用 I 表示闭区间$[a,b]$,$a < b$.如果对所有 $x \in I$,$f(x) \neq g(x)$,就说两函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 I 上是完全不同的.设 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是 I 上定义的函数使得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + q(x)y + r(x)$$

在 I 上有两两完全不同的三个解 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 及 $y_3(x)$.如果 $z(x)$ 是第四个解使得函数对 $z(x)$,$y_i(x)$ 是完全不同的,$i = 1,2,3$.求证:存在常数 k 使

$$z = \frac{y_1(ky_2 - y_3) + (1-k)y_2y_3}{(k-1)y_1 + (y_2 - ky_3)} \quad ①$$

解 由于 $y_1, y_2, y_3, z = y_4$ 在 I 上两两完全不同,函数

$$f(x) = \frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)} \quad ②$$

在 I 上有定义,同时由于 y_1, y_2, y_3, y_4 在 I 上可微,故 $f(x)$ 是可微的且导数为

$$f(x) = \frac{g(x)}{(y_2 - y_4)^2(y_1 - y_3)^2}$$

其中

$$\begin{aligned} g(x) = &(y'_1 - y'_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4) - \\ &(y_1 - y_2)(y'_1 - y'_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4) - \\ &(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y'_2 - y'_4)(y_3 - y_4) + \\ &(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)(y'_3 - y'_4) \end{aligned}$$

因为

$$y'_s = y_s^2 + qy_s + r, s = 1,2,3,4$$

我们有 $g(x) = ((y_1 + y_2 + q) - (y_1 + y_3 + q) - (y_2 + y_4 + q) + (y_3 + y_4 + q)) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)$

即 $g(x) = 0$,所以 $f(x) = 0$,这说明存在常数 k,在 I 上,$f(x) = k$.最后在 ② 中解出 $z = y_4$ 便得 ①.由于 $z \neq y_3, y_1$,故 $k \neq 0,1$.

34. 记 $a_n, n = 2,3,\cdots$,为乘积 $b_1b_2\cdots b_n$ 的各种加括号方式的个数,使得加括号后任何时候都只有两个 b_i 相乘.例如,由于 b_1b_2 只有一种加括号方式(b_1b_2),故 $a_2 = 1$;由于 $b_1b_2b_3$ 有两种加括号方式,即$(b_1b_2)b_3$ 和 $b_1(b_2b_3)$,故 $a_3 = 2$.求出 a_n 的表达式.

解 令 $a_1 = 1$, $b_1b_2\cdots b_{n+1}$ 的加括号方式之个数为

$$\sum_{i=1}^{n} N(1,i)N(i+1,n+1)$$

其中 $N(i,j)$ 表示 $b_ib_{i+1}\cdots b_j$ 的加括号方式的个数,当 $i < j$,而 $N(i,j) = 1$ 当 $i = j$,于是

$$a_{n+1} = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_2 + a_na_1, n = 1,2,\cdots \quad ①$$

置

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \quad ②$$

由 ① 和 ② 得

$$A(x)^2 = (\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i)(\sum_{j=1}^{\infty} a_jx^j) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_ia_jx^{i+j} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i,j=1\\ i+j=n+1}}^{\infty} a_ia_jx^{i+j} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1)x^{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = A(x) - x$$

从而

$$A(x)^2 - A(x) + x = 0 \quad ③$$

对 $A(x)$ 解二次方程 ③ 得

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

由于 $A(0) = 0$,必有

$$A(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \quad ④$$

再由二项式定理

$$A(x)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4)^n x^n \quad ⑤$$

在 ⑤ 中让 $x^n(n\geqslant 2)$ 的系数相等得

$$a_n=-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-1)^n 2^{2n}=(-1)^{n-1}2^{2n-1}\binom{1/2}{n}=$$

$$(-1)^{n-1}2^{2n-1}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n n!}$$

即

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1},n\geqslant 2$$

35. 求极限

$$L=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}\tan(y\sin x)\mathrm{d}x \quad ①$$

的值.

解 首先证明

$$t\leqslant\tan t\leqslant t+t^3,0\leqslant t\leqslant 1 \quad ②$$

令
$$f(t)=\frac{(\tan t-t)}{t^3},0<t\leqslant 1$$

求导得
$$f^1(t)=\frac{g(t)}{t^4},0<t\leqslant 1$$

其中
$$\begin{cases}g(t)=t\tan^2 t-3\tan t+3t\\ g^1(t)=\dfrac{\sin t}{\cos^3 t}(2t-\sin 2t)\end{cases}$$

因此,当 $0<t\leqslant 1$ 时,$g^1(t)>0$,此蕴涵 $g(t)>g(0)=0,0<t\leqslant 1$.由此推出 f 在 $0<t\leqslant 1$ 上是增函数,所以

$$f(0^+)\leqslant f(t)\leqslant f(1),0<t\leqslant 1$$

此即

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{\tan t-t}{t^3}\leqslant\tan(1)-1,0<t\leqslant 1$$

由于 $\tan(1)<\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}<2$,故有

$$0<\frac{\tan t-t}{t^3}\leqslant 1,0<t\leqslant 1$$

这就完成了 ② 的证明. 对于 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 和 $0<y\leqslant 1$,有 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,从而

$$0\leqslant y\sin x\leqslant 1 \quad ③$$

故由 ② 和 ③

$$y\sin x \leqslant \tan(y\sin x) \leqslant y\sin x + (y\sin x)^3$$

所以

$$0 \leqslant \frac{\tan(y\sin x) - y\sin x}{y} \leqslant y^2\sin^3 x \quad ④$$

在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上对 ④ 进行积分,得

$$0 \leqslant \frac{1}{y}\int_0^{\pi}(\tan(y\sin x) - y\sin x)\mathrm{d}x \leqslant y^2\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x \quad ⑤$$

在 ⑤ 中令 $y \to 0^+$,我们得到

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}(\tan(y\sin x) - y\sin x)\mathrm{d}x = 0$$

因而

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}\tan(y\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

即

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}\tan(y\sin x)\mathrm{d}x = 2 \quad ⑥$$

在 ⑥ 中用 $-y$ 代替 y,易知亦有

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{y}\int_0^{\pi}\tan(y\sin x)\mathrm{d}x = 2 \quad ⑦$$

故结合 ⑥ 和 ⑦ 得 $L = 2$.

36. 设 ε 为一实数,$0 < \varepsilon < 1$,求证:存在无限多个整数 n 满足

$$\cos n \geqslant 1 - \varepsilon \quad ①$$

解 根据 Hurwitz(1891)的一个定理:如果 θ 为无理数,则存在无限多个有理数 a/b,其中 $b > 0$,$\gcd(a,b) = 1$,使得

$$\left|0 - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$$

由于 π 是无理数,Hurwitz 的定理蕴涵存在无限多个有理数 n/k,$k > 0$,$\gcd(n,k) = 1$,使得

$$\left|\pi - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

或等价地

$$|2\pi k - n| < \frac{1}{\sqrt{5}k} \quad ②$$

令 $0 < \varepsilon < 1$,考虑那些满足 ② 且 $k > \frac{1}{\sqrt{5}\varepsilon}$ 的整数 n 和 k,显然有无限多个这样的正整数 k,且对每个如此的 k 有一整数 n 满足

$|2\pi k-n|<\varepsilon$,对这样的整数对(n,k),有

$$1-\cos n\leqslant|1-\cos n|=2\left|\sin\left(k\pi+\frac{n}{2}\right)\right|\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|\leqslant$$
$$2\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|k\pi-\frac{n}{2}\right|=|2k\pi-n|<\varepsilon$$

故 ① 对无限多个整数 n 成立.

> 37. 确定所有满足如下条件的函数 f,f 处处可微且对所有 $xy\neq 1$ 的实数 x,y,都有
> $$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad ①$$

解 设 $f(x)$ 满足 ①,对于 ① 分别求关于 x 和 y 的偏导,得

$$f'(x)=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad ②$$
$$f'(y)=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad ③$$

在 ② 和 ③ 中去掉公共的项,得

$$(1+x^2)f'(x)=(1+y^2)f'(y) \quad ④$$

由于④的左端仅依赖于 x 而右端仅依赖于 y,故它们必为常数 C,于是有

$$f'(x)=\frac{C}{1+x^2}$$

从而有常数 d 使

$$f(x)=C\arctan x+d$$

然而,在 ① 中取 $y=0$ 得 $f(x)+f(0)=f(x)$.故 $f(0)=0$,$d=0$.显然 $f(x)=C\arctan x$ 满足 ①,所以 ① 的全部解为

$$f(x)=C\arctan x$$

其中 C 为常数.

> 38. 取圆周内或圆周上一点 X,通过 X 引两条互相垂直的弦 AC 和 BD(当 X 在圆周上时,可允许退化的情形,即有一弦为直径,另一弦收缩在一点).对 X 所有可能的选择,求出和 $S=|AC|+|BD|$ 的最大值和最小值.

解 选取平面上的(x,y)坐标系使得圆周的中心为原点,BD 平行于 x 轴,AC 平行于 y 轴,B 在 D 的左边,A 在 C 的上方.令 X 表示点(r,s)使得

$$r^2+s^2\leqslant R^2 \quad ①$$

其中,R 为圆的半径,则 A,B,C,D 四点的坐标分别为

$$(r,\sqrt{R^2-r^2}),(-\sqrt{R^2-s^2},s),$$
$$(r,-\sqrt{R^2-r^2}),(\sqrt{R^2-s^2},s)$$

由此得

$$|AC|=2\sqrt{R^2-r^2},\ |BD|=2\sqrt{R^2-s^2}$$

所以

$$S(r,s)=|AC|+|BD|=2(\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-s^2})$$

我们希望找出 $S(r,s)$ 服从约束条件 ① 的极大值和极小值.

首先确定 $S(r,s)$ 的极大值.显然

$$0\leqslant 8R^2(r^2+s^2)+(r^2-s^2)^2$$

故
$$4r^2s^2\leqslant 8R^2(r^2+s^2)+(r^2+s^2)^2$$

从而

$$\begin{aligned}4(R^2-r^2)(R^2-s^2)&=4R^4-4R^2(r^2+s^2)+4r^2s^2\leqslant\\&4R^4+4R^2(r^2+s^2)+(r^2+s^2)^2=\\&(2R^2+(r^2+s^2))^2\end{aligned}$$

取平方根得

$$2\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{R^2-s^2}\leqslant 2R^2+(r^2+s^2)$$

所以

$$(\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-s^2})^2=$$
$$2R^2-(r^2+s^2)+2\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{R^2-s^2}\leqslant 4R^2$$
$$\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-s^2}\leqslant 2R$$

由此推出
$$\max_{r^2+s^2\leqslant R^2}S(r,s)=S(0,0)=4R$$

最后确定 $S(r,s)$ 的极小值,由于

$$(\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-s^2})^2=$$
$$2R^2-(r^2+s^2)+2\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{R^2-s^2}\geqslant$$
$$2R^2-(r^2+s^2)\geqslant$$
$$2R^2-(r^2+s^2)+(r^2+s^2)-R^2=R^2$$

所以
$$\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-s^2}\geqslant R$$

从而证得

$$\lim_{r^2+s^2\leqslant R^2}S(r,s)=S(\pm R,0)=S(0,\pm R)=2R$$

39. 对于 $n=1,2,\cdots$,定义集合 A_n 为

$$A_n=\begin{cases}\{0,2,4,6,8,\cdots\}, n\equiv 0(\bmod 2)\\ \{0,3,6,\cdots,\frac{3(n-1)}{2}\}, n\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}$$

是否有
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n+k})=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n+k})$$
成立?

解 令 $X=\{0,2,4,6,\cdots\}$,$Y=\{0,3,6,9,\cdots\}$,显然

$$A_1\subset A_3\subset A_5\subset\cdots\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}=Y$$
$$A_2=A_4=A_6=\cdots=X$$

故对于 $n=1,2,\cdots$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n+k}=\bigcap_{\substack{k=1\\ n+k\equiv 0(\bmod 2)}}^{\infty}A_{n+k}\cap\bigcap_{\substack{k=1\\ n+k\equiv 1(\bmod 2)}}^{\infty}A_{n+k}=X\cap B_n$$

其中

$$B_n=\begin{cases}A_{n+1},当\ n\equiv 0(\bmod 2)\\ A_{n+2},当\ n\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}$$

所以
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n+k})=\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\cap B_n)=X\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=$$
$$X\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{2n+1})=X\cap Y$$

另一方面,对所有 $n=1,2,\cdots$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n+k}=\bigcup_{\substack{k=1\\ n+k\equiv 0(\bmod 2)}}^{\infty}A_{n+k}\cup\bigcup_{\substack{k=1\\ n+k\equiv 1(\bmod 2)}}^{\infty}A_{n+k}=X\cup Y$$

所以
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n+k})=X\cup Y$$

因此
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n+k})\neq\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n+k})$$
由于 2 属于 $X\cup Y$ 但不属于 $X\cap Y$.

40. 进行一系列重复的独立试验,每次试验成功的概率为 p,失败的概率为 $q=1-p$,试验继续做下去,直到连续 n 次都获得成功为止.用变量 X 表示达到这一目的所需试验的次数.如果 $p_k=\mathrm{Prob}(X=k)$,试确定概率生成函数 $p(x)$

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k \quad ①$$

解 显然

$$p_k=\begin{cases}0, k=0,1,\cdots,n-1\\ p^n, k=n\\ qp^n, k=(n+1),(n+2),\cdots,2n\end{cases}$$

对于 $k>2n$,有

$$p_k=\text{Prob}(A)\text{Prob}(B)\text{Prob}(C)$$

其中 A,B,C 表示下列事件:

(A) 在前面 $k-n-1$ 次试验中没有连续 n 次获得成功;

(B) 第($k-n$) 次试验失败;

(C) 最后 n 次试验都获成功.

于是
$$p_k=(1-\text{Prob}(D))qp^n$$

其中 D 表示在前 $k-n-1$ 次试验中有连续 n 次成功的事件,即

$$p_k=\left(1-\sum_{i=0}^{k-n-1}p_i\right)qp^n, k>2n$$

因此有
$$p(x)=p^nx^n+qp^n(x^{n+1}+\cdots+x^{2n})+qp^n\sum_{k=2n+1}^{\infty}\left(1-\sum_{i=0}^{k-n-1}p_i\right)x^k$$

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{p^nx^n}&=1+q(x+\cdots+x^n)+q\sum_{k=2n+1}^{\infty}x^{k-n}-q\sum_{k=2n+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-n-1}p_ix^{k-n}=\\ &1+q\frac{(x-x^{n+1})}{(1-x)}+q\frac{x^{n+1}}{(1-x)}-qx^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n+l}p_ix^l=\\ &\frac{(1-x+qx)}{(1-x)}-qx^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=n}^{n+l}p_ix^l=\\ &\frac{(1-x+qx)}{(1-x)}-qx^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l}p_{n+r}x^l=\\ &\frac{(1-x+qx)}{(1-x)}-qx^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\substack{r,s=0\\ r+s=l}}^{l}p_{n+r}x^{r+s}=\\ &\frac{(1-x+qx)}{(1-x)}-qx\left(\sum_{r=0}^{\infty}p_{n+r}x^{n+r}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}x^s\right)\end{aligned}$$

即
$$\frac{p(x)}{p^nx^n}=\frac{(1-x+qx)}{(1-x)}-qx\frac{p(x)}{(1-x)}$$

所以
$$p(x)=\frac{(1-px)p^nx^n}{1-x+qp^nx^{n+1}}$$

41. 设 A,B,C,D 是某圆周上四点且使 $ABCD$ 成为一凸四边形. 试用 $a=|AB|,b=|BC|,c=|CD|,d=|DA|$ 表示该圆之半径.

解 先证明如下结果:

$\triangle LMN$ 的外接圆的半径为

$$R=\frac{lmn}{\sqrt{(l+m+n)(l+m-n)(l-m+n)(-l+m+n)}} \quad ①$$

其中 $l=|MN|,m=|NL|,n=|LM|$

记 $\triangle LMN$ 的外接圆之圆心为 C, 则 $|LC|=|MC|=|NC|=R$. 令

$$\alpha=\angle MCN,\beta=\angle NCL,\gamma=\angle LCM$$

则 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, 应用正弦定理于 $\triangle MCN$ 得

$$\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}$$

所以
$$l=R\frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

同理
$$m=2R\sin\left(\frac{\beta}{2}\right),n=2R\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

于是
$$\frac{n}{2R}=\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)+$$
$$\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)=$$
$$\frac{l}{2R}\sqrt{1-\frac{m^2}{4R^2}}+\frac{m}{2R}\sqrt{1-\frac{l^2}{4R^2}}$$

故

$$n=l\sqrt{1-\frac{m^2}{4R^2}}+m\sqrt{1-\frac{l^2}{4R^2}}$$

两边平方得

$$n^2=l^2(1-\frac{m^2}{4R^2})+m^2(1-\frac{l^2}{4R^2})+$$
$$2lm\sqrt{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4R^2}\right)}$$

因而

$$2lm\sqrt{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4R^2}\right)}=(n^2-l^2-m^2)+\frac{l^2m^2}{2R^2}$$

再取平方得

$$4l^2m^2\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4R^2}\right)=$$

$$(n^2-l^2-m^2)^2+\frac{l^4m^4}{4R^4}+\frac{l^2m^2}{R^2}(n^2-l^2-m^2)$$

化简后得

$$(n^2-l^2-m^2)^2-4l^2m^2=-\frac{l^2m^2n^2}{R^2}$$

由此推出 ① 成立.

现在回到原来的问题.记 $x=|AC|,\theta=\angle ABC,\angle CDA=\pi-\theta$,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中应用余弦定理得

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad ②$$

$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\theta)=$$

$$c^2+d^2+2cd\cos\theta \quad ③$$

从 ② 和 ③ 中消去 x^2,则有

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

代入 ② 得

$$x^2=a^2+b^2-ab\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}=$$

$$\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

所以

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

通过 A,B,C,D 的圆之半径 r 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,故由 ① 得

$$r=\frac{abx}{\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)}}=$$

$$\frac{abx}{\sqrt{((a+b)^2-x^2)(x^2-(a-b)^2)}}$$

因为

$$(a+b)^2-x^2=(a+b)^2-\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}=$$

$$\frac{ab((a+b)^2-(c-d)^2)}{ab+cd}=$$

$$\frac{ab(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{ab+cd}$$

类似有

$$x^2-(a-b)^2=\frac{ab(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{ab+cd}$$

所以

$$r=((ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)/((-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)))^{\frac{1}{2}}$$

42. 设 $ABCD$ 为一凸四边形. P 为 $ABCD$ 外面一点,满足 $|AP|=|PB|$,$\angle APB=90°$.类似定义点 Q,R,S.求证:线段 PR 和 QS 长度相等且相互垂直.

证明 在复平面中考虑四边形 $ABCD$ 并用复数 a,b,c,d 表示顶点 A,B,C,D,则边 AB,BC,CD,DA 的中点 H,K,L,M 分别可表为 $(a+b)/2,(b+c)/2,(c+d)/2,(d+a)/2$,用 p 表示点 P.由于 $|PH|=|BH|$,$PH\perp BH$,故有

$$p-\frac{a+b}{2}=\mathrm{i}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)$$

即
$$p=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(a+\mathrm{i}b)$$

类似有
$$q=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(b+\mathrm{i}c)$$

$$r=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(c+\mathrm{i}d)$$

$$s=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(d+\mathrm{i}a)$$

由此可得

$$p-r=\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)((a-c)+\mathrm{i}(b-d))$$

$$q-s=\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)((b-d)+\mathrm{i}(c-a))=$$

$$-\mathrm{i}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)((a-c)+\mathrm{i}(b-d))$$

所以
$$q-s=-\mathrm{i}(p-r)$$

这就证明了 $|PR|=|QS|$ 且 $PR\perp QS$.

43. 求满足

$$(x+y+z+w)^2-(x^2+2z)(y^2-2w)\equiv(p(x,y,z,w))^2-(x^2-2z)(q(x,y,z,w))^2 \quad ①$$

的实系数多项式 $p(x,y,z,w)$ 和 $q(x,y,z,w)$.

解 我们寻求 ① 的形如

$$\begin{cases}(p(x,y,z,w)=xy+X\\ q(x,y,z,w)=y+Y\end{cases} \quad ②$$

的一组解,其中 X,Y 为 x,w,z 的多项式,把 ② 代入 ① 并代简,得

$$((z-w)^2+2x^2w)+2x(x+w)y\equiv (X^2-(x^2-2z)Y^2)+2(xX-(x^2-2z)Y)y \quad ③$$

由此导出

$$\begin{cases}X^2-(x^2-2z)Y^2=(z-w)^2+2x^2w\\ xX-(x^2-2z)Y=x(z+w)\end{cases} \quad ④$$

由 ④ 的第 2 个方程得

$$X=\frac{(x^2-2z)Y+x(z+w)}{x}$$

再把此代入 ④ 的第 1 个方程并化简,得

$$zY^2-x(z+w)Y+x^2w=0$$

解出 Y 我们有 $Y=xw/z$ 或 $Y=x$.由于 X,Y 为多项式,故舍弃第一个解,因此

$$X=x^2-z+w,Y=x$$

从而可取

$$p(x,y,z,w)=xy+x^2-z+w,q(x,y,z,w)=x+y$$

44. 设 C 为复数域,$f:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 为一函数,满足条件:对所有 $z\in\boldsymbol{C}$ 及 $w=0,1,\mathrm{i}$,有

$$\begin{cases}f(0)=0\\ |f(z)-f(w)|=|z-w|\end{cases} \quad ①$$

求证:$f(z)=f(1)z$ 或 $f(1)\bar{z}$,其中 $|f(1)|=1$.

解 由 ① 立得

$$|f(z)|=|z| \quad ②$$

$$|f(z)-\alpha|=|z-1| \quad ③$$

$$|f(z)-\beta|=|z-\mathrm{i}| \quad ④$$

对所有 $z\in\boldsymbol{C}$ 都成立,这里

$$\alpha=f(1),\beta=f(\mathrm{i}) \quad ⑤$$

在 ② 中取 $z=1,\mathrm{i}$,③ 中取 $z=\mathrm{i}$,则得

$$|\alpha|=|\beta|=1,|\alpha-\beta|=\sqrt{2} \quad ⑥$$

因此有

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=\alpha^2\beta\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}\beta^2=\alpha\beta(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)=\\ &\alpha\beta(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}))=\\ &\alpha\beta(|\alpha^2|+|\beta^2|-|\alpha-\beta|^2)=\\ &\alpha\beta(1+1-2)=0\end{aligned}$$

所以

$$\beta = \varepsilon\alpha, \varepsilon = \pm \mathrm{i} \quad ⑦$$

其次,平方 ③ 并利用 ② 和 ⑥ 得

$$\overline{\alpha}f(z) + \alpha\overline{f(z)} = z + \overline{z} \quad ⑧$$

对所有 $z \in C$ 都成立,同理,平方 ④ 并利用 ②,⑥ 及 ⑦ 推出

$$\overline{\alpha}f(z) - \alpha\overline{f(z)} = -\varepsilon \mathrm{i} z + \varepsilon \mathrm{i}\overline{z} \quad ⑨$$

把 ⑧ 与 ⑨ 相加,得到

$$2\overline{\alpha}f(z) = (1 - \varepsilon\mathrm{i})z + (1 + \varepsilon\mathrm{i})\overline{z}$$

由于 $\varepsilon = \pm \mathrm{i}$,故 $\overline{\alpha}f(z) = z$ 或 $\overline{z}$,所以我们有

$$f(z) = f(1)z \text{ 或 } f(1)\overline{z}$$

其中 $|f(1)| = 1$,容易验证二者都满足 ①.

45. 如果 x, y 为有理数,使得

$$\tan \pi x = y \quad ①$$

求证:存在整数 k 使 $x = \dfrac{k}{4}$ 且 $k \not\equiv 2 \pmod 4$.

解法 1 因 x, y 为有理数,存在整数 p, q, r, s 使

$$\begin{cases} x = p/q, y = r/s, q > 0, s > 0 \\ \gcd(p, q) = \gcd(r, s) = 1 \end{cases}$$

于是方程 ① 成为

$$\tan \pi p/q = r/s \quad ②$$

由 DeMoivre 定理有

$$\left(\frac{s + \mathrm{i}r}{s - \mathrm{i}r}\right)^q = \left(\frac{1 + \mathrm{i}r/s}{1 - \mathrm{i}r/s}\right)^q = \left(\frac{1 + \mathrm{i}\tan(\pi p/q)}{1 - \mathrm{i}\tan(\pi p/q)}\right)^q =$$

$$\left(\frac{\cos(\pi p/q) + \mathrm{i}\sin(\pi p/q)}{\cos(\pi p/q) - \mathrm{i}\sin(\pi p/q)}\right)^q =$$

$$\frac{\cos(\pi p) + \mathrm{i}\sin(\pi p)}{\cos(\pi p) - \mathrm{i}\sin(\pi p)} = \frac{(-1)^p + \mathrm{i} \cdot 0}{(-1)^p + \mathrm{i} \cdot 0} = 1$$

故由二项式定理得

$$(s + \mathrm{i}r)^q = (s - \mathrm{i}r)^q = ((s + \mathrm{i}r) - 2\mathrm{i}r)^q =$$

$$\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(s + \mathrm{i}r)^{q-k}(-2\mathrm{i}r)^k$$

所以

$$(-2\mathrm{i}r)^q = -\sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s + \mathrm{i}r)^{q-k} =$$

$$-(s + \mathrm{i}r)\sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s + \mathrm{i}r)^{q-k-1}$$

于是有整数 a, b 使

$$(-2\mathrm{i}r)^q = (s + \mathrm{i}r)(a + \mathrm{i}b) \quad ③$$

两边取模得

$$2^{2q}r^{2q}=(s^2+r^2)(a^2+b^2)$$

如果 c 是一能整除 s^2+r^2 的奇素数，则 c 整除 $2^{2q}r^{2q}$ 从而整除 r，于是 c 整除 $s^2=(s^2+r^2)-r^2$，即 c 整除 s，但此与 $\gcd(r,s)=1$ 矛盾，因此 s^2+r^2 没有奇素数因子从而必是 2 的幂，设

$$s^2+r^2=2^l,l\geqslant 0$$

进而，如果 $l\geqslant 2$，则 s 和 r 都是偶数，这不可能，所以 $l=0$ 或 1. 由于 $s>0$，必有

$$(r,s)=(0,1)\text{ 或 }(\pm 1,1)$$

第一种可能给出 $x=k/4$，其中 $k=4p$，而第二种可能给出 $x=k/4$，其中 $k\equiv 1(\bmod 2)$，证毕.

解法 2(R. Dreyer)　证明中要用到如下事实：对任何实数 θ，都存在整数 $c(n,r),n=1,2,\cdots;r=0,1,\cdots,[n/2]$，使得

$$2\cos n\theta=\sum_{r=0}^{[n/2]}c(n,r)(2\cos\theta)^{n-2r}\qquad ④$$

其中整数 $c(n,r)$ 递归地由下式给出

$$c(1,0)=1,c(2,0)=1,c(2,1)=2$$

而当 $n\geqslant 3$ 时

$$\begin{cases}c(n,0)=1\\ c(n,r)=c(n-1,r)-c(n-2,r-1),1\leqslant r\leqslant (n-1)/2\\ c(n,n/2)=(-1)^{n/2}2,n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

现在，由于 x 是有理数，可以写成 $x=p/q$，其中 $\gcd(p,q)=1$ 且 $q>0$，又因 $y=\tan\pi x$ 是有理数，故

$$z=2\cos 2\pi x=2\frac{(1-\tan^2\pi x)}{(1+\tan^2\pi x)}=2\frac{1-y^2}{1+y^2}$$

也是有理数，对 $n=q,\theta=2\pi x=2\pi p/q$ 应用 ④，易知 z 是首一整系数多项式

$$f(x)=\sum_{r=0}^{[n/2]}c(n,r)x^{n-2r}-2$$

的有理根，所以 z 必是整数. 但 $|z|=2|\cos 2\pi x|\leqslant 2$，故 $z=0,\pm 1$ 或 ± 2，即

$$\cos(2\pi p/q)=0,\pm\frac{1}{2},\pm 1$$

因此存在整数 l 使

$$\frac{2\pi p}{q}=(2l+1)\frac{\pi}{2},(3l\pm 1)\frac{\pi}{3},l\pi$$

于是
$$x=\frac{p}{q}=\frac{2l+1}{4},\frac{3l\pm 1}{6}\text{ 或}\frac{l}{2}$$

在上列三种可能中，只有第一种以及当 l 为偶数时的第三种可能

使 $y=\tan\pi x$ 为有理数,所以 $x=\frac{k}{4}$,其中 $k\neq 2(\bmod 4)$.

46. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,AP 交 BC 于 D,BP 交 CA 于 E,CP 交 AB 于 F.求证

$$\frac{|PA|}{|PD|}\frac{|PB|}{|PE|}+\frac{|PB|}{|PE|}\frac{|PC|}{|PF|}+\frac{|PC|}{|PF|}\frac{|PA|}{|PD|}\geqslant 12 \quad ①$$

解 用 S,S_1,S_2,S_3 分别表示 $\triangle ABC,\triangle PBC,\triangle PCA$,$\triangle PAB$ 的面积,则 $S=S_1+S_2+S_3$.因 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 有公共边 BC,故

$$\frac{|AD|}{|PD|}=\frac{S}{S_1}$$

$$\frac{|PA|}{|PD|}=\frac{|AD|-|PD|}{|PD|}=\frac{|AD|}{|PD|}-1=$$

$$\frac{S}{S_1}-1=\frac{S_2+S_3}{S_1}$$

同理 $$\frac{|PB|}{|PE|}=\frac{S_3+S_1}{S_2},\frac{|PC|}{|PF|}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$$

因此,由算术 - 几何平均值不等式得

$$\frac{|PA|}{|PD|}\frac{|PB|}{|PE|}+\frac{|PB|}{|PE|}\frac{|PC|}{|PF|}+\frac{|PC|}{|PF|}\frac{|PA|}{|PD|}=$$

$$\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2}+\frac{(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_2S_3}+$$

$$\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_3S_1}=\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_3}{S_2}+1+\frac{S_3^2}{S_1S_2}+$$

$$\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}+1+\frac{S_1^2}{S_2S_3}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_2}{S_1}+1+\frac{S_2^2}{S_3S_1}\right)=$$

$$\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+$$

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2S_3}+\frac{S_2^2}{S_3S_1}+\frac{S_3^2}{S_1S_2}\right)\geqslant$$

$$2+2+2+3+3=12$$

证毕.

47. 设 l,n 为满足条件

$$1 \leqslant l < n, \gcd(l,n) = 1$$

的正整数，k 为满足

$$1 \leqslant k < n, kl \equiv -1 \pmod{n}$$

的唯一整数. 令 $\boldsymbol{M}$ 为 $k \times l$ 矩阵，其 (i,j) 元为

$$(i-1)l + j$$

又令 $\boldsymbol{N}$ 为一 $k \times l$ 矩阵，它是把 $\boldsymbol{M}$ 的每一列中元颠倒顺序后作为矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的行而得到. 求 $\boldsymbol{M}$ 的第 (i,j) 元素与 $\boldsymbol{N}$ 的第 (i,j) 元素之间以 n 为模的关系.

解 如果 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ 是两个 $k \times l$ 矩阵，当 $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{n}, i = 1,\cdots,k, j = 1,\cdots,l$ 时，我们记 $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \pmod{n}$. 由于 $kl \equiv -1 \pmod{n}$，关于模 n，我们有

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & l-2 & l-1 & l \\ l+1 & l+2 & \cdots & 2l-2 & 2l-1 & 2l \\ 2l+1 & 2l+2 & \cdots & 3l-2 & 3l-1 & 3l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (k-1)l+1 & (k-1)l+2 & \cdots & kl-2 & kl-1 & kl \end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} (kl-(k-1))l & (kl-(2k-1))l & \cdots & (2k+1)l & (k+1)l & l \\ (kl-(k-2))l & (kl-(2k-2))l & \cdots & (2k+2)l & (k+2)l & 2l \\ (kl-(k-3))l & (kl-(2k-3))l & \cdots & (2k+3)l & (k+3)l & 3l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (kl)l & (kl-k)l & \cdots & 3kl & 2kl & kl \end{bmatrix}$$

由此易知，关于模 n，N 的 (i,j) 元素是 $\boldsymbol{M}$ 的 (i,j) 元素乘以 l.

48. 设 m,n 为整数，$1 \leqslant m < n$，令 $a_{ij}, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$，为 mn 个不全为零的整数并记

$$a = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ij}|$$

求证：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ①$$

有不全为零的整数解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，满足条件

$$|x_j| \leqslant [(2na)^{m/n-m}], 1 \leqslant j \leqslant n$$

解 令 $N = [(2na)^{m/n-m}]$，则

$$N > (2na)^{m/n-m} - 1$$

故 $$(N+1)^{n-m} > (2na)^m$$

从而 $$(N+1)^n > (2na)^m(N+1)^m = (2naN+2na)^m$$

由于 $a \geqslant 1$,故有

$$(N+1)^n > (2naN+1)^m \quad ②$$

记 $L_i = L_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n, 1 \leqslant i \leqslant m$,如果$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是满足 $0 \leqslant y_j \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n$ 的坐标为整数的向量,则相应的值 $L_i = L_i(y_1, y_2, \cdots, y_n), 1 \leqslant i \leqslant m$,满足

$$-naN \leqslant L_i \leqslant naN, 1 \leqslant i \leqslant m$$

故坐标为整数的向量$(L_1, L_2, \cdots, L_m)$最多可取到$(2nN+1)^m$个不同的值,由于向量$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$有$(N+1)^n$种不同选择,根据②,必有两个不同的向量

$$\boldsymbol{u} = (y_1, y_2, \cdots, y_n), \boldsymbol{v} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

确定同一向量$(L_1, L_2, \cdots, L_m)$.令

$$x_j = y_j - z_j, 1 \leqslant j \leqslant n$$

因 $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$,$x_j$ 不能全为 0.此外,由于

$$L_i(y_1, \cdots, y_n) = L_i(z_1, \cdots, z_n), 1 \leqslant i \leqslant m$$

故$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$必是①的解.最后,由 $0 \leqslant y_j, z_j \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n$ 得

$$|x_j| \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n$$

49. 刘维尔(Liouville)曾证明了:如果$f(x)$,$g(x)$为有理函数,$g(x)$的阶大于0,且$\int f(x)e^{g(x)}dx$为初等函数,则

$$\int f(x)e^{g(x)}dx = h(x)e^{g(x)}$$

其中 $h(x)$ 为有理函数.应用刘维尔的这一结果证明

$$\int e^{-x^2}dx$$

不是初等函数.

解 假设$\int e^{-x^2}dx$是初等函数,则由刘维尔的结果,存在有理函数 $h(x)$ 使得

$$\int e^{-x^2}dx = h(x)e^{-x^2}$$

因此 $$\frac{d}{dx}(h(x)e^{-x^2}) = e^{-x^2}$$

即

$$h'(x) - 2xh(x) = 1 \quad ①$$

因 $h(x)$ 是有理函数,故有多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$,其中 $q(x)$ 不恒

为 0, $\gcd(p(x),q(x))=1$,使得

$$h(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad ②$$

于是

$$h'(x)=\frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q(x)^2} \quad ③$$

再把 ②,③ 代入 ①,得

$$p'(x)q(x)-p(x)q'(x)-2xp(x)q(x)=q(x)^2 \quad ④$$

如果 $q(x)$ 是常值多项式,例如,$q(x)\equiv k$,则 ④ 变为

$$p'(x)-2xp(x)=k$$

这显然不可能,因为等式左边的多项式次数至少为 1. 所以 $q(x)$ 不恒为常数. 令 c 为它的一个(复)根,$m(m\geqslant 1)$ 为 c 的重复度,则

$$(x-c)^m \parallel q(x),(x-c)^{m-1}\parallel q'(x)$$

把 ④ 改写为

$$p(x)q'(x)=(p'(x)-2xp(x)-q(x))q(x)$$

容易看出 $(x-c)\parallel p(x)$,此与 $\gcd(p(x),q(x))=1$ 相矛盾. 证毕.

50. 数列 $x_0,x_1,\cdots$ 满足条件

$$x_0=0,x_1=1,x_{n+1}=\frac{x_n+nx_{n-1}}{n+1},n\geqslant 1 \quad ①$$

求
$$L=\lim_{n\to\infty}x_n$$

解 递推关系 ① 可写为

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{n}{n+1}(x_n-x_{n-1}),n\geqslant 1$$

因此

$$x_{n+1}-x_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}(x_1-x_0)=\frac{(-1)^n}{n+1},n\geqslant 1 \quad ②$$

方程 ②,当 $n=0$ 时显然成立. 所以对于 $N\geqslant 1$,有

$$x_N=\sum_{n=0}^{N-1}(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

从而
$$L=\lim_{N\to\infty}x_N=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

即 $L=\ln 2$.

51. 设整数 n 具有下列性质

若 $1<k\leqslant N$ 且 $\gcd(k,n)=1$,则 k 就是素数 ①

求证:这样的整数 $N(N\geqslant 3)$ 只有 3,4,6,8,12,18,24,30.

解 容易验证满足性质①的不大于121的整数只有3,4,6,8,12,18,24,30.设 $N > 121$ 是具有性质①的整数,令 $n \geqslant 5$ 为正整数使得

$$p_n \leqslant \sqrt{N} < p_{n+1} \quad ②$$

其中 p_n 表示第 n 个素数.由②知 $p_i^2 \leqslant N, i = 1,2,\cdots,n$,因此由性质①,必有 $p_i \mid N, i = 1,2,\cdots,n$.因 $p_1,\cdots,p_n$ 为不同的素数,故有

$$p_1p_2\cdots p_n \mid N \quad ③$$

从而由②和③得

$$p_1p_2\cdots p_n \leqslant N < p_{n+1}^2 \quad ④$$

根据 Bertrand 公设①有

$$p_{n+1} \leqslant 2p_n, p_n \leqslant 2p_{n-1}$$

所以

$$p_{n-1}p_n \geqslant \frac{p_n^2}{2} \geqslant \frac{p_{n+1}^2}{8} \quad ⑤$$

应用不等式⑤于④得

$$p_1p_2\cdots p_{n-2}p_{n+1}^2/8 < p_{n+1}^2$$

即有 $p_1p_2\cdots p_{n-2} < 8$.由于 $p_1p_2 = 6, p_1p_2p_3 = 30$,必有 $n - 2 \leqslant 2$, $n \leqslant 4$,这不可能,所以不存在具有性质①的整数 $N > 121$.

52. 求无穷级数的和

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots$$

解 首先注意到

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots = \\ &\int_0^1 (1 - x^3 + x^5 - x^8 + x^{10} - \cdots)\mathrm{d}x = \\ &\int_0^1 (1 - x^3)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\mathrm{d}x = \\ &\int_0^1 \frac{1 - x^3}{1 - x^5}\mathrm{d}x = \\ &\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

分解为部分分式,得

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \equiv \frac{a}{x^2 + cx + 1} + \frac{b}{x^2 + dx + 1}$$

① Bertrand 公设是说当 $n > 3$ 时,n 和 $(2n - 2)$ 之间至少有一个素数,这个公设实际上是定理(D. L. Cheby shev(1852)).

其中

$$a=\frac{5+\sqrt{5}}{10},b=\frac{5-\sqrt{5}}{10},c=\frac{1-\sqrt{5}}{2},d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

于是
$$S=aI_c+bI_d$$

其中
$$I_c=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+cx+1},I_d=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+dx+1}$$

现在

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2tx+1}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arctan\left(\frac{x+t}{\sqrt{1-t^2}}\right),\ |t|<1$$

故由数学分析的基本定理得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2tx+1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\arctan\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)-\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$$

令 $t=(1-\sqrt{5})/4,t=(1+\sqrt{5})/4$,得

$$I_c=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\arctan\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$I_d=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\arctan\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\right)$$

由于

$$\cos(\pi/10)=(\sqrt{10+2\sqrt{5}})/4$$

$$\sin(\pi/10)=(\sqrt{5}-1)/4$$

$$\cos(3\pi/10)=(\sqrt{10-2\sqrt{5}})/4$$

$$\sin(3\pi/10)=(\sqrt{5}+1)/4$$

所以

$$\tan(\pi/10)=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

$$\tan(3\pi/10)=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

于是得
$$I_c=\frac{3\pi}{10}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}},I_d=\frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

从而

$$S=\frac{\pi}{100}\left(3(5+\sqrt{5})\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}+(5-\sqrt{5})\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\right)=$$

$$\frac{\pi}{100}(3(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}})=$$

$$\frac{\pi}{100}(6\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{10-2\sqrt{5}})=$$

$\frac{\pi}{50}(3\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$

53. 在已给三角形的外部以每边为直径作半圆，它们公切线的长度分别为 l,m,n，试把数量

$$\frac{lm}{n}+\frac{mn}{l}+\frac{nl}{m}$$

与三角形各边的长度联系起来.

解 记已给三角形的顶点为 A,B,C. 而 A',B',C' 分别为 BC,CA,AB 上所作半圆 α,β,γ 的中心，DE,DF,HJ 分别为 β 和 γ，γ 和 α，α 和 β 的公切线. 联结 $B'D,C'E$，并从 C' 作 $C'K$ 垂直于 $B'D$. 则 $KC'ED$ 是一矩形，故 $KC'=DE=l$. 令

$$|AB|=2c,|BC|=2a,|CA|=2b$$

则有

$$|B'C'|=a,|B'K|=|b-c|$$

从而

$$|KC'|=\sqrt{a^2-(b-c)^2}$$

即

$$l=\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}$$

类似可得

$$\begin{cases}m=|FG|=\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)}\\n=|HJ|=\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}\end{cases}$$

因此

$$\frac{mn}{l}=-a+b+c,\frac{nl}{m}=a-b+c,\frac{lm}{n}=a+b-c$$

$$\frac{mn}{l}+\frac{nl}{m}+\frac{lm}{n}=a+b+c \qquad ①$$

即①中等号左边等于三角形的半周长.

54. 确定具有下列性质的所有函数 $H:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$.

(1) $H(1,0,0,1)=1$

(2) $H(\lambda a,b,\lambda c,d)=\lambda H(a,b,c,d)$

(3) $H(a,b,c,d)=-H(b,a,d,c)$

(4) $H(a+e,b,c+f,d)=H(a,b,c,d)+H(e,b,f,d)$

其中 a,b,c,d,e,f 都为实数.

解 由(3)有

$$H(1,1,0,0)=-H(1,1,0,0),H(0,0,1,1)=-H(0,0,1,1)$$

所以

$$H(1,1,0,0)=H(0,0,1,1)=0 \qquad ①$$

且根据(1),(2)有

$$H(0,1,1,0) = -H(1,0,0,1) = -1 \quad ②$$

因此

$$\begin{aligned}
H(a,b,c,d) = {} & H(a,b,0,d) + H(0,b,c,d) = && (4)\\
& aH(1,b,0,d) + cH(0,b,1,d) = && (2)\\
& -aH(b,1,d,0) - cH(b,0,d,1) = && (3)\\
& -a(H(b,1,0,0) + H(0,1,d,0)) = &&\\
& -c(H(b,0,0,1) + H(0,0,d,1)) = && (4)\\
& -abH(1,1,0,0) - adH(0,1,1,0) - &&\\
& bcH(1,0,0,1) - cdH(0,0,1,1) = &&\\
& -ab(0) - ad(-1) - bc(1) - cd(0) = &&\\
& ad - bc &&
\end{aligned}$$

即

$$H(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

55. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是方程

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的 $n(n \geqslant 1)$ 个复根,其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为复数.令

$$A = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$$

求证

$$|z_j| \leqslant 1 + A, j = 1,2,\cdots,n$$

证明 令

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

且设 $z_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 中有 z_j 使 $|z_j| > 1 + A$,则有

$$\begin{aligned}
0 = |f(z_j)| = {} & \left| z_j^n\left(1 + \frac{a_1}{z_j} + \cdots + \frac{a_n}{z_j^n}\right) \right| = \\
& |z_j|^n \left| 1 + \frac{a_1}{z_j} + \cdots + \frac{a_n}{z_j^n} \right| \geqslant \\
& |z_j|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|z_j|} - \cdots - \frac{|a_n|}{|z_j|^n}\right) \geqslant \\
& |z_j|^n \left(1 - \frac{A}{|z_j|} - \cdots - \frac{A}{|z_j|^n}\right) \geqslant \\
& |z_j|^n \left(1 - \frac{A}{|z_j|} - \cdots - \frac{A}{|z_j|^n} - \cdots\right) = \\
& |z_j|^n \left(1 - \frac{A}{|z_j| - 1}\right) = \\
& |z_j|^n \frac{(|z_j| - (A+1))}{|z_j| - 1} > 0
\end{aligned}$$

这不可能.所以 $f(z)$ 的所有根 $z_j, 1 \leqslant j \leqslant n$,都满足 $|z_j| \leqslant 1 + A$.

56. 设 m,n 为正整数且 m 是奇数,求

$$d=\gcd(2^m-1,2^n+1)$$

解 定义整数 k,l 使

$$2^m-1=kd,2^n+1=ld$$

则有

$$2^m=kd+1,2^n=ld-1$$

因此有整数 s,t 使

$$\begin{cases}2^{mn}=(kd+1)^n=sd+1\\2^{mn}=(ld-1)^m=td-1(\text{因 } m \text{ 为奇数})\end{cases}$$

故得 $(s-t)d=-2$,d 整除 2,但显然 d 是奇数,所以 $d=1$.

57. 设 $f(x)$ 是 $2m+1$ 次整系数多项式且有 $2m+1$ 个整数 $k_1,\cdots,k_{2m+1}$ 使得

$$f(k_1)=\cdots=f(k_{2m+1})=1 \quad ①$$

求证:$f(x)$ 不能表为两个非常数的整系数多项式的乘积.

解 假设 $f(x)=g(x)h(x)$,其中 $g(x),h(x)$ 为非常数的整系数多项式,$r=\deg(g(x))$,$s=\deg(h(x))$,$r+s=2m+1$,$1\leqslant r\leqslant s\leqslant 2m$,显然 $r\leqslant m$. 对于 $i=1,2,\cdots,2m+1$,由 ① 有

$$1=f(k_i)=g(k_i)h(k_i)$$

因为 $g(k_i)$ 是整数,必有

$$g(k_i)=\pm 1,i=1,2,\cdots,2m+1$$

显然值 $g(k_i)$,$1\leqslant i\leqslant 2m+1$ 中要么是 -1 要么是 $+1$ 至少出现 $m+1$ 次,记此值为 ε,于是 $g(x)-\varepsilon$ 的次数最多为 m 且至少对 $m+1$ 个 x 的值等于 0,因此多项式 $g(x)-\varepsilon$ 必恒为 0,即 $g(x)$ 是常数,矛盾. 因此 $f(x)$ 不存在这样的因式分解.

58. 求证:不存在整数 a,b,c,d(不全为零)使得

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0 \quad ①$$

解 假设 ① 有不全为零的整数解 a,b,c,d,令

$$\begin{cases}m=\gcd(a,b,c,d)\\a_1=a/m,b_1=b/m,c_1=c/m,d_1=d/m\end{cases}$$

则显然 (a_1,b_1,c_1,d_1) 也是 ① 的不全为零的整数解,且

$$\gcd(a_1,b_1,c_1,d_1)=1$$

故此不失一般性可以设 ① 的解 (a,b,c,d) 满足 $\gcd(a,b,c,d)=1$.由 ① 得

$$2(a^2+5b^2)=(2c+d)^2+5d^2 \quad ②$$

所以
$$2a^2=(2c+d)^2 (\bmod 5)$$

因 2 以 5 为模是非平方剩余的,故必有

$$a\equiv 2c+d\equiv 0(\bmod 5) \quad ③$$

令

$$a=5X,2c+d=5Y$$

X,Y 为整数,则 ② 成为

$$2(5X^2+b^2)=5Y^2+d^2$$

于是得 $2b^2\equiv d^2(\bmod 5)$.由于 2 关于模 5 是非平方剩余的,得

$$b\equiv d\equiv 0(\bmod 5) \quad ④$$

由 ③,④ 易知 $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0(\bmod 5)$, 此与 $\gcd(a,b,c,d)=1$ 矛盾.所以 ① 仅有整数解 $a=b=c=d=0$.

59. 求证:存在无限多个正整数,不能把这些正整数表示成少于十个奇自然数的平方和.

解 我们证明正整数 $72k+42,k=0,1,2,\cdots$,就不能表为少于十个奇数的平方和.假设存在 $K\geqslant 0$ 及奇自然数 $x_1,\cdots,x_s,1\leqslant s<10$.使得

$$72K+42=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2 \quad ①$$

因对每个 $i=1,2,\cdots,s,x_i^2\equiv 1(\bmod 8)$,故以 8 为模考察等式 ① 的同余性可得

$$s\equiv 2(\bmod 8)$$

由于 $1\leqslant s<10$,故必有 $s=2$,即

$$72k+42=x_1^2+x_2^2 \quad ②$$

以 3 的模将 ② 作同余处理得

$$x_1^2+x_2^2\equiv 0(\bmod 3)$$

因为任何一个整数之平方都与 0 或 1 同余(mod 3),我们必有 $x_1\equiv x_2\equiv 0(\bmod 3)$. 最后考察 ② 以 9 为模的同余性得到矛盾 $6\equiv 0(\bmod 9)$.

60. 设 k 是正整数,求积分

$$I(k)=\int_0^{\infty}\frac{\sin kx\cos^k x}{x}\mathrm{d}x \qquad ①$$

解 由二项式定理

$$(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\mathrm{e}^{2r\mathrm{i}x} \qquad ②$$

因

$$(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)^k=\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^k- \\ (\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)2^k\cos^k x$$

$(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)^k$ 的虚部为 $2^k\sin kx\cos^k x$,比较 ② 中等式两端的虚部,得到

$$2^k\sin kx\cos^k x=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx=\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx$$

于是利用 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,我们有

$$I(k)=\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2rx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}= \\ \frac{\pi}{2^{k+1}}(2^k-1)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

这正是所需求的.

61. 求证:对于 $n=1,2,3,\cdots$

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

都是整数.

证法 1 对于 $n=1,2,\cdots$,我们有

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{1}{n+1}= \\ \frac{2n!}{(n!)^2}\frac{((2n+2)-(2n+1))}{n+1}= \\ \frac{2n!}{(n!)^2}\left(2-\frac{2n+1}{n+1}\right)= \\ 2\frac{2n!}{(n!)^2}-\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}= \\ 2\binom{2n}{n}-\binom{2n+1}{n}$$

由于 $\binom{2n}{n}$ 和 $\binom{2n+1}{n}$ 都是整数,故 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 是整数,证毕.

证法 2(S.Elnitsky)　对于 $n=1,2,\cdots$,我们有

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{1}{n+1}=\frac{2n!}{n!(n+1)!}=$$

$$\frac{2n!}{n!(n+1)!}((n+1)-n)=$$

$$\frac{2n!}{(n!)^2}-\frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!}=$$

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

因$\binom{2n}{n}$和$\binom{2n}{n-1}$都是整数,故$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$是整数,证毕.

62.　设 $a>1$,求无穷级数的和

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$$

解　对于 $a>1$,由于

$$\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{2^n(a^{2^n}-1)}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{2^n(a^{2^n}+1)-2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}=$$

$$\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{a^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$$

所以

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{a-1}$$

63.　设 k 为整数.求证:形式幂级数

$$\sqrt{1+kx}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

具有整系数的充要条件是 $k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$.

解　如果 $k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,则 $a_1=k/2$不是整数.当 $k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$,则 $a_2=-k^2/8$不是整数.当 $k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$,对 $n=1,2,\cdots$,有

$$a_n=\binom{1/2}{n}k^n=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}k^n=$$

$$(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n n!}k^n=$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}k^n=$$

$$2(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{k}{4}\right)^n$$

因为$\frac{k}{4}$是整数而由问题61，$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$也是整数，故 a_n 是整数. 证毕.

64. 设 m 为一正整数，$\boldsymbol{M}_m$ 为 $m\times m$ 矩阵，其(i,j)－元为 $\gcd(i,j)$. 求 $\boldsymbol{M}_m$ 的行列式之值.

解 设 $\boldsymbol{M}_m$ 的列为 $C_1,C_2,\cdots,C_m$，令

$$\begin{cases}D_i=C_i, i=1,2,\cdots,m-1\\ D_m=\sum_d(-1)^{\tau(d)}C_{m/d}\end{cases}$$

其中和式是对所有整除 m 且无平方因子的整数 d 来取的. 以 $D_1,\cdots,D_m$ 为列作矩阵$\boldsymbol{N}_m$. 由于 $D_m=C_m+J$，J 为C_i，$1\leqslant i\leqslant m-1$ 的线性组合，故有

$$\det \boldsymbol{M}_m=\det \boldsymbol{N}_n$$

对于$1\leqslant i\leqslant m$，D_m 的位于第 i 行的元为(为简单起见以下记$(i,j)=\gcd(i,j)$)：

$$\sum_{\substack{d\mid m\\ d\text{无平方因子}}}(-1)^{\tau(d)}(i,m/d)=$$

$$\prod_{p^{\alpha}\parallel m}\sum_{\substack{d\mid p^{\alpha}\\ d\text{无平方因子}}}(-1)^{\tau(d)}(i,p^{\alpha}/d)=$$

$$\prod_{p^{\alpha}\parallel m}((i,p^{\alpha})-(i,p^{\alpha-1}))=$$

$$\begin{cases}\prod\limits_{p^{\alpha}\parallel m}(p^{\alpha}-p^{\alpha-1}),\text{当 } i=m\\ 0,\text{当 } 1\leqslant i\leqslant m-1\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\varphi(m),\text{当 } i=m\\ 0,\text{当 } 1\leqslant i\leqslant m-1\end{cases}$$

把 $\boldsymbol{N}_m$ 的行列式按第 m 列展开，得

$$\det \boldsymbol{N}_m=\varphi(m)\det \boldsymbol{N}_{m-1}$$

所以

$$\det \boldsymbol{M}_m=\varphi(m)\det \boldsymbol{M}_{m-1}$$

于是，由于 $M_1=1=\varphi(1)$，我们得

$$\det \boldsymbol{M}_m=\varphi(m)\varphi(m-1)\cdots\varphi(2)\varphi(1)$$

65. 设 l,m 为正整数，l 是奇数且有整数 x,y 使

$$\begin{cases} l = x^2 + y^2 \\ m = x^2 + 8xy + 17y^2 \end{cases}$$

求证：不存在整数 u,v 使得

$$\begin{cases} l = u^2 + v^2 \\ m = 5u^2 + 16uv + 13v^2 \end{cases} \quad ①$$

解 假设存在整数 u,v 使得 ① 成立，则

$$m = 5l + 8(2uv + v^2)$$

即

$$m \equiv 5l \pmod 8$$

因此必有 $x^2 + 8xy + 17y^2 \equiv 5x^2 + 5y^2 \pmod 8$

故

$$4x^2 + 4y^2 \equiv 0 \pmod 8$$

从而

$$l = x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 2$$

此与 l 为奇数矛盾.

66. 令

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的，并求出它的和.

解 $a_n = \int_0^1 (1 - x + x^2 - \cdots) + (-1)^{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x -$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} =$$

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

因此对任 $N \geqslant 1$，有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}x^n\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{x + (-1)^{N+1}x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

故

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_0^1 x^{N+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{N+2}$$

令 $N \to \infty$ 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且和为

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

67. 设 $A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 6\}$ 为七个整数的序列,满足

$$0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_6 \leqslant 6$$

对于 $i = 0,1,\cdots,6$,令 N_i 为使得 $a_j = i$ 的 a_j 的个数.求出所有满足

$$N_i = a_{6-i}, i = 0,1,\cdots,6 \qquad ①$$

的序列 A.

解 设 A 是满足 ① 的序列且记 A 中 0 的个数为 k.由于 $a_0 = 0$,知 $k \geqslant 1$,又由于 $k = N_0 = a_6$,故 $k \leqslant 6$.如果 $k = 6$,则 $a\{0,0,0,0,0,0,6\}$,与 $N_6 = a_0 = 0$ 矛盾.所以,$1 \leqslant k = a_6 \leqslant 5$,从而

$$N_k \geqslant 1, N_{k+1} = \cdots N_6 = 0 \qquad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$a_0 = a_1 = \cdots a_{6-(k+1)} = 0, a_{6-k} \geqslant 1 \qquad ③$$

于是

$$k = N_0 = 6 - (k+1) + 1$$

即 $k = 3$.到此证得 A 具有形式

$$A = \{0,0,0,a_3,a_4,a_5,3\} \qquad ④$$

其中

$$1 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5 \leqslant 3 \qquad ⑤$$

显然我们有 $0 \leqslant N_1 \leqslant 3$,如果 $N_1 = 0$,则由 ① 导出矛盾 $a_5 = N_1 = 0$.如果 $N_1 = 1$,则由 ① 有 $a_5 = 1$,从而 ⑤ 蕴涵 $a_3 = a_4 = a_5 = 1$,导致矛盾 $N_1 = 3$.如果 $N_1 = 3$,则 $a_3 = a_4 = a_5 = 1$,故由 ①,$a_5 = N_1 = 3$,矛盾.因此 $N_1 = 2$,$a_3 = a_4 = 1$,$a_5 = N_1 = 2$,即 $A = \{0,0,0,1,1,2,3\}$.由上述证明知,它是唯一满足 ① 的序列.

68. 设 G 是有单位元 e 的有限群.如果 G 含有元 g,h 使得

$$g^5=e,ghg^{-1}=h^2 \qquad ①$$

确定元 h 的阶.

解 如果 $h=e$,则 h 的阶为 1,故可设 $h\neq e$.由于

$$g^2hg^{-2}=g(ghg^{-1})g^{-1}=gh^2g^{-1}=(ghg^{-1})^2=h^4$$
$$g^3hg^{-3}=g(g^2hg^{-2})g^{-1}=gh^4g^{-1}=(ghg^{-1})^4=h^8$$
$$g^4hg^{-4}=g(g^3hg^{-3})g^{-1}=gh^8g^{-1}=(ghg^{-1})^8=h^{16}$$
$$g^5hg^{-5}=g(g^4hg^{-4})g^{-1}=gh^{16}g^{-1}=(ghg^{-1})^{16}=h^{32}$$

且由于 $g^5=e$,故得 $h=h^{32},h^{31}=e$.因为 $h\neq e$ 且 31 是素数,所以 h 的阶为 31.

69. 设 a,b 是正整数使得

$$\gcd(a,b)=1,a\not\equiv b\pmod 2$$

如果集合 S 具有如下性质:

(1)$a,b\in S$;

(2)$x,y,z\in S\Rightarrow x+y+z\in S$.

求证:大于 $2ab$ 的每个整数都属于 S.

证明 设 $N>2ab$ 为整数,由于 $\gcd(a,b)=1$,存在整数 k,l 使得

$$ak+bl=N$$

进而,由于

$$\frac{l}{a}-\left(\frac{-k}{b}\right)=\frac{ak+bl}{ab}=\frac{N}{ab}>2$$

故有整数 t 满足

$$\frac{-k}{b}\leqslant t<t+1\leqslant\frac{l}{a}$$

令 u,v,x,y 为如下定义的整数

$$u=k+bt,v=l-at$$
$$\begin{cases}x=u,y=v,u+v\equiv 1\pmod 2\\ x=u+b,y=v-a,u+v\equiv 0\pmod 2\end{cases}$$

容易验证

$$N=xa+yb,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\equiv 1\pmod 2$$

下面我们证明 S 包含所有具有如下形式的整数

$$xa+yb,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\equiv 1\pmod 2$$

从而完成 $N\in S$ 的证明.

对奇正整数 m,用 p_m 表示断语:对所有满足条件

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \equiv 1 \pmod 2, x + y = m$$

的整数 x, y 都有 $xa + yb \in S$.

显然,由(1),因 $a, b \in S$,p_1 为真.假设 p_m 成立,考虑形如 $Xa + Yb$ 的整数,其中整数 X, Y 满足

$$X \geqslant 0, Y \geqslant 0, X + Y \equiv 1 \pmod 2, X + Y = m + 2$$

因为 $m+2 \geqslant 3$,X 和 Y 至少有一个大于等于 2.把 $Xa + Yb$ 写成形式

$$\begin{cases}((X-2)a + Yb) + a + a, X \geqslant 2 \\ (Xa + (Y-2)b) + b + b, Y \geqslant 2\end{cases}$$

由归纳假设及条件(2)知 $Xa + Yb \in S$,所以 p_{m+2} 成立.因而根据数学归纳原理,p_m 对所有奇自然数 m 都成立.

70. 求证:每个整数都可表示为 $x^2 + y^2 - 5z^2$ 的形式,其中 x, y, z 为整数.

证明(L. Smith) 如果 m 是偶数,即 $m = 2n$,则

$$m = (n-2)^2 + (2n-1)^2 - 5(n-1)^2$$

而当 m 是奇数,即 $m = 2n+1$ 时,有

$$m = (n+1)^2 + (2n)^2 - 5n^2$$

71. 求无穷级数

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \cdots$$

的和.

解 对于 $x > 1$,我们有

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant x - [x] - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

故对任何 $a \geqslant 1$ 都有

$$\int_1^a \left|\frac{(\ln x - 1)}{x^2}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\right| dx < \int_1^a \frac{(2\sqrt{x} + 1)}{x^2} \frac{1}{2} dx <$$

$$\frac{3}{2}\int_1^a \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{3}{2}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{a}}\right) < 3$$

所以积分

$$I = \int_1^\infty \frac{(\ln x - 1)}{x^2}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx$$

是绝对收敛的.

现在,Euler - Maclaurin 求和公式的一种形式断言:如果 $f(x)$ 在 $[1,n]$ 上连续可导,其中 $n>1$ 为正整数,则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}(f(n)+f(1))+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n f'(x)\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

取 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{\ln n}{2n}+\frac{\ln^2 n}{2}+\int_1^n\frac{(1-\ln x)}{x^2}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

记

$$E(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln^2 n}{2}$$

并令 $n\to\infty$,易知 $\lim\limits_{n\to\infty}E(n)$ 存在且其极限为 $-I$.于是

$$\lim_{n\to\infty}(E(2n)-E(n))$$

存在且极限值为 0.其次我们有

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{2n}(-1)^r\frac{\ln r}{r}&=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\cdots+\ln 2n/2n=\\&\left(\frac{\ln 2}{1}+\frac{\ln 4}{2}+\cdots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)-\\&\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)=\\&\frac{(\ln 2+\ln 1)}{1}+\frac{(\ln 2+\ln 2)}{2}+\cdots+\\&\frac{(\ln 2+\ln n)}{1}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\\&\ln 2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\\&\ln 2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+(E(n)+\frac{\ln^2 n}{2})-\\&(E(2n)+\frac{\ln^2 2n}{2})=\\&\ln 2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)-\frac{\ln^2 2}{2}+\\&(E(n)-E(2n))\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 并记住

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)=\gamma$$

这里 $\gamma\approx 0.577\ 21$ 为欧拉常数,则得

$$\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\frac{\ln r}{r}=\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2$$

72. 确定常数 a,b,c 使得对任何 $n=1,2,\cdots$ 都成立着

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$

解 对于 $k=0,1,\cdots$,我们有

$$(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^3=(k+1)\sqrt{k+1}-$$
$$3(k+1)\sqrt{k}+3k\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}=$$
$$(4k+1)\sqrt{k+1}-(4k+3)\sqrt{k}=$$
$$\sqrt{(4k+1)^2(k+1)}-\sqrt{(4k+3)^2k}=$$
$$\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}$$

所以 $$\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}=$$
$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n}$$

因此可取 $a=16,b=24,c=9$.

73. 设 n 为正整数,a,b 为整数使得

$$\gcd(a,b,n)=1$$

求证:存在整数 a_1,b_1 使得

$$a_1\equiv a\pmod n,b_1\equiv b\pmod n,\gcd(a_1,b_1)=1$$

证明 任意选取非零整数 a_1 使得

$$a_1\equiv a\pmod n \qquad ①$$

然后令 $$b_1=b+rn$$

这里 r 是 a_1 的不能整除 b 或者 n 的素因子之乘积.显然

$$b_1\equiv b\pmod n$$

现在来证明 $$\gcd(a_1,b_1)=1$$

假设 $\gcd(a_1,b_1)>1$,则存在整除 a_1 和 b_1 的素数 q,分别考察下列三情形:

i q 整除 b;

ii q 不整除 b 但整除 n;

iii q 既不整除 b 也不整除 n.

i 由于 $q \mid b, q \mid b_1, b_1 - b = rn$,故 $q \mid rn$.由 ① 有

$$\gcd(a_1, b_1, n) = \gcd(a, b, n) = 1$$

因为 $q \mid a_1, q \mid b$,故 q 不整除 n,从而 $q \mid r$,此与 r 的定义相矛盾.

ii 此情形不出现.这是由于 $b_1 = b + rn$,q 整除 b_1 和 n 而不整除 b.

iii 由于 $q \mid a_1$ 但不整除 b 或 n,故 $q \mid r$,又因 $q \mid b_1, q \mid r$ 而 $b_1 = b + rn$,故必有 $q \mid b$,这不可能.

到此本题证完.

74. 对于 $n = 1,2,\cdots$,记 $s(n)$ 为 2^n 的各位数字之和,例如,因 $2^8 = 256$,故有 $s(8) = 2 + 5 + 6 = 13$.求出所有正整数 n 使得

$$s(n) = s(n+1) \qquad ①$$

解 记

$$2^n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 为整数,满足条件

$$1 \leqslant a_m \leqslant 9; 0 \leqslant a_k \leqslant 9, 0 \leqslant k \leqslant m - 1$$

于是 $\quad 2^n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv s(n) \pmod 3$

且有 $\quad s(n+1) \equiv 2^{n+1} \equiv 2 \cdot 2^n \equiv 2s(n) \pmod 3$

因此,如果有 $s(n+1) = s(n)$,则必有

$$s(n) \equiv 0 \pmod 3, 2^n \equiv 0 \pmod 3$$

而这是不可能的.所以不存在满足 ① 的正整数.

75. 求无穷级数的和

$$S = \sum_{\substack{m,n=1 \\ \gcd(m,n)=1}} \frac{1}{mn(m+n)}$$

解

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_0^1 x^{m+n-1} dx =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u}}{(1 - e^{-u})} du \, (x = 1 - e^{-u}) =$$

$$\int_0^{\infty} u^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^2 e^{-nu} du =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

另一方面

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+n)}=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\ \gcd(m,n)=d}}^{\infty}\frac{1}{mn(m+n)}=$$

$$\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{q,r=1\\ \gcd(q,r)=1}}^{\infty}\frac{1}{d^3qr(q+r)}=$$

$$\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^3}\right)\sum_{\substack{q,r=1\\ \gcd(q,r)=1}}\frac{1}{qr(q+r)}=$$

$$S\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^3}\right)$$

所以 $S=2$.

76. 一个越野赛跑运动员用 50 分钟跑完 10 英里(1 英里 = 1.609 千米)赛程.求证:在赛跑过程中的某一段该运动员恰好用 10 分钟跑了 2 英里.

证明 对于 $0\leqslant x\leqslant 8$,用 $T(x)$ 表示该运动员在赛跑过程中从 x 跑到 $x+2$ 英里所用的时间.函数 $T(x)$ 在 $[0,8]$ 上是连续的,且有性质

$$T(0)+T(2)+T(4)\cdots+T(6)+T(8)=50 \qquad ①$$

方程①说明 $T(0),T(2),T(4),T(6)$ 和 $T(8)$ 不能都大于 10,也不能都小于 10,因此存在 r 和 s,$0\leqslant r,s\leqslant 8$,使得

$$T(r)\leqslant 10\leqslant T(s)$$

于是根据介值定理,存在位于 r 和 s 之间的值使得 $T(y)=10$.证毕.

77. 设 AB 是一线段,其中点为 O,R 是 AB 上位于 A,O 之间的一点,在 AB 的同一侧作三个半圆如下:S_1 是以 O 为中心以 $|OA|=|OB|$ 为半径的半圆;S_2 是以 R 为中心 $|AR|$ 为半径的半圆并交 RB 于点 C;S_3 是以 S(CB 的中点)为中心 $|CS|=|SB|$ 为半径的半圆.S_2 与 S_3 的公切线分别切 S_2 于点 P,切 S_3 于点 Q,由 C 引出的 AB 之垂线交 S_1 于点 D,求证:$PCQD$ 是一矩形.

证明 我们用解析几何的方法证之,选取坐标系使得

$$A(-1,0),O=(0,0),B=(1,0)$$

于是有 $R=(-a,0)$,$0<a<1$,从而

$$C=(1-2a,0),S=(1-a,0)$$

三个半圆的方程分别为

$$S_1: x^2 + y^2 = 1$$
$$S_2: (x + a)^2 + y^2 = (1 - a)^2$$
$$S_3: (x + a - 1)^2 + y^2 = a^2$$

过点 C 引 AB 的垂线交 S_1 于

$$D = (1 - 2a, 2\sqrt{a - a^2})$$

S_2 和 S_3 公切线的方程为

$$x(1 - 2a) + 2y\sqrt{a - a^2} = 1 - 2a + 2a^2$$

此直线在点

$$P = (2a^2 - 4a + 1, 2(1 - a)\sqrt{a - a^2})$$

与 s_2 相切，在点

$$Q = (1 - 2a^2, 2a\sqrt{a - a^2})$$

与 s_3 相切，PD 的斜率为

$$\frac{2a\sqrt{a - a^2}}{2a - 2a^2} = \sqrt{\frac{a}{1 - a}}$$

而 PC 的斜率是

$$\frac{2(1 - a)\sqrt{a - a^2}}{2a - 2a^2} = -\sqrt{\frac{1 - a}{a}}$$

这两个斜率的积为 -1，从而 PC 与 PD 垂直，即 $\angle CPD = 90°$. 同理有

$$\angle PDQ = \angle DQC = \angle QCP = 90°$$

所以 $PDQC$ 是矩形.

78. 设 $n \geqslant 2$，求 $n \times n$ 矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad ①$$

的逆.

解 令

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$S = U - I, U^2 = nU$$

对任何实数 C 都有

$$(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{I})(C\boldsymbol{U}-\boldsymbol{I}) = C\boldsymbol{U}^2-(C+1)\boldsymbol{U}+\boldsymbol{I} = (Cn-(C+1))\boldsymbol{U}+\boldsymbol{I}$$

因此,如果选取 $Cn-(C+1)=0$,即 $C=\frac{1}{n-1}$,则有

$$\boldsymbol{S}^{-1}=(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{n-1}\boldsymbol{U}-\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1}\end{bmatrix}$$

79. 求和式

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n(k\pi/n) \qquad ①$$

的值,这里 n 为正整数.

解 记 $\omega=\exp(\pi i/n)$,则

$$s(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{\omega^k+\omega^{-k}}{2}\right)^n$$

故由二项式定理可得

$$S(n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kn}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\omega^{k(n-2l)}=\frac{1}{2^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k(2n-2l)}=\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}n+\binom{n}{n}n\right)$$

即有

$$S(n)=n/2^{n-1}$$

80. 求 2×2 整数矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 使之满足

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^3+\boldsymbol{C}^3 \qquad ①$$

解 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

则
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
故
$$A^2 + 3A + 2I = 0$$
$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0$$
因此有
$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I = A + I$$
即
$$A = (A + I)^3 - I$$
所以可取
$$B = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

81. 举出两个非全等的相似三角形,它们的边长都是整数,且一个三角形的两条边分别与另一三角形的两条边长度相等.

解 设两三角形为 ABC 和 DEF,并设
$$|AB| = a, |AC| = b, |BC| = c$$
$$|DE| = b, |DF| = c, |EF| = d$$
且
$$a < b \qquad ①$$
由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,我们有
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$
故
$$c = b^2/a, d = b^3/a^2 \qquad ②$$
由 ① 有
$$1 < b/a \qquad ③$$
而由 ② 及不等式 $c < a + b$ 有
$$\frac{b^2}{a} < a + b$$
所以
$$\frac{b}{a} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad ④$$
为满足 ③ 和 ④,我们取 $b/a = 3/2$,并设 $a = 2t, b = 3t$,于是根据 ② 有
$$c = \frac{9t}{2}, d = 27t/4$$
为使 c 和 d 都是整数,取 $t = 4$,则
$$a = 8, b = 12, c = 18, d = 27$$
所以三条边分别是 8,12,18 和 12,18,27 的三角形就满足问题的要求.

82. 设 a,b,c 为三个实数,$a<b<c$.又设函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续,在 (a,b) 上可微且导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格增加.求证

$$(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b) \quad ①$$

解 由平均值定理,存在实数 u 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(u),a<u<b$$

又存在实数 v 使得

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(v),b<v<c$$

由于 $a<u<v<c$,而 f' 在 (a,c) 上严格增加,故

$$f'(u)<f'(v)$$

从而

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

重新排列这个不等式便给出 ①.

83. 设数列 $\{a_m \mid m=1,2,\cdots\}$ 满足 $a_m>a_{m+1}>0,m=1,2,\cdots$,且 $\sum_{m=1}^{\infty}a_n$ 收敛.求证:

$$\sum_{m=1}^{\infty}m(a_m-a_{m+1})$$

收敛并求出它的和.

解 对任 $\varepsilon>0$,由于 $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ 为收敛的正项级数,故存在正整数 $N(\varepsilon)$ 使得对所有 $m\geqslant N(\varepsilon)$ 都有

$$0<a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots<\frac{\varepsilon}{3} \quad ①$$

令 $n\geqslant 2N(\varepsilon)+1$.如果 n 为偶数,设 $n=2k,k>N(\varepsilon)$,由 ① 有

$$ka_{2k}<a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}<\varepsilon/3$$

故

$$na_n=2ka_{2k}<2\varepsilon/3<\varepsilon$$

如果 n 是奇数,设 $n=2k+1,k\geqslant N(\varepsilon)$,由 ① 有

$$ka_{2k+1}<a_{k+2}+a_{k+3}+\cdots+a_{2k+1}<\varepsilon/3$$

故也有

$$na_n=2ka_{2k+1}+a_{2k+1}<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

到此我们已证明了对所有 $n\geqslant 2N(\varepsilon)+1$,都有

$$0<na_n<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0$$

其次令 $S(n)=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1}),n=1,2,\cdots$

则有
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)a_k=\sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))a_k-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}na_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)a_{n+1}-a_{n+1})=0-0=0$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}S(n)$ 存在且等于 $\sum_{k=1}^{n}a_k$,所以级数 $\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$ 收敛且其和为 $\sum_{k=1}^{n}a_k$.

84. 设 D 为大于5的非平方奇整数,$\sqrt{D}$ 的连分数的周期长度为1. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{D})$ 的连分数的周期长度是多少?

解 $\sqrt{D}$ 的连分数具有形式
$$\sqrt{D}=[a;\overline{b}]$$
其中 a,b 都是正整数.
$$\sqrt{D}-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cdots}}}=\frac{1}{b+\sqrt{D}-a}$$
此给出
$$\sqrt{D}=\frac{D+a^2-ab-1}{2a-b}$$
因 D 不是平方,$\sqrt{D}$ 是无理数,故必有
$$b=2a,D=a^2+1$$
此外,由于 D 是大于5的奇数,故 $a=2c,c\geqslant 2$,而 $D=4c^2+1$. 容易验证
$$\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right]=c$$
$$\left[\frac{1}{(\frac{1+\sqrt{D}}{2}-c)}\right]=\left[\frac{2c-1+\sqrt{D}}{2c}\right]=1$$
$$\left[\frac{1}{\left(\frac{2c-1+\sqrt{D}}{2c}\right)}\right]=\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2c}\right]=1$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2c}\right)-1}\right]=\left[\frac{2c-1+\sqrt{D}}{2}\right]=2c-1$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{2c-1+\sqrt{D}}{2}\right)-(2c-1)}\right]=\left[\frac{2c-1+\sqrt{D}}{2c}\right]=1$$

所以$\frac{1}{2}(1+\sqrt{D})$的连分数是

$$[c_j\overline{1,1,2c-1}]$$

由于$2c-1\geqslant 3$,即它的周期长度为3.

85. 设 G 是具有下列两性质的群:

(1) G 不含有2阶元;

(2) 对所有 $x,y\in G$ 都有 $(xy)^2=(yx)^2$.

求证:G 是阿贝尔群.

解 对于 $x,y\in G$,有

$$x^2y=((xy^{-1})y)^2y=(y(xy^{-1}))^2y=\quad(\text{由}(2))$$
$$(yxy^{-1})(yxy^{-1})y$$

即

$$x^2y=yx^2 \qquad ①$$

其次因为

$$x^{-1}y^{-1}x=x(x^{-1})^2y^{-1}x=xy^{-1}(x^{-1})^2x\quad(\text{由}①)$$

故有

$$x^{-1}y^{-1}x=xy^{-1}x^{-1} \qquad ②$$

类似可得

$$y^{-1}x^{-1}y=yx^{-1}y^{-1} \qquad ③$$

于是

$$(xyx^{-1}y^{-1})^2=xy(x^{-1}y^{-1}x)yx^{-1}y^{-1}=$$
$$xy(xy^{-1}x^{-1})yx^{-1}y^{-1}=\quad(\text{由}②)$$
$$xyx(y^{-1}x^{-1}y)x^{-1}y^{-1}=$$
$$xyx(yx^{-1}y^{-1})x^{-1}y^{-1}=\quad(\text{由}③)$$
$$(xy)^2(yx)^{-2}=(yx)^2(yx)^{-2}=1\quad(\text{由}(2))$$

由于 G 没有2阶元,故

$$xyx^{-1}y^{-1}=1$$

所以 $xy=yx$,这就证明了 G 是阿贝尔群.

86. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $n \times n$ 实对称矩阵且对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$，满足

$$a_{ii} = 1, \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 2 \quad ①$$

求证：$0 \leqslant \det A \leqslant 1$.

证明　设 λ 为 A 的一个特征值，$\underline{x}(\neq 0)$ 为 A 的相应于 λ 的一个特征向量，则

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \quad ②$$

记 $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)^t$ 并选取 $i, 1 \leqslant i \leqslant n$，使得

$$| x_i | = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | x_j | \neq 0$$

由 ② 的第 i 行得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

即

$$(\lambda - 1) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j$$

于是

$$| \lambda - 1 | | x_i | = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | | x_j | \leqslant | x_i | \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | \leqslant | x_i |$$

这表明

$$| \lambda - 1 | \leqslant 1 \quad ③$$

因 A 是实对称矩阵，λ 是实数且由 ③ 易知

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 2 \quad ④$$

令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，由 ④，每个 λ_i 都是非负的，从而有

$$0 \leqslant \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \leqslant \left(\frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\right)^n = \left(\frac{1}{n} \operatorname{trace} A\right)^n = \left(\frac{1}{n} n\right)^n = 1$$

87. 设 R 是有限环且含有一个不是零因子的元 r. 求证：R 必有乘法单位元.

解　因 R 是有限环，故存在整数 m, n 使得

$$r^m = r^n, 1 \leqslant m < n \quad ①$$

我们希望证明对某个整数 $k \geqslant 2$ 有

$$r = r^k \quad ②$$

如果 $m = 1$,可取 $k = n$,如果 $m \geqslant 2$,由 ① 有

$$r(r^{m-1} - r^{n-1}) = 0$$

由于 r 不是零因子,必有

$$r^{m-1} - r^{n-1} = 0 \quad ③$$

如果 $m = 2$,可取 $k = n - 1(\geqslant 2)$,如果 $m > 3$,由 ③ 得

$$r(r^{m-2} - r^{n-2}) = 0$$

再次由于 r 不是零因子,必有

$$r^{m-2} - r^{n-2} = 0$$

若 $m = 3$,可取 $k = n - 2(\geqslant 2)$.照此做下去,容易看出 ② 对 $k = n - m + 1(\geqslant 2)$ 成立.对任 $x \in R$,由 ② 可得

$$xr - xr^k$$

从而
$$(x - xr^{k-1})r = 0$$

因 r 不是零因子,故

$$x = xr^{k-1} \quad ④$$

类似也有

$$x = r^{k-1}x \quad ⑤$$

④ 和 ⑤ 表明 r^{k-1} 是 R 的乘法单位元.

88. 令 $J_n = \{1,2,\cdots,n\}$.对 J_n 的每个非空子集 S 定义

$$W(S) = \max_{s\in S} S - \min_{s\in S} S$$

对于 J_n 的所有非空子集 S,求 $W(S)$ 的平均值.

解 对于 $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$,令

$$S(k,l) = \{S \subseteq J_n \mid \min_{s\in S} S = k, \max_{s\in S} S = l\}$$

于是对所有的 $S \in S(k,l)$

$$W(S) = l - k$$

而

$$| S(k,l) | = \begin{cases} 1, k = l \\ 2^{l-k-1}, k < l \end{cases}$$

因此

$$\sum_{\varphi\neq s\subseteq J_n} W(S) = \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\sum_{s\in S(k,l)} W(S) =$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} (l - k) | S(k,l) | = \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} (l - k)2^{l-k-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k-1}\sum_{l=k+1}^{n} l2^l - \sum_{k=1}^{n-1} k2^{-k-1}\sum_{l=k+1}^{n} 2^l =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^{-k-1}((n-1)2^{n+1}-(k-1)2^{k+1})-$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}k2^{-k-1}(2^{n+1}-2^{k+1})=$$
$$(n-1)2^n\sum_{k=1}^{n-1}2^{-k}-\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)-2^n\sum_{k=1}^{n-1}k2^{-k}+\sum_{k=1}^{n-1}k=$$
$$(n-1)2^n\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-2^n\left(2-\frac{n+1}{2^{n-1}}\right)+n-1=$$
$$(n-1)2^n-2(n-1)-2^{n+1}+2(n+1)+n-1=$$
$$(n-3)2^n+(n+3)$$

故所求的平均值为

$$\frac{(n-3)2^n+(n+3)}{2^n-1},n=1,2,\cdots$$

89. 求证:帕斯卡(Pascal)三角形①每一行中奇二项系数的个数都是2的乘幂.

证明 帕斯卡三角形的第n行是$(1+x)^n$展开式中x之乘幂的系数.把n写为二进制形式,即

$$n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_k} \quad ①$$

其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$为整数,满足

$$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_k\geqslant 0 \quad ②$$

现在 $(1+x)^2=1+2x+x^2\equiv 1+x^2 \pmod 2$

$$(1+x)^4\equiv(1+x^2)^2\equiv 1+x^4 \pmod 2$$
$$(1+x)^8\equiv(1+x^4)^2\equiv 1+x^8 \pmod 2$$

所以对任何非负整数α,一般地有

$$(1+x)^{2^\alpha}\equiv 1+x^{2^\alpha} \pmod 2$$

于是

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=(1+x)^{(2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_k})}=\\&(1+x)^{2^{\alpha_1}}(1+x)^{2^{\alpha_2}}\cdots(1+x)^{2^{\alpha_k}}\equiv\\&(1+x^{2^{\alpha_1}})(1+x^{2^{\alpha_2}})\cdots(1+x^{2^{\alpha_k}})\pmod 2\equiv\\&1+(x^{2^{\alpha_1}}+x^{2^{\alpha_2}}+\cdots+x^{2^{\alpha_k}})+\\&(x^{(2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2})}+\cdots+x^{(2^{\alpha_{k-1}}+2^{\alpha_k})})+\cdots+\\&x^{(2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_k})}\pmod 2\end{aligned}$$

而奇系数的个数为

$$1+k+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k}=2^k$$

① 即杨辉三角形.——译者注

90. 从 $n \times n$ 阵列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

中选取 x_1,然后把 x_1 所在的行和列删去.再从如此得到的新阵列中选取数 x_2,并同前面一样把 x_2 所在的行和列删掉.这种选择继续做下去,直到只剩下一个数 x_n 以供选择为止.试求 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的值.

解 设 $x_i,1\leqslant i\leqslant n$,属于阵列的 r_i 行,s_i 列,则

$$x_i=(r_i-1)n+s_i,1\leqslant i\leqslant n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\sum_{i=1}^{n}r_i-n^2+\sum_{i=1}^{n}s_i$$

由于$\{r_1,\cdots,r_n\}$ 及$\{s_1,\cdots,s_n\}$ 都是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的置换,所以

$$\sum_{i=1}^{n}r_i=\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

于是得

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{n^2(n+1)}{2}-n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

91. 设某圆的圆周上有 p 个 X 点,q 个 O 点.出现两 X 相邻的次数为 a,两 O 相邻的次数为 b,用 p 和 q 表示 $a-b$.

解 用

$$N_{xx},N_{xo},N_{ox},N_{oo}$$

分别表示 XX,XO,OX,OO 出现的次数.显然

$$\begin{cases} N_{xx}=a \\ N_{oo}=b \\ N_{xo}+N_{xx}=p \\ N_{oo}+N_{ox}=q \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} a-b=N_{xx}-N_{oo}= \\ &(N_{xx}+N_{xo})-(N_{oo}+N_{ox})+(N_{ox}-N_{xo})= \\ &p-q+(N_{ox}-N_{xo}) \end{aligned}$$

最后我们证明 $N_{ox}=N_{xo}$,从而给出结论

$$a - b = p - q$$

为看出 $N_{ox} = N_{xo}$，按顺时针方向在圆周上作旅行，起点和终点为同一点，并考察这样一个函数 S：在起点 $S = 0$，然后，当我们沿圆周旅行，并从一个 X 或 O 通过下一个 X 或 O 时，S 的值作如下变化

$$S\text{ 的新值} = S\text{ 的旧值} + \varepsilon$$

其中

$$\begin{cases} 1,\text{从 } O \text{ 走到 } X \\ 0,\text{从 } X \text{ 走到 } X \text{ 或从 } O \text{ 走到 } O \\ -1,\text{从 } X \text{ 走到 } O \end{cases}$$

显然 S 在旅行终点的值为 $N_{ox} - N_{xo}$. 然而 S 在终点处的值必为 0，由于我们又回到了起点，这样就证明了 $N_{ox} = N_{xo}$.

92. 在三角形阵列

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 6\ 7\ 6\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 10\ 16\ 19\ 16\ 10\ 4\ 1 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{array}$$

中(除顶上的 1 以外) 每个元 x 都是三个元 a,b,c 的和 $a + b + c$，其中 a 是 x 上方紧靠 x 的元而 b,c 分别是 a 左右方紧靠 a 的元，缺元视作 0. 求证：第二行之后的每一行都有含有偶数.

解 取以 2 为模的同余，三角阵列的前八行为

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array} \qquad ①$$

① 中第四行的头四个元为 1101，正好与第八行的头四个元相同. 因此形如

$$\begin{array}{llll} & & & 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1 \\ & & 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0 & \\ & 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0 & & \\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0 & & & \end{array} \qquad ②$$

的图案在阵列的左边往下不断重复.由于②的每行至少含有一个0,所以从第四行开始,每一行都含有偶数.又由于第三行含有偶数,这就证明了本题的结论.

93. 由 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的序列满足

$$\begin{cases}x_1=0\\ |x_i|=|x_{i-1}+c|,2\leqslant i\leqslant n\end{cases} \quad ①$$

这里 c 是一个正实数.试求 $x_1,\cdots,x_n$ 之平均值的仅用 c 表出的下界.

解 令 x_{n+1} 为任一使得 $|x_{n+1}|=|x_n+c|$ 成立的实数,则有

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_i|^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_{i-1}+c|^2=$$
$$\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1}+c)^2=\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}^2+2c\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}+c^2n=$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2c\sum_{x=1}^{n}x_i+c^2n$$

故
$$0\leqslant x_{n+1}^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+c^2n$$

于是(由于 $c>0$)得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant-\frac{c}{2}$$

94. 求证:当 $n\geqslant4$ 时,多项式

$$f(x)=x^n+x^3+x^2+x+5 \quad ①$$

在 $\mathbf{Z}$ 上不可约.

证明 假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上可约,则存在着一整系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 使得

$$f(x)=g(x)h(x),\deg g\geqslant1,\deg h\geqslant1 \quad ②$$

于是有
$$5=f(0)=g(0)h(0)$$

且由于 $g(0),h(0)$ 是整数而5是素数,不失一般性,可设

$$g(0)=\pm1,h(0)=\pm5$$

令 $g(x)$ 在 C 上的因式分解为

$$g(x)=\prod_{j=1}^{r}(x-\beta_j)$$

则
$$1=|g(0)|=\prod_{j=1}^{r}|\beta_j|$$

故至少有一个 $|\beta_j|$ 不大于1,例如

$$|\beta_l| \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant r$$

因此 $$|f(\beta_l)| = |\beta_l^n + \beta_l^3 + \beta_l^2 + \beta_l + 5| \geqslant 5 - |\beta_l| - |\beta_l|^2 - |\beta_l| - |\beta_l|^n \geqslant 5 - 1 - 1 - 1 - 1 = 1$$

此与 $$f(\beta_l) = g(\beta_l)h(\beta_l) = oh(\beta_l) = 0$$

相矛盾.所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约.

95. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为 $n(n \geqslant 4)$ 个互不相同的实数.求出下面有 n 个未知元,$n-2$ 个方程的线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-3}x_1 + a_2^{n-3}x_2 + \cdots + a_n^{n-3}x_n = 0 \end{cases} \quad ①$$

解 令 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$.对于 $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $x^k/f(x)$ 的部分分式展开为

$$\frac{x^k}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k/f'(a_i)}{x - a_i} \quad ②$$

在 ② 两边乘上 $f(x)$ 并让 x^{n-1} 的系数相等可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{f'(a_i)} = \begin{cases} 0, k = 0, 1, \cdots, n-2 \\ 1, k = n-1 \end{cases} \quad ③$$

这表明 $$\underline{u} = \left(\frac{1}{f'(a_1)}, \cdots, \frac{1}{f'(a_n)}\right)$$

和 $$\underline{v} = \left(\frac{a_1}{f'(a_1)}, \cdots, \frac{a_n}{f'(a_n)}\right)$$

都是 ① 的两个解.这两个解是线性无关的,否则,存在不全为 0 的实数 s, t 使得

$$s\underline{u} + t\underline{v} = (0, 0, \cdots, 0)$$

即有

$$s + ta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n \quad ④$$

如果 $t = 0$,则由 ④,$s = 0$,矛盾.所以 $t \neq 0$

$$a_i = -\frac{s}{t}, i = 1, 2, \cdots, n$$

这与 a_i 各不相同的事实矛盾.因此解 $\underline{u}$ 和 $\underline{v}$ 是线性无关的.其次,因 a_i 各不相同,范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_{n-2}^{n-3} \end{vmatrix}$$

不为零,所以 ① 的系数矩阵的秩为 $n-2$.于是,① 的全部解可由它的任何两个线性无关的解的线性组合给出.因而 ① 的通解为

$$(x_1,\cdots,x_n)=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}=\left(\frac{\alpha+\beta a_1}{f'(a_1)},\cdots,\frac{\alpha+\beta a_n}{f'(a_n)}\right)$$

其中 α,β 为任意实数.

96. 求和式

$$S(N)=\sum_{\substack{1\leqslant m<n\leqslant N\\ m+n>N\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mn},N=2,3,\cdots$$

的值.

解 对于 $N\geqslant 3$,我们有

$$S(N)=\sum_{\substack{1\leqslant m<n\leqslant N-1\\ m+n>N\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mn}+\sum_{\substack{1\leqslant m<n=N\\ m+n>N\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mn}=$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant m<n\leqslant N-1\\ m+n>N-1\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mn}-\sum_{\substack{1\leqslant m<n\leqslant N-1\\ m+n=N\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mn}+\sum_{\substack{1\leqslant m<N\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{mN}=$$

$$S(N-1)-\sum_{\substack{1\leqslant m<N/2\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m(N-m)}+\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<N\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m}=$$

$$S(N-1)-\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<N/2\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m}-\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<N/2\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{N-m}+$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<N\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m}=$$

$$S(N-1)-\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<n\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m}+\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant m<N\\ \gcd(m,N)=1}}\frac{1}{m}=$$

$$S(N-1)$$

由于对偶数 $N(N\geqslant 4)$ 有 $\gcd(N/2,N)>1$.于是有

$$S(N)=S(N-1)=S(N-2)=\cdots=S(2)=\frac{1}{2}$$

97. 求极限值

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2} \quad ①$$

解 用分点 $\{(j/n, k/n) \mid 0 \leqslant j, k \leqslant n\}$ 把单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 分成 n^2 个小块，关于这个分割，函数 $\frac{x}{(x^2+y^2)}$ 的一个黎曼和为

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\frac{j/n}{(j/n)^2+(k/n)^2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\frac{j}{j^2+k^2}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\frac{j/n}{(j/n)^2+(k/n)^2}\frac{1}{n^2} = \iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 ① 成为

$$L = \int_0^1\int_0^1\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\sec\theta}\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sec\theta}\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} + [\ln\sin\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

即

$$L = \frac{\pi}{4} + \frac{(\ln 2)}{2}$$

98. 求证：

$$\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11} \quad ①$$

证明 为方便起见，记 $p = \frac{\pi}{11}$，并令

$$c = \cos p, s = \sin p$$

则

$$c + \mathrm{i}s = \mathrm{e}^{p\mathrm{i}}$$

从而

$$(c+\mathrm{i}s)^{11} = -1$$

即

$$c^{11} + 11c^{10}s\mathrm{i} - 55c^9s^2 - 165c^8s^3\mathrm{i} + 330c^7s^4 + 462c^6s^5\mathrm{i} - 462c^5s^6 - 330c^4s^7\mathrm{i} + 165c^3s^8 + 55c^2s^9\mathrm{i} - 11cs^{10} - s^{11}\mathrm{i} = -1$$

让上式两端虚部相等，得

$$11c^{10}s - 165c^8s^3 + 462c^6s^5 - 330c^4s^7 + 55c^2s^9 - s'' = 0 \quad ②$$

因 $s \neq 0$，故有

$$11c^{10}-165c^8s^2+462c^6s^4-330c^4s^6+$$
$$55c^2s^8-s^{10}=0 \quad ③$$

其次因

$$c^2=1-s^2 \quad ④$$

方程③化为

$$11-220s^2+1\ 232s^4+2\ 816s^6+2\ 816s^8-1\ 024s^{10}=0 \quad ⑤$$

从而有

$$(11s-44s^3+32s^5)^2-11c^2(1-4s^2)^2=$$
$$121s^2-968s^4+2\ 640s^6-2\ 816s^8+1\ 024s^{10}-$$
$$11(1-s^2)(1-8s^2+s^4)=$$
$$-11+220s^2-1\ 232s^4+2\ 816s^6-2\ 616s^8+$$
$$1\ 024s^{10}=0$$

这就证明了

$$\frac{11s-44s^3+32s^5}{c(1-4s^2)}=\pm\sqrt{11} \quad ⑥$$

又因为

$$\tan 3p+4\sin 2p=\frac{3\tan p-\tan^3 p}{1-3\tan^2 p}+8\sin p\cos p=$$
$$\frac{3sc^2-s^3}{c^3-3s^2c}+8sc$$

应用④,此即

$$\tan 3p+4\sin 2p=\frac{11s-44s^2+32s^5}{c(1-4s^2)} \quad ⑦$$

于是由⑥和⑦得

$$\tan 3p+4\sin 2p=\pm\sqrt{11}$$

因 $\tan 3p>0,\sin 2p>0$,我们必有 $\tan\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$ 证毕.

99. 对于 $n=1,2,\cdots$,令 $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.求和式

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n(n+1)}$$

的值.

解 设 k 为正整数,则有

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{c_n}{n}-\frac{c_n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{n}-\sum_{n=2}^{k+1}\frac{c_{n-1}}{n}=$$

$$c_1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{(c_n - c_{n-1})}{n} - \frac{c_k}{k+1} =$$
$$1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} - \frac{c_k}{k+1} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} - \frac{c_k}{k+1} =$$
$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} - \frac{(c_k - \ln k)}{k+1} - \frac{\ln k}{k+1}$$

令 $k \to \infty$,并利用事实

$$\lim_{k\to\infty}(c_k - \ln k)$$

存在且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k+1} = 0$$

得

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

100. 对于 $x > 1$,求无穷级数

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots$$

的和.

解 对于正整数 n,令

$$S_n(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \cdots + \frac{x^{2^n}}{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{2^n}+1)}$$

则
$$\frac{S_n(x)}{x-1} = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x^4-1} + \cdots + \frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} =$$
$$\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) + \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^4-1}\right) + \cdots +$$
$$\left(\frac{1}{x^{2^n}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right) =$$
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

于是,由于 $x > 1$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

从而

$$\frac{x}{(x+1)} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$$

题 源

[1] 高斯(Gauss)曾证明

$$w^{r_1}+w^{r_2}+\cdots+w^{r_{(p-1)/2}}=\left(-1+\mathrm{i}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}\right)/2$$

$$w^{n_1}+w^{n_2}+\cdots+w^{n_{(p-1)/2}}=\left(-1-\mathrm{i}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}\right)/2$$

参见 Werke, vol.2, Gottingen(1876), 11-45.

[4] 该结果隐含于高斯的工作,参见 Werke, vol.2, Gottingen(1876), 292.

[5] L.J.Mordell 曾处理更一般的方程 $y^2=x^3+((4b-1)^3-4a^2)$,这里 a 不含有 $\equiv 3 \pmod 4$ 的素因子.参见 L.J.Mordell, Diophantine Equations, Academic press(1969), 238-239.

[9] 该问题可由 The Green Book 的问题 97 启发而得.它也作为问题 E2115 出现于 American Mathematical Monthly 75 (1968). 897,而 G.V.McWilliams 在 American Mathematical Monthly 76(1969)828 中给出它的一个解.

[10] 这个问题属于美国南卡罗来纳大学(Univ. of South Carolina) Charles A.Nicol 教授.

[11] 这个问题的另一解法可在 Crux Mathematicorum 14(1988), 12-20 中找到.

[14] 对于更一般方程 $dV^2-2eVW-dW^2=1$ 的处理可参见 K.Hardy 和 K.S.Williams, On the solvability of the diophantine $dV^2-2eVW-dW^2=1$, Pacific Journal of Mathematics 124 (1986), 145-158.

[17] 这是下面熟知结果的推广:以任一大于等于 11 的素数为模,序列 $1,2,\cdots,10$ 都含有一对相邻的二次剩余.事实上,满足要求的数对可取为(1,2),(4,5)或(9,10).

[19] 此题基于 G.H.Hardy, Note on some points in the integral calculus, Messenger of Mathematics 48(1919), 107-112 中的定理 A.

[20] 本题解中所得恒等式可在 H.W.Gould, Combinatorial Identities, Morgantown, W.Va. (1982), 47 中找到.

[21] 对于更一般方程 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=k$ 的处理见 Hua Loo Keng(华罗庚), Introduction to Number Theory, Springer-Verlag(1982), 276,定理 2.1.

[22] W.L.Ferrar, Higher Algebra, Oxford University Press(1950) 第 15 章对这种类型的和进行了广泛的讨论.

[25] 见 W.Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Warsaw (1964), 113,问题 2.

[26] 该题由第 47 届 William Lowell Putnam 数学竞赛(1986.12)问题 A-3 启发而来.

[29] R.L.Goodsteln, The discriminant of a certain polynomial, Mathematical Gazette 53(1969), 60-61,用 $f(x)$的判别式给出了 $f(x^k)$, $k\geqslant 2$,的判别式.

[30] H.Steinhaus, Zadanie 498, Matematyka 10(1957), No.2, 58(波兰).

[34] 此是第七届 Carleton 大学数学竞赛(1979)B 部分的问题 3.

[37] 基于牛津大学 1975 年奖学金和入学考试数学试题中的一个问题.

[38] 基于牛津大学 1972 年奖学金和入学考试数学试题中的一个问题.

[39] 基于牛津大学 1973 年奖学金和入学考试数学试题中的一个问题.

[40] 基于牛津大学 1973 年奖学金和入学考试数学试题中的一个问题.

[41] 这是一个经典的结果,例如,参见 H.S.M.Coxeter and S.L.Greitzer, Geometry Revisited, Mathematical Association of America(1967),57,60.

[45] 受启发于 T.S.Chu,Angles with rational tangents, American Mathematical Monthly 57(1950), 407-408.

[47] 受启发于 W.Gross, P.Hilton, J.Pedersen, K.Y.Yap,An algorithm for multiplication in modular arithmetic,Mathematics Magazine 59(1986),167-170.

[48] 基于 Th.Skolem, Diophantische Gleichungen, Chelsea publishing Co., New York(1950),p.8 Satz 3.

[49] D.G.Mead, Integration, American Mathematical Monthly 68(1961),152-156,例 1.

[52] L.C.Larson, Problem – Solving Through Problems, Springer – Verlag(1985),5.4.5.

[53] Lewis Carroll's Pillow Problems,问题 48.

[56] W.Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Warsaw (1964),13,问题 1.

[59] W.Sierpinski,Elementary Theory of Numbers, Warsaw (1964),368,问题 12.

[62] 第 38 届 William Lowell Putnam 数学竞赛(1977.12)问题 A – 4.

[63] 该题从南卡罗来纳大学 David Richman 和 Michael Filaseta 教授那里获得.

[64] 此结果属于 H.J.S.Smith, On the value of a certain arithmetical determinant, proceedings of the London Mathematical Society 7(1876),208-212.

[68] 这是一个众所周知的问题,例如,参见 L.C.Larson, Problem – Solving Through Problems, Springer – Verlag(1983),例 4.4.4.

[69] 第 15 届 Carleton 大学数学竞赛(1987)问题 3.

[70] $ax^2+by^2+cz^2$ 何时能表示每一个整数已被 L.E.Dickson 所刻画,见 L.E.Dickson, The forms $ax^2+by^2+cz^2$ which represent all integers, Bulletin of the American Mathematical Society, 35(1929),55-59.

[75] 该问题源于 The Green Book 中问题 95.

[82] K.A.Bush, On an application of the mean value theorem, American Mathematical Monthly 62 (1955),557-578.

[86] 该问题源于 L,Mirsky,An Introduction to Linear Algebra, Oxford University Press(1972) §7.5,Estimates of characteristic roots,中观点的启发.

[89] 这是众所周知的问题.到多项式上的推广,见 H.D.Ruderman, Problem 1255,Mathmatics Magazine 61(1988),52-54.

[94] 源于 Michael Filaseta 教授 1987 年 10 月在 Carleton 大学所作报告中的一个例子.

[95] W.L.Ferrar, Higher Algebra, Oxford University Press (1950),219,问题 2.

[98] E.W.Hobson, A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry, Dover Pmblications, Inc. New york(1957).123 问题 29.

第三编

研究

刘培杰　著



第三輯

研究



(一)Mendeleev 问题

1 引　　言

于 1946 年 6 月 1 日举行的第 6 届普特南数学竞赛(美国大学生数学竞赛)有如下试题:

设 a,b,c 为实常数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 当 $|x|\leqslant 1$ 时满足条件 $|f(x)|\leqslant 1$. 试证:当 $|x|\leqslant 1$ 时

$$|f'(x)|\leqslant 4 \tag{①}$$

这是一道背景极为深刻的试题,参赛的大学生们恐怕没人会想到这道试题最早还是元素周期表的发明者前苏联彼得堡大学著名化学家 Mendeleev 提出并解决的.

大约一个世纪之前,Mendeleev 研究了溶液的体积质量与溶液的体积分数之间的关系问题.这个问题有一定的实用性,今天人们正是利用其来测量啤酒与葡萄酒中的酒精的体积分数和检查汽车冷却系统的防冻液的体积分数.首先 Mendeleev 对很多溶液作出了图表,它们非常精确以至于与现代得到的图表在三位有效数字内都相吻合.下一步当他准备用简单公式来描述它们时却发生了困难,因为他发现这些曲线没有多大相关之处.于是他想用一系列抛物弧把这些曲线配合起来,但这些弧并不是光滑地连接,Mendeleev 搞不清楚这些棱角究竟是客观存在的还是由测量的误差所产生的,于是他借助于数学推理:若有两个二次多项式 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$,$P_1(x)$ 定义在 I_1 上,$P_2(x)$ 定义在 I_2 上,I_1,I_2 为两个相邻的区间,如果已知 $P_1(x)$ 在 I_1 上的切线的斜率不超过某一个数 R,而 $P_2(x)$ 在 I_2 上的切线的斜率却严格地大于 R,这时我们就不能用一个二次多项式在 $I_1\cup I_2$ 上来代替 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$. 所以 Mendeleev 必须解决下面的问题:

若已知二次多项式 $P(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值,那么在 $[a,b]$ 上 $P'(x)$ 会有多大.

Mendeleev 不仅是一位了不起的化学家,而且他很有数学修养,他马上找到了答案:对二次多项式 $P(x)$,若在一长为 $2L$ 的区间上有 $\max\limits_{x\in[a,b]}|P(x)|=M$,则 $\max\limits_{x\in[a,b]}|P'(x)|\leqslant 4ML$,并且 4 是最好的常数,不能改进了.我们开始列出的试题只不过是当其 $L=1,M=1$ 时的特例.

2 A.A.Markoff 定理

后来 Mendeleev 把他这个颇为得意的结果告知了前苏联著名数学家 A.A.Markoff. 出于数学家的职业习惯,A.A.Markoff 马上将它作了推广,于 1887 年发表了题为《关于一个 Mendeleev 问题》(《Об олном воцросе. Д. И. Менлелеева》)的论文.他证明了:

如果 $P_n(x)$ 是 n 次多项式,而且 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|P_n(x)|$,则对于 $x\in[a,b]$,$|P'_n(x)|\leqslant\dfrac{2Mn^2}{b-a}$.

这个不等式也不能加强.事实上,对于 $P_n(x)=T_n(x)$,与 $a=-1,b=1$,我们有

$T'_n(x)=n^2, M=1$. 其中 $T_n(x)$ 为第 n 个 Tchebyscheff 多项式,它的定义为 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$. 显然 $|T_n(x)|\leqslant 1$, $T_n(x)$ 还有表达式为

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{l=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^l(n-l-1)!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}\quad ,n\geqslant 1$$

前 6 个 $T_n(x)$ 的表达式为

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x, T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

由于我们可以将 $P'_n(x)$ 再视为一个多项式,显然它的次数不超过 n. 所以我们可以用 Markoff 不等式估计 $P'_n(x)$,进而可以估计 $P_n(x)$ 的任意阶导数,但这样不能得到最强的结果. 三年后A. A. Markoff 的同父异母弟弟 W. A. Markoff 作了进一步推广得到

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant\frac{M2^{2k}k!\,n}{(b-a)^k(n+k)}\binom{n+k}{n-k}$$

可惜他这个才华出众的弟弟年仅 26 岁,就死于肺结核.

另外,在一些特殊的限制下还可以得到一些更好的上界. 例如:

Ⅰ. Schur 定理 若 $P(x)$ 是 n 次多项式,且 $P(a)=P(b)=0$, $\max\limits_{x\in[a,b]}|P(x)|=M$, 则

$$|P'(x)|\leqslant\frac{2n\cot\frac{\pi}{2n}}{b-a}M\quad ,a\leqslant x\leqslant b$$

P. Erdös 定理 若 $P(x)$ 是 n 次多项式,并且 $P(x)$ 只有实零点,但在 (a,b) 中没有零点, $\max\limits_{x\in[a,b]}|P(x)|=M$, 则

$$|P'(x)|<\frac{en}{b-a}M\quad ,a\leqslant x\leqslant b$$

这是目前最好的结果. 另外在复数域上人们也建立了类似的不等式.

1926 年 S. N. Bernstein 证明了:

设 $P(x)$ 是复数域上的多项式,对于 $|z|\leqslant 1$, $|P(z)|<1$, 则在 $|z|<1$ 时有 $|P'(z)|\leqslant n$.

而 P. D. Lax 在上述条件中加上一条"$P(z)$ 在 $|z|=1$ 内部无零点"的限制后,得到更强的结论 $|P'(x)|\leqslant\frac{n}{2}$.

现在让我们回头来看一下开始那道试题的证明:

若 $a\neq 0$, 则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图形为一抛物线. 不失一般性,可设其开口向上,即 $a>0$, 由于对称性,我们可以假定 b 非负,则抛物线的顶点位于左半平面,显然 $\max\limits_{x\leqslant 1}|f'(x)|$ 在 $x=1$ 时出现,而且这个最大值等于 $2a+b$. 下面证 $2a+b\leqslant 4$.

现在 $f(1)=a+b+c\leqslant 1$, $f(0)=c\geqslant -1$, 所以 $a+b\leqslant 2$. 因为 a 和 b 都非负,故有 $a\leqslant 2a+b\leqslant 4$.

若 $a=0$, 则

$$f'(x)=b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

所以

$$|f'(x)|\leqslant\frac{|f(1)|+|f(-1)|}{2}\leqslant 4$$

从以上证明中我们可以看到，式 ① 的等号碰巧只能在区间的端点 1 和 -1 达到. 对 Markoff 不等式也是如此. 那么能不能找到一个与 x 有关的函数 $M_n(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}|P'_n(x)|$，这个极大值是对于点 x，$|P_n(x)|\leqslant M$ 上所有次数为 n 的且在 $[a,b]$ 上满足 $|P_n(x)|\leqslant M$ 的多项式来取的. 我们对 $M_n(x)$ 了解甚少. 1912 年 Bernstein 得到了一个结果：

令 $P_n(x)$ 为次数最多为 n 的实系数多项式，则导函数 $P'_n(x)$ 满足不等式

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\max_{x\in[a,b]}|P_n(x)|$$

当 $a=-1,b=1,\max\limits_{x\in[a,b]}|P_n(x)|=1$ 时

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

即

$$M_n(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

这个函数当 x 接近 0 时比 4 要小，优于试题的结果；当 x 靠近区间端点 ±1 时又变得很大，大大弱于试题的结果.

1938 年 A.C.Schaeffer 和 R.J.Duffin 将 Bernstein 的结果作了一个推广：

设 $P(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，若对于 $-1\leqslant x\leqslant1$，$|P(x)|\leqslant1$，则对于 $-1\leqslant x\leqslant1$ 和 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$|P^{(k)}(x)|^2\leqslant M_k(x)$$

这里

$$M_k(x)=\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\cos nt\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\sin nt\right)^2$$

其中 $x=\cos t$. 显然 Bernstein 定理是上述结果 $k=1$ 时的特例.

3 E.V.Voronovskaya 定理

关于这个问题较彻底的解决是一位前苏联女数学家 E.V.Voronovskaya 完成的. 大约在 20 世纪 30 年代初，E.V.Voronovskaya 发表了一系列研究 Hausdorff 矩量问题的论文①. Voronovskaya 得到如下结果：

假设在 $[0,1]$ 区间上，已经给出了 $\max|P_n(x)|$，要求 $\max|P_n(x)|$，可将 $[0,1]$ 拆成一串相邻的三类区间. 在第一类区间中，极值多项式为 $\pm T_n(\lambda x)$ 或 $T_n[\lambda(1-x)]$；在另一类区

---

① 矩量问题(Hausdorff moment problem).

所谓矩量问题(Moment problem)，其一般提法是：

求赋范空间 X 上的一个连续线性泛函 f，使得由 X 中的线性无关序列 $\{x_n\}$ 及复数序列 $\{\mu_n\}$ 所确定的等式 $f(x_n)=\mu_n,n=1,2,\cdots$ 成立.

这类似于在给定一列自变量及相应函数值的前提下来确定函数的表达式. 不过，如此一般的问题处理起来十分困难.

Hausdorff 矩量问题是在上述一般的矩量问题中取 $X=C[0,1]$（即 $[0,1]$ 区间上的连续函数全体按标准方式形成的赋范空间），又取 $x_u(t)=t^n\in C[0,1],n=1,2,\cdots$. 根据 Riesz 表示定理，$C[0,1]$ 上的连续线性泛函可以表示成如下的 Lebesgue-Stieltjes 积分的形式

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}H(t)$$

其中 $x(t)\in C[0,1]=x$. $H(t)$ 为由泛函 f 确定的一个有界变差函数. 于是 Hausdorff 矩量问题可表述为：

求一有界变差函数 $H(t)$，使积分等式序列

$$\mu_{n_i}=\int_0^1 t^n\mathrm{d}H(t)\quad,n=1,2,\cdots$$

成立.

本文中所述 Voronovskaya 在处理这一问题时将其与多项式的极值问题联系起来. 可参见

Вороновская E.B(Voronovskaya K.V)(1932).ДАН СССР. сер. A, No4,74-85. (1932)The asymptatic behavior of the appoximation of a function by its Beinstein polynomial ДАН.СССР.(A)79-89.

间中，$|P'_n(x)|$ 由 $|T'_n(x)|$ 所极大化；而在剩下的一类区间中，极值多项式为鲜为人知的 Zolotarer 多项式.

数学家的职业习惯是将见到的一切结论尽可能地不断推广使其具有一般性.能够满足这种推广欲望的题目无疑是易于被接受的.所以一道好的竞赛题目不应是广场上的一枚金币，而应是金矿边的一块矿石.拾得金币的喜悦是暂时的，而挖掘金矿的兴奋则是持久的.

参考文献

[1] G Meinardus.函数逼近:理论与数值方法[M].赵根榕.赵冰，译.北京:高等教育出版社，1986.
[2] 嘉德克 B K.多项式一致逼近函数导论[M].沈燮昌，译.北京:北京大学出版社，1982.
[3] G G Lorentz.函数逼近论[M].谢庭藩，施咸亮，译.上海:上海科学技术出版社，1981.
[4] 沈燮昌.多项式最佳逼近的实现[M].上海:上海科学技术出版社，1981.

(二)Thue - Siegel - Roth 定理

1 引 言

学生:老师,上次我们讨论了一道关于第 29 届 IMO 试题的解法中点列 $\{x_n\}$ 在单位区间的分布问题.最近我又看到了一个解法,它是北京大学潘承彪教授给出的,开始时他利用了一个结论.

对任给的实二次无理数 α(即实数 α 不是有理数,且是某个二次整系数多项式的根),一定存在一个正常数 c(和 α 可以有关),使得对任意整数 $p \neq 0$ 及 q,必有

$$\left|\alpha - \frac{q}{p}\right| \geqslant \frac{c}{p^2} \qquad ①$$

然后取 $x_i = c^{-1}(\alpha i - [\alpha i]), i = 0,1,2,\cdots$,显然有 $0 \leqslant x_2 < c^{-1}$,所以 $\{x_i\}$ 是有界数列.若式 ① 成立,则有

$$|x_i - x_j| = c^{-1}|\alpha(i-j) - ([\alpha i] - [\alpha j])| \geqslant$$

$$|i - i|^{-1} \quad ,i \neq j$$

最后证明,当 $\alpha = \sqrt{2}, c = (2+\sqrt{2})^{-1}$ 时,对任意整数 $p \neq 0$ 及 q,式 ① 成立.这样 $\{x_i\}$ 就被具体化为

$$x_i = (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}i - [\sqrt{2}i]), i = 0,1,2,\cdots$$

我的问题是:式 ① 是一个著名的定理吗?否则为什么首先会想到它.

老师:你的猜测是对的,它可以视为是法国数学家 Joseph Liouville(1809—1882) 定理的一个推论,即当 α 的次数 $d = \alpha$ 时,存在常数 $c = c(\alpha) > 0$,使得对任何有理数 $\frac{p}{q}$,有

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > cq^{-2} \qquad ②$$

学生:对于 $\sqrt[3]{2}$ 有类似的结论吗?

老师:对于次数大于等于 3 的代数数(满足有理系数方程的根)并不满足 ②,甚至没发现一个,因此美国数学家 Serge Lang(1927—),在 1965 年猜测,对于次数不低于 3 的代数数 α,不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(\ln q)^k}$$

当 $k > 1$ 或 $k > k_0(\alpha)$ 时,只有有限多个解 $\frac{p}{q}$.但这个猜想目前还没有被证明.

学生:类似的问题在竞赛中曾多次出现,但有时并不以 ①,② 的形式直接出现,如第九届普特南数学竞赛(1949 年 3 月 26 日举行)的下午试题 B - 1.

注 S.Lang(1927 年 5 月 19 日生于巴黎)现任哥伦比亚大学教授,他是为数不多的 Bourbaki 学派的非法国成员之一.数论方面著作《Diophuntus 逼近论导引》和《代数数

论》(1976)影响很大.

试题A 开区间(0,1)的每一个有理数$\frac{p}{q}$(p,q是互素的正整数)由长度为$\frac{1}{2q^2}\sim\frac{p}{q}$的区间所覆盖.证明:$\frac{\sqrt{2}}{2}$不被上述的闭区间中的任何一个所覆盖.

老师:这个问题可改述为 Diophantus 逼近的形式.若 p 及 q 为整数,则

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2} \quad ③$$

是不能成立的.

你能证明这个转换后的命题吗?

学生:这并不难,只要分两种情况就可以.

i 设 p,q 是整数,$0<p<q$,则

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)<2$$

所以,若式③成立,则有

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}\right|\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}\Rightarrow$$
$$|q^2-2p^2|<1$$

注意到 q^2-2p^2 是整数,所以

$$q^2-2p^2=0\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

矛盾.

ii 对于整数 $p\geqslant q>0$ 时,$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|<\frac{1}{2q^2}$ 显然不成立.

2 Roth 定理与菲尔兹奖

学生:老师,据您以前的观点,一道好的竞赛题一般都具有深刻的背景,对现代数学的发展有着某种微型展示的作用,对此试题来说这种观点是否也成立呢?

老师:当然,从这一问题可以引导到一项获得菲尔兹奖的重要工作.英籍德国数学家 Klaus Friedrich Roth(1925—?)于1958年获菲尔兹奖的工作之一,即所谓 Thue - Siegel - Roth 定理的证明.

学生:您能不能介绍得通俗一点.

老师:可以.我们在初中时就知道,用一个有理数$\frac{p}{q}$去逼近一个无理数α,如果不加任何限制,那么这种逼近的精确度$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$可以无限地好(即$\varepsilon$可以无限地小,但$\varepsilon>0$).如果将$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon$中的$\varepsilon$与$q$联系起来,问题就难得多,并且有些具有重大意义的问题出现,若要求能有无穷多个有理数$\frac{p}{q}$满足$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{\mu}}$(其中$\mu$是常数),那么这个$\mu$应该满足什么条件?

我们用抽屉原理可证明,当 $\mu = 2$ 时确有无数多个 $\frac{p}{q}$ 可满足 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

当 μ 再大时,情况会怎样呢?从趋势看,由于 μ 越大,导致 $\frac{1}{q^\mu}$ 越小,因此能有无限多个有理数 $\frac{p}{q}$ 满足 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}$ 的可能性就越小.所以人们自然会猜想,μ 不应该无限大,应该有一个上界.于是人们把能有无数个 $\frac{p}{q}$ 满足 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}$ 的那些 μ 的上界记作 $\mu(\theta)$,于是产生了一个重大问题,即 $\mu(\theta)$ 是什么.这个问题很复杂,应当区分不同类型的无理数来研究.人们发现,一类无理数即代数数(有理系多项式方程之根),恰好具有最佳逼近 $\mu(\theta) = 2$,但这一结果的得到花费了人类足足一个世纪的时间.

(1)1849 年法国数学家 Liouville 证明了 $\mu(\theta) \leqslant d$(其中 d 为 α 的次数).

(2)1909 年挪威数学家 Thue 证明了 $\mu(\theta) > \frac{d}{2} + 1$.

(3)1921 年,数学家 L.Siegel 证明了 $\mu(\theta) > 2\sqrt{d}$.(这一定理使 L.Siegel 在数学界开始崭露头角,直到 1978 年他以 82 岁高龄荣获沃尔夫奖)

(4)1947 年 F.J.Dyson,次年苏联的 A.O.Гепьфонп 各自独立地证明了 $\mu(\theta) > \sqrt{2}d$.

(5)1955 年,Roth 在剑桥学派数论大师 Davenport 编的《数学》第二卷的头版上发表了一篇二十页的论文《对代数数的有理逼近》(《Rational Approximations to Algebraic Numbers》).具体地说 Roth 证明了:如果 α 是次数 $d \geqslant \alpha$ 的实代数数,则对任何 $\varepsilon > 0$,不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

只有有限多个解.

学生:这个定理是否像其他数论定理一样是"孤立"的?

老师:这个定理与其他定理有着许多联系,可以说是既重要又有用.因为它既可以改进著名的 Waring 问题的结论,又可以证明一些不定方程的解数有限.如我国著名数论专家柯召①就曾利用 Roth 定理证明了一个著名结果.设 p,q 是不同的奇素数,在 $q > 2(p-1)$ 或 $p > 2(q-1)$ 时,不定方程 $x^p - y^q = 1$ 只有有限组整数解 (x,y).

学生:这么有用的定理是不是会有许多推广?

老师:是的,数学家就愿意锦上添花.有很多数学家对 Roth 定理作出了各种各样的推广,其中最重要的一种是由 W.M.Schmidt 作邮的.

为了了解 W.M.Schmidt 的工作,我们介绍一个记号 $\|\theta\|$,

对任意实数 θ,$\|\theta\| = \min\limits_{z\in \mathbf{Z}} |\theta - z|$ 称为 θ 的差,即 θ 到距它最近的整数的距离.一般我们常用 $\|q\theta\|$ 来代替 $\left|\theta - \frac{p}{q}\right|$ 进行研究.

1970 年 W.M.Schmidt 得到如下定理:

定理 1 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_2$ 是实代数数,$1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\theta$ 线性无关,则对任何 $\varepsilon > 0$,不等式

$$\|q\alpha_1\| \cdots \|q\alpha_n\| q^{1+\varepsilon} < 1$$

只有有限多个整数解 $q > 0$.

① 柯召,中国著名数学家,1937 年获英国曼彻斯特大学博士学位,四川大学前任校长.

定理 2 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 如定理 1 所述,对任何 $\varepsilon > 0$,不等式

$$\| q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n \| \mid q_1 + \cdots + q_n \mid^{1+\varepsilon} < 1$$

只有有限多组解.

其实这两个定理是等价的,并且当 $n = 1$ 时都成为 Roth 定理.

学生:可不可以这样说,历史上著名的数论大家多多少少都有一些此方面的工作.

老师:可以这样说,因为 Diphantus 逼近论毕竟是数论的一个重要分支.

比如俄国著名数学家 Tschebyscheff 在 1866 年的论文《一个算术问题》中证明了存在无穷多对整数 x,y 满足不等式

$$\mid x - ay - b \mid < \frac{1}{2\mid y\mid}$$

法国著名数学家 Hermite Charles(1822—1901) 改进了 Tchebysheff 的上述结论:得到

$$\mid x - ay - b \mid \leqslant \sqrt{\frac{2}{27}}\frac{1}{\mid y\mid}$$

德国数学家 Minkowksi 在他的《丢番图逼近》(《Diophantische Approximationen》, Leipzig, 1907) 一书中进一步证明了存在无穷多对整数 x,y 满足不等式

$$\mid (\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x - \delta y - \eta_0) \mid < \frac{1}{4}$$

此外,ξ_0,η_0 为任意给定的数值,$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数.

3 几个重要无理数的逼近

学生:对于用有理数逼近无理数,我们常见$\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$等,对一些重要的无理数,结果怎样呢?如 π.

老师:π 作为单位圆的周长是一个常数,人们大约花了 2 500 年研究它的性质,但令人吃惊的是我们还是了解得如此之少.

我们知道的重要事实有:

1771 年 Lambert 证明了 π 是无理数.

1882 年 Lindemann 证明了 π 是超越数(不是任何有理系数多项式方程之根).

1953 年 Mulhler 证明了 π 不是 Liouville 数.所谓一个无理数 β 是 Liouville 数,即如果对于任一个 $n \in \mathbf{N}$,都存在整数 p 和 q 使得

$$0 < \left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Liouville 指出:“这些 β 都是超越数.”

关于 π 被有理数的逼近情况有如下结果:

(1)K. Mahler(1934,1935),对于任何整数 $q \geqslant 0$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \mid q \mid^{-42}$$

(2)K. Mahler(1953),对于 $\mid q \mid \geqslant q_0$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \mid q \mid^{-30}$$

(3)Wirsing,对于任何整数 $q \geqslant 2$

$$\left|\pi - \frac{r}{q}\right| > |q|^{-21}$$

(4)M.Mignotte(1976),对于 $|q| \geqslant q_1$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-20}$$

(5)D.V.Chudnorshy 和 G.V.Chudnorsky(1984),当 p,q 为整数,q 充分大时

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{14.65}}$$

当然这还不是最好的可能,合理的是 14.65 应被 $\alpha + \varepsilon$ 所代替,其中 ε 为大于 0 的任意数,几乎所有超越数都满足这样的不等式.

学生:老师,关于另一个重要常数 e 有什么结果?

老师:与 e^x 有关的一些数有如下有理逼近的结果.

(1)E.Borel(1899)

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c\ln\ln|q|}, c > 0$$

(2)J.Popken(1928)

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2}|q|^{-\frac{\lambda}{\ln\ln|q|}}\quad ,\lambda > 0$$

(3)K.Mahler(1932),对于有理数 $r \neq 0$ 和 $c = c(r) > 0$

$$\left|e^r - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2}|q|^{-\frac{c}{\ln\ln|q|}}$$

(4)C.V.Chudnovsky(1979),对于整数 p,q,我们有

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2}\frac{\ln\ln|q|}{\ln|q|}\quad ,|q| > q_0$$

对于有理数 $r = \frac{1}{n}, n \geqslant 1$,我们有

$$\left|e^{\frac{1}{n}} - \frac{p}{q}\right| > c_1(n)|q|^{-2}\frac{\ln\ln|q|}{\ln|q|}$$

学生:有许多无理数都是 $\ln\alpha$(α 是代数数且 $\alpha \neq 0$)型,对于这类数有什么逼近结果?

老师:有以下几个结果.

(1)J.Popken 证明了对于代数数 $\alpha \neq 0,1$ 以及 $c_2 = c_2(\alpha) > 0$ 有

$$\left|\ln\alpha - \frac{p}{q}\right| > e^{-c_2|q|}$$

(2)K.Mahler(1934)证明了

$$\left|\ln\alpha - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_3(\alpha)}\quad ,\alpha \neq 0,1$$

其中,$c_3(\alpha)$ 不仅依赖于 α 的次数,而且还依赖于高度,例如

$$\left|\ln r - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_4\ln H(\alpha)}\quad ,r \in \mathbf{Q}, r \neq 1$$

且 $c_4 \leqslant 70$.

(3)Baker 对于 $c_3 > 0$ 有

$$\left|\ln \alpha - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_3 d^2 \ln H(\alpha)}$$

其中,$d = d(\alpha)$ 是 α 的次数,$\ln H(\alpha)$ 是 α 的高度.

另外人们还研究了所谓的二重对数 $L_2(x)$ 也得到类似的结果.

如果 n 是整数,$n \geqslant n_0(\varepsilon)$,$\varepsilon > 0$,则

$$\left|L_2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-1+\varepsilon}$$

对于任意 k 重对数,也有同样类型的结果.

如果 $\varepsilon > 0$,n 是一个整数,$n \geqslant c(k,\varepsilon)$,$k \geqslant 1$,则

$$\left|L_k\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-(k+1)(1+\varepsilon)}$$

4 推广到复数域后

学生:法国著名数学家 Jacques Hadamard(1865—1963) 曾说过,两个实域真理之间的最短路径是通过复域.但不等式这类问题却不是都能过渡到复域的,因为虚数无法比较大小,我们所讨论的这类逼近问题也可推广到复数域中吗?

老师:可以,但那时已不再是绝对值而是复数的模.其实从更高的观点看,它们都是统一的.

学生:怎样定义复有理数和复无理数呢?

老师:这要从复整数开始,Gauss 曾最先研究过复整数.记 $Z(\mathrm{i}) = \{a + b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{Z}\}$,通常把数 $a + b\mathrm{i}$ 叫做复整数,一个复数如果能表成二个复整数的商,就称此复数为复有理数.全体复有理数可记为

$$Q(\mathrm{i}) = \left\{\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}, a+b\mathrm{i} \in Z(\mathrm{i}), c+d\mathrm{i} \in Z[\mathrm{i}], c+d\mathrm{i} \neq 0\right\}$$

不是复有理数的复数,叫做复无理数.

$Q(\mathrm{i})$ 也可表示成 $Q(\mathrm{i}) = \{a + b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$.有下述比较容易证明的结论.

定理 3 任给一个复无理数,都至少存在一个复有理数 $\frac{u}{v}$,$(u,v) = 1$,使得下式成立,即

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{\alpha}{|v|^2}$$

学生:怎样证明呢?

老师:这要用到抽屉原则,考虑由 $(n+1)^2$ 个复整数组成的集合

$$I = \{v = a + b\mathrm{i} \mid 0 \leqslant a \leqslant n, 0 \leqslant b \leqslant n\}$$

由于 $\alpha \notin Q(\mathrm{i})$,故不存在 $\beta_1,\beta_2 \in I$,$\beta_1 = \beta_2$.

我们将复平面上的边长为 1 的正方形 I_1(其四个顶点在 $0,1,1+\mathrm{i},\mathrm{i}$ 处) 划分为边长为 $\frac{1}{n}$ 的 n^2 个子正方形,那么 I_1 中 $(n+1)^2$ 个复数所表示的点均包含在上述边长为 1 的正方形中.由抽屉原则,至少存在 $\gamma_1,\gamma_2 \in I$,在某一个小正方形中,且不能同时在对角顶点上,即有 $\alpha v_1 - u_1, \alpha v_2 - u_2 \in I_1$,满足

$$|(av_1-u_1)-(av_2-u_2)|<\frac{\sqrt{2}}{n} \quad ①$$

设 $v_1=a_1+b_1\mathrm{i}, v_2=a_2+b_2\mathrm{i}, v_1\neq v_2$，故

$$|v_1-v_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}\leqslant n\sqrt{2}$$

故由 ① 得

$$\left|\alpha-\frac{u_1-u_2}{v_1-v_2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{n|v_1-v_2|}\leqslant\frac{2}{|v_1-v_2|^2} \quad ②$$

设 $v=v_1-v_2, u=u_1-u_2$，代入 ② 中定理得证.

其实，再稍加推导，便可证出实际这样的复有理数有无限多个.

Ford 于 1925 年加强了上述结果，得到如下定理.

定理 4　任给一个复无理数 α，存在无限多个复有理数 $\frac{u}{v}$，$(u,v)=1$，使得下式成立，即

$$\left|\alpha-\frac{u}{v}\right|>\frac{1}{\sqrt{3}|v|^2}$$

这样这里的 $\sqrt{3}$ 已不能改进了.

另外，对于复整数，还可将上述定理 4 推广到两个变数的情形，有如下结论.

任给 $\epsilon>0$，复数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$，且 $\Delta=|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|$，则存在无限多对复整数 h,k 满足

$$|\alpha_1k+\beta_1h||\alpha_2k+\beta_2h|<\frac{\Delta}{\sqrt{3}}+\epsilon$$

5　分形几何学的逼近问题

学生：有人说数论是一门零散的结果组成的分支，它与其他数学分支的联系不大，是这样吗？

老师：完全不是. 数论特别是代数数论早已进入现代数学的主流，与许多分支的概念与方法产生了千丝万缕的联系. 1995 年英国数学家 Andrew Wiles 证明了困扰国际数学界长达 350 年的费马大定理，应用了几乎所有的现代数论主流方法和结果. 不仅如此，现在不同分支产生交叉和渗透的速度越来越快，许多新产生的分支很快就与最古老的分支数论建立了联系，如近年来由于对分形几何学的兴趣，Hausdorff 维数(Hausdorff dimension，简记为 dim)成为热门概念. 我们刚才谈论的逼近问题，就已经与它有了联系.

学生：这两个分支相去甚远，怎样联系呢？

老师：其实也挺自然，从形式上说，达到某一特定精度的有理数逼近的数集的 Hausdorff 维数不会太大. 1931 年捷克数学家卡尔洛大学教授 Jarnik Woitech(1897—1970) 证明了如下定理.

定理 5　取 $\alpha>0$ 和一个正数序列 $n_1,n_2,\cdots$，使得

$$n_{j+1}\geqslant n_j^j \quad ①$$

这种数列称为急速递增序列.

(1) 设 F 是满足

$$\|n_jx\|\leqslant n_j^{-\alpha}\quad ,j=1,2,\cdots \quad ②$$

的实数 x 的集合,则 $\dim F = \frac{1}{1+\alpha}$.

(2) 设 E 是满足

$$\| n_j x \|, \| n_j y \| \leqslant n_j^{-\alpha} \quad, j = 1,2,\cdots$$

的点 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ 的集合,则 $\dim E = \frac{2}{1+\alpha}$.

这个定理的证明有相当的技巧,由 Jarnik(1931),Besicoritch (1934), Eggleston(1952),Kaufman(1971,1981) 给出.

6 与逼近有关的竞赛问题

学生:老师,我们刚才的讨论对我来说确实很有收获,但我们目前仍是应试教育占上风,所以解题与考试是学生最关心的问题,能否再介绍几个与逼近有关的竞赛问题.

老师:可以,首先介绍第 1 届(1987 年) 美国数学奥林匹克第 4 题.

试题 B 令 R 为非负有理数,试确定一组整数 a,b,c,d,e,f,使得对于 R 的每种选择,都有

$$\left| \frac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f} - \sqrt[3]{2} \right| < | R - \sqrt[3]{2} | \qquad ①$$

你能证明吗?

学生:试试吧!

令 R 通过一列非负有理数(例如$\sqrt[3]{2}$的不足近似值)趋近于$\sqrt[3]{2}$时 ① 右边趋向于零,故当 R 代入$\sqrt[3]{2}$ 时,右边应为 0,即应有

$$2^{\frac{2}{3}}a + 2^{\frac{1}{3}}b + c = 2d + 2^{\frac{2}{3}}e + 2^{\frac{1}{3}}f$$

取 $a = e, b = f, c = 2d$,则

$$\left| \frac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f} - \sqrt[3]{2} \right| = \left| \frac{aR^2 + bR + 2d}{dR^2 + aR + b} - \sqrt[3]{2} \right| =$$

$$\left| \frac{aR(R - \sqrt[3]{2}) + b(R - \sqrt[3]{2}) - d\sqrt[3]{2}(R^2 - (\sqrt[3]{2}))^2}{dR^2 + aR + b} \right| =$$

$$| R - \sqrt[3]{2} | \left| \frac{aR^2 + b - d\sqrt[3]{2}(R + \sqrt[3]{2})}{dR^2 + aR + b} \right|$$

在 $a > d\sqrt[3]{2}, b > d\sqrt[3]{4}$ 时

$$0 < \frac{aR + b - d\sqrt[3]{2}(R + \sqrt[3]{2})}{dR^2 + aR + b} < \frac{aR + b}{aR + b} = 1$$

所以取 $d = 1, a = b = c = e = f = 2$,则式 ① 成立.

老师:此题告诉我们,用结构复杂的有理数去逼近无理数要比结构简单的效果更好.再举一个例子,是罗马尼亚 1978 年数学奥林匹克试题.

试题 C 求证:如果 $m,n \in \mathbf{N}$,满足

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$$

则

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$$

你试证一下!

学生:只须证明,由 $n\sqrt{7}-m>0$ 可以推出 $n\sqrt{7}-m>\frac{1}{m}$,其中 $m,n\in\mathbf{N}$.

如果 $n\sqrt{7}-m=1$,则$\sqrt{7}=\frac{1+m}{n}\in\mathbf{Q}$,矛盾.可设 $0<n<\sqrt{7}-m<1$,注意到 $m^2\not\equiv 6,5\pmod 7$.事实上

$$(7k^2)\not\equiv 6,5\pmod 7$$
$$(7k\pm 1)^2\equiv 0\pmod 7$$
$$(7k\pm 1)^2\equiv 1\pmod 7$$
$$(7k\pm 2)^2\equiv 4\pmod 7$$
$$(7k\pm 3)^2\equiv 2\pmod 7$$

老师:在美国和加拿大流行一本为准备普特南数学竞赛而出版的《红皮书》(《THE RED BOOK》,1988)中有这样一题.

试题 D 设 ε 为一实数,$0<\varepsilon<1$.求证:存在无限多个整数 n,满足

$$\cos n\geqslant 1-\varepsilon \qquad ②$$

学生:这个问题似乎与逼近中的 A. Hurwitz 定理有关,由于 π 是无理数,故由胡氏定理知存在无限多个有理数$\frac{n}{k}$,$k>0$,$(n,k)=1$,使得

$$\left|\alpha\pi-\frac{n}{k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

可得

$$|2k\pi-n|<\frac{1}{\sqrt{5}k} \qquad ③$$

令 $0>\varepsilon<1$,考虑那些满足 ③ 且 $k>\frac{1}{\sqrt{5}\varepsilon}$ 的有理整数 n 和 k,显然有有限多个这样的正整数 k,且对每一个如此的 k 有一个整数 n 满足

$$|\alpha\pi k-n|<\varepsilon$$

对这样的整数对(n,k),有

$$|1-\cos n|\leqslant|1-\cos n|=$$
$$2\left|\sin\left(k\pi+\frac{n}{2}\right)\right|\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|=$$
$$2\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|k\pi-\frac{n}{2}\right|=|2k\pi-n|<\varepsilon$$

式 ② 对无限多整数 n 成立.

老师:其实对于某些竞赛题目,逼近只是其中的一个步骤,但往往是关键的步骤,如下面的普特南竞赛培训题.

试题 E 令 $p\equiv 1\pmod 4$ 为一素数,则存在唯一整数 w,使得 $w^2\equiv -1\pmod p$,$0<w<p/2$.求证:存在满足 $ad-bc=1$ 的整数 a,b,c,d,使得

$$pz^2+2wz\bar{y}+\frac{(w^2+1)}{p}\bar{y}^2\equiv(az+b\bar{y})^2+(cz+d\bar{y})^2$$

学生:我看不出要用到什么逼近的结果.

老师:解决这个问题要用到这样一个事实:如果 $r\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$,则存在 $\frac{h}{k}$ 满足

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|\leqslant\frac{1}{k(n+1)},1\leqslant k\leqslant n,(h,k)=1 \tag{4}$$

$r=-\frac{w(p)}{p},n=[\sqrt{p}]$,于是存在 $a,e\in\mathbf{Z}$,使得

$$\left|-\frac{w(p)}{p}-\frac{e}{a}\right|<\frac{1}{a\sqrt{p}}\quad,1\leqslant a<\sqrt{p} \tag{5}$$

$c=w(p)a+pe$,由 ② 有 $|c|<\sqrt{p}$,从而 $0<a^2+c^2<2p$,然而 $c\equiv wa(\text{mod }p)$,故有 $a^2+c^2\equiv a^2(1+w^2)\equiv 0(\text{mod }p)$.这表明

$$p=a^2+c^2 \tag{6}$$

因 p 是素数,由 ⑥ 知 $(a,c)=1$,因此由 Bozout 定理知可选取整数 s,t 使其满足

$$at-cs=1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(as+ct-w)(as+ct+w)&=(aw+ct)^2-w^2=\\&(a^2+c^2)(s^2+t^2)-(at-cs)^2-w^2=\\&p(s^2+t^2)-(1+w^2)\equiv 0(\text{mod }p)\end{aligned}$$

有

$$as+ct\equiv fw(\text{mod }p),f=\pm 1 \tag{8}$$

故存在 $g\in\mathbf{Z}$,使得

$$as+ct=fw+gp \tag{9}$$

令

$$b=s-ag,d=t-cg \tag{10}$$

则由 ⑥,⑦,⑧ 及 ⑩ 得

$$ab+cd=fw,ab-bc=1 \tag{11}$$

现在

$$\begin{aligned}p(a^2+b^2)&=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=\\&(ab+cd)^2+(ad-bc)^2=w^2+1\end{aligned}$$

所以

$$b^2+d^2=\frac{w^2+1}{p} \tag{12}$$

再由 ⑥,⑪ 及 ⑫,我们有

$$(az+b\bar{y})^2+(cz+d\bar{y})^2=pz^2+\alpha fwz\bar{y}+\frac{w^2+1}{p}\bar{y}^2 \tag{13}$$

如果 $f=1$,则 ⑬ 就是所要求证的恒等式;如果 $f=-1$,用 $-b,-c,-\bar{y}$ 分别代替 b,c,z,则也可得所要求的结果.

试题 F 设 f:设 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一实函数,它定义为:若 x 是无理数,则 $f(x)=0$;若 p,q 为整数,$q>0$ 且 $\frac{p}{q}$ 不可约,则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^2}$$

求证:f 在每一个无理点 $x_0=\sqrt{k}$(k 为自然数)处有导数.

(1979 年罗马尼亚数学竞赛决赛)

证明 我们证明在无理点$\sqrt{k}$处,$f(x)$以0为它的导数值.

显然,当x的值取无理数而趋近于$\sqrt{k}$时

$$\frac{f(x)-f(\sqrt{k})}{x-\sqrt{k}}=0$$

因此只要证明当x值取有理数$\frac{p}{q}$而趋近于$\sqrt{k}$时

$$\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\sqrt{k})}{\frac{p}{q}-\sqrt{k}}\to 0$$

即

$$\frac{1}{q^3\left(\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right)}\to 0 \qquad ⑭$$

易知对每个$Q>0$,在$\sqrt{k}$的邻域$(0,\sqrt{k}+1)$中只有有限多个分母小于等于Q的有理数$\frac{p}{q}$,因此,在$\sqrt{k}$的充分小的邻域中,一切有理数$\frac{p}{q}$的分母均大于Q.换句话说,当$\frac{p}{q}\to\sqrt{k}$时,$q\to+\infty$.

设$F(x)=x^2$,由拉格朗日中值定理,有

$$\left|F\left(\frac{p}{q}\right)-F(\sqrt{k})\right|=|F'(\xi)|\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right|$$

即

$$\left|\frac{p^2}{q^2}-k\right|=2\xi\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right| \qquad ⑮$$

其中$\frac{p}{q}<\xi<\sqrt{k}$或$\sqrt{k}<\xi<\frac{p}{q}$.由于$\frac{p}{q}\to\sqrt{k}$,故不妨设

$$0<\xi<\sqrt{k}+1 \qquad ⑯$$

由⑮,⑯用逼近的办法,得

$$q^3\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right|=\frac{q^3\left|\frac{p^2}{q^2}-k\right|}{2\xi}>\frac{q\,|p^2-kq^2|}{2(\sqrt{k}+1)}\geqslant\frac{q}{2(\sqrt{k}+1)} \qquad ⑰$$

(因为$\sqrt{k}$为无理数,所以$p^2-kq^2\neq 0$,从而$|p^2-kq^2|\geqslant 1$).由于$q\to+\infty$,故由③得⑭成立.

7 几个未解决的问题

学生:记得胡适先生曾对即将毕业的大学生寄语“应随身带几个未解决的问题供平时思考”,能否介绍几个未解决的问题供以后思考?

老师:关于 Diophantus 逼近有许多未解决的问题,下面介绍三个.

(1)对每个无理数α及每个$\varepsilon>0$,是否都存在无穷多个素数p,q,使得$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-2+\varepsilon}$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_n^{-2} (n \geqslant 1)$,记

$$G(n) = 2n + \left(\frac{1}{2}\right)\ln n - a_n^2, \lim_{n\to\infty} G(n) = c$$

猜想:i c 是超越数;

ii $\left|c - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{10n^2}$;

iii 任给 $\varepsilon > 0$,存在无穷多对素数 p, q 使得

$$\left|c - \frac{p}{q}\right| < q^{-2+\varepsilon}$$

(3)1891 年 A. Hurwitz 用连分数理论证明了:

对任一无理数 α,存在无限多个分数 $\frac{m}{n}$,使

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}$$

式中,系数 $\sqrt{5}$ 是最佳的.

由这个不等式可以看出,任一无理数 α,都存在无限多个有理数 $\frac{m}{n}$ 作为它的近似值,并且可以达到 $\frac{1}{n^2}$ 的精确度;反之,若存在 $\delta < 0$ 及有理数列 $r_n = \frac{p_n}{q_n}$,使

$$\left|\alpha - \frac{p^n}{q^n}\right| < q^{-1(1+\delta)}$$

则 α 必为无理数. 1978 年法国数学家 Apéry 由此证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为无理数,但是 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2k+1)}$ $(k \geqslant 2)$ 是否为无理数仍未解决.

另外,还可以做一些平移工作,将一些有关实数的结果平移到复数上去,如联立逼近不等式:对于任意 n 个实数 $a_1, \cdots, a_n$,都存在不同时为零的整数 $k_1, \cdots, k_n$ 及自然数 m,使得

$$\left|a_j - \frac{k_j}{m}\right| \leqslant \frac{n}{n+1} m^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad ,1 \leqslant j \leqslant n$$

平移到复数域中即为:

若 $\alpha_k = \beta_k + \mathrm{i}\gamma_k$ 是 n 个复数,则存在 $n + 1$ 个复数 $z_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 和 w,使得

$$\left|\alpha_k - \frac{z_k}{w}\right| \leqslant \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{|w|^{1+\frac{1}{n}}}$$

好,今天我们就谈到这里,祝你早日成才,为中国数学的发展作出贡献.

(三)函数唯一性理论

大家都知道拉格朗日多项式可以对 n 次多项式给定的 $n+1$ 个值,唯一地确定一个多项式.在数学中专门有一个分支叫函数唯一性理论,它是探讨在什么情况下只存在一个函数满足所给的条件.我们都知道,多项式除了一常数因子外,由其零点(亦即取零值的点集)而定,但对超越整函数以及亚纯函数就不然了.如函数 e^x 和 e^{-x},它们具有共同取值 $\pm 1,0$ 及 ∞ 的点集.因此,如何来唯一地确定一个亚纯函数的探讨也就显得有趣及复杂了.在这方面,芬兰著名数学家Nevanlinna,Rolf Herman(1892—1980)在1925年建立了亚纯函数的一个一般性理论,并在《皮卡 - 波莱尔定理与亚纯函数理论》(《Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Méromorphes》)及《单值解析函数》(《Eindeutige analytische Funkionen》,1935)两书中发展了这个理论(现称"奈望林纳理论"),给出了第一及第二基本定理,由此推出亚纯函数的值分布若干结果,影响深远.这一理论自然就成为研究唯一性理论的主要研究工具.很早Nevanlinna本人就证明了,任何一非常数亚纯函数可由其5个值的点集而确定.换句话说,如两非常数亚纯函数 f 与 g 具有共同的取5个值的点集,则 $f\equiv g$.很明显,如有了些附加条件,则两个函数相应地可由具有共同地取4个值、3个值、2个值甚至1个值的点集而定.

这一问题后来又被推广为具有公共值集的亚纯函数的唯一性问题.一般来说,这类问题难度较大.1976年数学家F.Gross曾问:能否找到一个有限集合 S,使得对任何两个非常数整函数 f 与 g,当 S 为 f 与 g 的公共值集时,必有 $f\equiv g$?

设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,S 为复平面中的一个集合.令

$$E_f(S)=\bigcup_{a\in S}\{z\mid f(z)-a=0\}$$

这里 m 重零点在 $E_f(S)$ 中重复 m 次,则称 E_f 为 f 下的 S 的原像集合.用 $\overline{E}_f$ 表示 $E_f(S)$ 中不同点的集合,并称 $\overline{E}_f(S)$ 为 f 下 S 的精简原像集合.

1982年,Gross-Yang引入了下述定义:

若点集 S 使得对任何两个非常数整函数 f 与 g 只要满足 $E_f(S)=E_g(S)$,则必有 $f\equiv g$,称点集 S 为唯一性像集.

对多项式函数而言,若 f 与 g 都是 n 次的,则若 $f\left(\frac{1}{i}\right)=g\left(\frac{1}{i}\right),i=1,2,\cdots,n$,则 $f\equiv g$,对于两个非常数整函数 f 与 g,则只须 i 走遍所有自然数即可.

1981年 Diamond, Pomerance 和 Rubel 证明了下述有趣结果:如果集合 $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$(不管次序),则 $f\equiv g$.

类似结论在多项式函数中一般是不存在的.

下面我们举一个普特南竞赛试题为例说明多项式函数的特点.

试题 设复系数多项式 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 有相同的零点集合,但零点的重数可能不同,且 $P(z)+1$ 与 $Q(z)+1$ 亦具有上述性质.试证:$P(z)\equiv Q(z)$.

(第16届(1956年3月3日)普特南竞赛B-7)

证明 命题对于零次多项式不成立，故应假定这两个多项式至少有一个不是常数．设 P 的次数为 m，Q 的次数为 n，由对称性可假定 $m \geqslant n$．令 P 的不同的零点是 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$，又令 $P+1$ 的不同的零点是 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s\}$．这两个集合显然不相交．求 P 及 $P+1$ 的导数都是 P'．将重数计 λ，它必定至少有 $(m-r)$ 个零点在 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ 内，而 $(m-s)$ 个零点在 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s\}$ 内，所以

$$(m+r)+(m-s) \leqslant m-1$$

不等号右边是 P' 的次数（这里假定 $m>0$），于是 $r+s>m$．但 $r+s$ 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ 中的每一数都是 $P-Q$ 的一个零点，而多项式 $P-Q$ 的次数至多为 m，这就推知 $P(z) \equiv Q(z)$．

这个问题 1981 年被推荐为 IMO 的候选试题，足见选题委员会对此题背景的充分认识．其叙述被改为：

设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的次数都大于 0，记

$$P_c = \{z \in \mathbf{C} \mid P(z) = c\}, Q_c = \{z \in \mathbf{C} \mid Q(z) = c\}$$

求证：如果 $P_0 = Q_0, P_1 = Q_1$，则 $P(x) \equiv Q(x), x \in \mathbf{R}$.

(四)不动点问题

1 组合不动点

在哈瓦那举行的第 28 届 IMO 中的第 1 题是:

试题 A 令 $P_n(k)$ 是集$\{1,2,\cdots,n\}$的保持 k 个不动的排列的数目.求证:

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$$

这是一个关于组合不动点的问题,我们先给出组合不动点的定义以及 3 个简单的性质,再用来解决几个与此有关的数学竞赛题.

定义 1 设集$\{\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)\}$是集$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列,如果 $\pi(i)=i$,则称 i 是变换 π 之下的一个组合不动点.我们用 $P_n(k)$ 表示其不动点的个数为 k 的排列的个数,$D_n(k)$ 表示其中有 k 个点动的排列个数.

性质 1 $P_n(k)=\binom{n}{k}D_n(n-k)$.

证明 恰有 k 个不动点的排列可以由以下两个步骤产生:先从 n 个元素中选出 k 个让它不动,即使 $\pi(i)=i,i=i_1,i_2,\cdots,i_k$;再让其余 $n-k$ 个全动,即使 $\pi(j)\neq j,j=j_1,\cdots,j_{n-k}$,则由乘法原理可知

$$P(k)=\binom{n}{k}D_n(n-k)$$

性质 2 $\sum_{k=0}^{n} nkD_n(n-k)=n!$.

证明 因为 n 个元素的全排列可分成恰有零个不动点的排列,恰有一个不动点的排列,$\cdots$,恰有 n 个不动点的排列,故由加法原理可知

$$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(n)=n!$$

由性质 1 可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_n(n-k)=n!$$

性质 3 $P_n(0)=D_n(n)=n!\sum_{k=0}^{n=1}(-1)^k\frac{1}{k!}$.

证明 我们先来介绍一个组合数学中非常重要的公式:

包含排除原理 设有 N 个事物,其中有些事物具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 中的某些性质.令 N_i 表示具有 P_i 性质的事物的个数,N_{ji} 表示兼有 P_j 及 P_i 性质的事物的个数,此处 $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant s)$.由此定义,$N_{ji}$ 及 N_{ij} 应代表同一数值,并且凡兼具 P_j,P_i 的事物也认为具有性质 P_j 或 P_i.一般地,设

$$N_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = \text{具有性质 } P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k} \text{ 的事物个数}$$

那么,N 中不具有任何性质的事物个数即等于

$$N_0 = N - \sum_i N_i + \sum_{i<j} N_{ij} - \sum_{i<j<k} N_{ijk} + \cdots +$$
$$(-1)^k \sum N_{i_1} N_{i_2} \cdots N_{i_k} + \cdots + (-1)^s N_{12\cdots s}$$

(此定理的证明可以在任何一本初等的组合数学书中找到)

注 1968 年 Bonferroni 还曾给出过一个不等式

$$\left| N(k) - \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} N_j \right| \leqslant \binom{n+1}{k} N_{n+1}$$

其中,$N(k)$ 为给定集 A 中这样元的个数,它恰具有性质 P 中的 k 个性质;N_j 为 A 中至少满足 P 中 j 个性质的元的个数.(详见 Fellew. An Introduction to Probability Theory. Vol 1. 3rd ed. John Wiley, 1968)

我们令 P_i 是 i 为一个不动点这个性质,则易知

$$N_{i_1 i_2 \cdots i_r} = (n-r)!$$

且

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} N_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \binom{n}{k}(n-r)! = \frac{n!}{r!}$$

则由包含排除原理得

$$P_n(0) = D_n(n) = n! \sum_{r=0}^{n=1} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

下面我们先证明前面提到的 IMO 试题:

证明

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} D_n(n-k) = \quad (\text{性质 } 1)$$
$$\sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} D_n(n-k) =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} D_n((n-1)-(k-1)) =$$
$$n\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} D_n((n-1)-(k-1)) =$$
$$n\sum_{k=0}^{n=1} \binom{n-1}{k-1} D_{n-1}((n-1)-(k-1)) = n\cdot(n-1)! = n!(\text{性质 } 2)$$

试题 B P 为集合 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列,令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列个数,g_n 为恰好有一个不动点的排列的个数.求证:

$$|f_n - g_n| = 1$$

(加拿大第 14 届中学生数学竞赛)

证明 由性质 3 得

$$f_n = n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

又由性质 1 得

$$g_n = \binom{n}{1} f_{n-1} = n \cdot (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!} = n! \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

故

$$|f_n - g_n| = \left| n! \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!} \right) \right| = \left| n! (-1)^n \frac{1}{n!} \right| = |(-1)^n| = 1$$

试题 C 设 n 阶行列式主对角线上的元素全为零,其余元素全不为零.求证:它的展开式中不为零的项数等于

$$n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

(第 19 届普特南数学竞赛)

证明 由定义知 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 的行列式的展开式为

$$\sum_{n} \varepsilon(\pi) m_{1j_1} \cdot m_{2j_2} \cdot \cdots \cdot m_{nj_n}$$

其中 $\pi\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 表示$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列,$\varepsilon(\pi)$ 为 $+1$ 或 -1.

由题意知,当且仅当 π 的排列中有不动点时,行列式展开式中对应项为零.于是本题化为求 π 的排列中没有不动点的排列的个数问题.

由性质 3 知其个数为

$$n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

(关于组合不动点问题可参见 L. Comtet, C. R. Acad. Sci. Paris, 1972, 275A:569-572)

在其中我们发现还有所谓强不动点的定义:π 为$[n] = \{1,2,\cdots,n\}$的排列,π 的强不动点是指 $j < i \Rightarrow \pi(j) < \pi(i)$ 以及 $j > i \Rightarrow \pi(j) > \pi(i)$(因此必定有 $\pi(i) = i$).

我们有以下结论:

定理 1 设 $g(n)$ 为没有强不动点的$[n]$的排列数,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n = F(x)/(1 + xF(x))$$

其中

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

(五)Beatty 定理与 Lambek – Moser 定理

1 引 言

受普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的普特南数学竞赛(the William Lowell Putnam Mathematical Competition),试题由名家组成的命题委员会制定,背景深刻,极富独创性,为国际数学界所瞩目.

在第 20 届普特南数学竞赛中有一道试题为:

试题 A 设正无理数 α 与 β 满足等式

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \quad ①$$

求证:两序列 $\{[n\alpha]\}$,$\{[n\beta]\}$ 合在一起恰好不重复地构成自然数集,记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

正如美国和加拿大数学奥林匹克的主教练 M.S.Klamkin 先生所指出的:数学竞赛试题的一种产生方法就是将某些不那么新的数学论文中的漂亮结果加以改造.而上面的题目正是用此法炮制的.1926 年加拿大多伦多大学的 Sam Beatty 发现了如下的 Beatty 定理:

定理 1(Beatty) 设 x 是任何一个正的无理数,y 是它的倒数,那么两个序列 $\{n(1+x)\}$,$\{n(1+y)\}$ 合起来,恰好包含了每对相邻正整数构成的区间 $(n,n+1)$ 中的一个数.

显然前面的题目是 Beatty 定理的一个推论,因为如果设 $\alpha=1+x$,$\beta=1+y$,则

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x}=1$$

2 题目的证明

1927 年由 A.Ostrowski 与 A.C.Aitken 给出了定理 1 的一个简洁的证明,仿此思路我们也给出前述竞赛题的一个证明.

证法 1 我们只须证:任何自然数 k,不在 $\{[n\alpha]\}$ 中出现一次,就在 $\{[n\beta]\}$ 中出现一次,二者必居其一.显然

$$[n\alpha]\in\mathbf{N},[n\beta]\in\mathbf{N},n=1,2,\cdots$$

定义

$$p=\max\{n\mid[n\alpha]\leqslant k\}$$

$$q=\max\{n\mid[n\beta]\leqslant k\}$$

即 p,q 是两序列 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中不超过 k 的正整数的个数.由式 ① 有 $\alpha>1,\beta>1$,所以

$$[p\alpha] \leqslant k \leqslant [(p+1)\alpha] \Rightarrow p\alpha < k+1 < (p+1)\alpha \Rightarrow$$
$$p < \frac{k+1}{\alpha} < p+1 \qquad ②$$

同理可得

$$q < \frac{k+1}{\beta} < q+1 \qquad ③$$

② + ③ 并注意到 ① 有

$$p+q < k+1 < p+q+2 \Rightarrow$$
$$p+q-1 < k < p+q+1 \Rightarrow$$
$$p+q = k$$

这即是说，在$\{[n\alpha]\}$和$\{[n\beta]\}$中，不超过k的正整数恰好共有k个. 但由k的任意性，可知其中不大于$k-1(k>1)$的正整数也恰好共有$k-1$个. 于是比较两者可知，在$\{[n\alpha]\}$和$\{[n\beta]\}$中大于$k-1$而不大于k的正整数有且仅有一个，它正好是k.

证法 2 我们只须证$\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$两序列满足：

(1) 严格单调递增；(2) 两序列的项不重复；(3) 两序列合起来后不漏掉任何一个自然数.

(1) 显然$\alpha > 1$，$\beta > 1$，所以

$$[(n+1)\alpha] = [n\alpha + \alpha] \geqslant [n\alpha] + [\alpha] \geqslant [n\alpha] + 1 > [n\alpha]$$

这说明$\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$均严格单调上升.

(2) 用反证法：假设存在$k, l \in \mathbf{N}$，使得$[k\alpha]$，$[l\beta]$表同一个自然数p，于是注意到α，β是无理数，可得$p < k\alpha < p+1$，$p < l\beta < p+1$，由此可得

$$\frac{k}{p+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{p}, \frac{1}{p+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{p}$$

两式相加，得

$$\frac{k+1}{p+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{p} \Rightarrow p < k+1 < p+1$$

后一不等式是不可能的，因为在两连续自然数p，$p+1$中不可能再夹一个自然数$k+1$.

(3) 亦用反证法：假设存在一个自然数q不在两序列中，则也会找到两个$k, l \in \mathbf{N}$，使得

$$k\alpha < q < q+1 < (k+1)\alpha$$
$$l\beta < q < q+1 < (l+1)\beta$$

由此可得

$$\frac{k}{q} + \frac{l}{q} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{q+1} + \frac{l+1}{q+1}$$

所以有

$$k+l < q < q+1 < k+l+2$$

这相当于在两间距为 2 的自然数$k+l$和$k+l+2$中夹有两个自然数q和$q+1$，而这是不可能的.

综合(1)，(2)，(3) 可知命题成立.

3 题目的加强

本节我们将 α,β 是无理数这一限制取消,而代之以任意不等于1的实数,也可得到和题目相同的结果.我们首先引入一个符号 $[x]^-$,其定义为:当 x 不是整数时为 $[x]$,当 x 是整数时为 $[x]-1$.我们有如下的定理:

定理2 若 $\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1$,则每一正整数在下列两序列 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 中恰好出现一次的充要条件是

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

证明 (1) 必要性:若 $k\in\mathbf{Z}^+$,则满足不等式

$$0<m\alpha<k+1,0<n\beta\leqslant k+1 \quad ①$$

的正整数 m 与 n 之和 M 为

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

而显见

$$\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}-2<M<\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta} \quad ②$$

若 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\theta$,则上式左、右两端的数分别为 $(k+1)\theta-2$ 和 $(k+1)\theta$.以下证 $\theta=1$.

i 若 $\theta<1$,则当 k 充分大时,$(k+1)\theta<k$,即 $M<k$.这表明在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 内不超过 k 的项不到 k 个,亦即在前 k 个正整数中至少有一个不在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 内,与题设矛盾.

ii 若 $\theta>1$,则当 k 充分大时,$(k+1)\theta-2=k+(\theta-1)k+\theta-2>k$,即 $M>k$,故在 $\{[m\alpha]\}$,$\{[n\beta]^-\}$ 的项中其值不超过 k 的项比 k 多.由此可见,在前 k 个正整数中至少有一个在 $\{[m\alpha]\}$,$\{[n\beta]^-\}$ 中不止出现一次.必要性得证.

(2) 充分性:设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,则

$$\begin{aligned}M&=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k+1-\frac{k+1}{\alpha}\right]=\\&\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k-\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)\right]^-=\\&\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+k-\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-=k\end{aligned}$$

故在 $\{[m\alpha]\}$,$\{[n\beta]\}$ 内其值不超过 k 的项数为 k,同时由 k 的任意性可知其值不超过 $k-1$ 的项数为 $k-1$,故其值为 k 的项数是1.

综合(1),(2)命题得证.

我们还可以将上述定理推广为:

定理3(闵嗣鹤) 设

(1) $\alpha(0)\geqslant 1,\beta(1)\geqslant 0$;

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时,$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是关于 x 的严格递增函数;

(3) 若 $\alpha^{-1}(x)$ 和 $\beta^{-1}(x)$ 分别为 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的反函数,且 $\alpha^{-1}(x)+\beta^{-1}(x)=lx(l\in\mathbf{N})$,则每一个正整数一定在以两个序列 $\{[\alpha(n)]\},\{[\beta(n)]^-\}$ 内恰好出现 l 次,而 0 则恰好出现 $l-1$ 次.

证明 适合 $\alpha(n)<k$ 或 $\beta(n)\leqslant k+1(k\in\mathbf{Z}^+)$ 的正整数 n 就是适合 $n<\alpha^{-1}(k+1)$ 或 $n\leqslant\beta^{-1}(k+1)$ 的正整数. 这样的正整数显然共有 $[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[\beta^{-1}(k+1)]$ 个. 由 (3) 上式又可写成

$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+\{l(k+1)[\alpha^{-1}(k+1)]\}=$$
$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+\{l(k+1)-1-[\alpha^{-1}(k+1)]^-\}=$$
$$l(k+1)-1$$

这正是在 $\{[\alpha(n)]\},\{[\beta(n)]^-\}$ 中其值不超过 k 的项数.

(1) 若 $k>0$,则在 $\{[\alpha(n)]\},\{[\beta(n)]^-\}$ 内其值不超过 $k-1$ 的项数应是 $lk-1$,故在两序列中其值为 k 的项数为

$$l(k+1)-1-[l(k-1)-1]=l$$

(2) 若 $k=0$,在两序列 $\{[\alpha(n)]\},\{[\beta(n)]^-\}$ 中其值为 k 的项数,显然为

$$[\alpha^{-1}(n)]+[\beta^{-1}(1)]=l-1$$

作为定理 3 的一个推论,我们还有如下的定理:

定理 4 若 α,β,γ 都是正数,则每一正整数在两序列 $\left\{\left[\alpha\left(\frac{n}{\beta}\right)^{\gamma}+n\right]\right\}$, $\left\{\left[\beta\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}+n\right]^-\right\}$ 中恰好出现一次.

请读者仿定理 2 自己给出证明.

有趣的是在第 26 届 IMO 的候选题中也出现了类似于定理 2 的命题. 现将它写出来作为定理 5:

定理 5 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$,对实数 x,y,令

$$S(x,y)=\{S\mid S=[nx+y],n\in\mathbf{N}\}$$

若 $r>1$ 为有理数,则存在实数 u,v,使

$$S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing,S(r,0)\cup S(u,v)=\mathbf{N}$$

证明 设 $r=\frac{p}{q},p,q\in\mathbf{Z},p>q$,则 $u=\frac{p}{p-q}$ 及适合 $-\frac{1}{p-q}\leqslant v<0$ 的 v 即为所求.

(1) 如果 $S(r,0)\cap S(u,v)\neq\varnothing$,则有 $[nr]=[mu+v]=k$,从而

$$np=kq+c,0\leqslant c\leqslant q-1$$
$$mp+v(p-q)=k(p-q)+d,0\leqslant d<p-q$$

相加得

$$(m+n)p+v(p-q)=kp+c+d$$

由于

$$v(p-q)<0,c+d\geqslant0$$

所以有

$$k>m+n \tag{③}$$

但另一方面

$$v(p-q)\geqslant-1,c+d<p-1$$

所以

$$k > m + n - 1 \quad ④$$

③,④矛盾,因此 $S(r,0) \cap S(u,v) = \varnothing$.

(2)当 $n > m$ 时,$[nr] > [mr]$,$[nu + v] > [mu + v]$,所以 $S(u,v)$ 中没有相同的元素,$S(u,v) \cap \{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数等于满足 $[mu + v] < k$ 的 m 的最大值 m_1.由 $m_1 u + v < k$ 及 $(m_1 + 1)v + v \geqslant k$,解得

$$\frac{k - v}{u} - 1 \leqslant m_1 < \frac{k - v}{u}$$

即

$$\frac{v + u - k}{u} \geqslant - m_1 > - \frac{k - v}{u}$$

所以

$$m_1 = -\left[\frac{u + v - k}{u}\right]$$

同样,$S(r,0) \cap \{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数为

$$n_1 = -\left[\frac{r - k}{r}\right]$$

因为

$$-m_1 - n_1 \leqslant \frac{u + v - k}{u} + \frac{r - k}{r} = 2 - k + \frac{v(p - q)}{p} < 2 - k$$

所以

$$m_1 + n_1 > k - 2$$

即

$$m_1 + n_1 \geqslant k - 1$$

结合(1)便得

$$(S(u,v) \cup S(r,0)) \cap \{1,2,\cdots,k-1\} = \{1,2,\cdots,k-1\}$$

上式对所有 k 均成立,所以

$$S(u,v) \cup S(r,0) = \mathbf{N}$$

定理1还可推广如下:

定理6 设两个正无理数 α 和 β 适合 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,两个有理数 a 和 b 适合 $1 - a < 1$,$b = -\frac{\beta}{\alpha}a$.定义两个递增的数列

$$A = \{[\alpha n + a] \mid n = 1,2,3,\cdots\}$$
$$B = \{[\beta n + b] \mid n = 1,2,3,\cdots\}$$

则 A,B 满足 $A \cap B = \varnothing$ 和 $A \cup B = \mathbf{N}$.

证明 先证明 $A \cap B = \varnothing$.用反证法,假定存在 $i,j \in \mathbf{N}$,使得 $[\alpha i + a] = [\beta i + b] = k$,因 α,β 为无理数,a,b 为有理数,从而

$$k < \alpha i + a, \beta i + b < k + 1$$

则

$$\frac{k - a}{\alpha} < i < \frac{k + 1 - a}{\alpha}$$
$$\frac{k - b}{\beta} < j < \frac{k + 1 - b}{\beta}$$

因 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,$b = -\frac{\beta}{\alpha}a$,上两式相加得

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)k - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} < i + j < \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(k + 1) - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}$$

有
$$k < i + j < k + 1$$
这是不可能的,假设不成立,从而证得
$$A \cap B = \varnothing$$

再证明 $A \cup B = \mathbf{N}$.

因 $1 - \alpha < a < 1$,则
$$[\alpha + a] \geqslant 1, A \subset \mathbf{N}$$

因$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, b = -\frac{\beta}{\alpha}a$,则
$$b > -\frac{\beta}{\alpha}1 - \beta, [\beta + b] \geqslant 1, B \subset \mathbf{N}$$

仍用反证法,假设存在正整数 $k \not\subset A \cup B$,则存在 i_0, j_0 使得 $i_0\alpha + a < k, (i_0 + 1)\alpha + a > k + 1, j_0\beta + b < k, (j_0 + 1)\beta + b > k + 1$,从而
$$\frac{k + 1 - a}{\alpha} - 1 < i_0 < \frac{k - a}{\alpha}$$
$$\frac{k + 1 - b}{\beta} - 1 < j_0 < \frac{k - b}{\beta}$$
相加得
$$k - 1 < i_0 + j_0 < k$$
又产生了矛盾,从而证得
$$A \cup B = \mathbf{N}$$

4 应用

本节我们将介绍前述试题在数学竞赛命题中的一个应用,它们看起来与定理毫无联系,使我们颇有“异邦闻乡音”之感,然而这正体现了数学的所谓“意外美”,表现了数学竞赛命题者的匠心独具.

例 1 给定 A, B, C 三列数. A 列为十进制的形如 10^k 的数,其中 k 为整数且 $k \geqslant 1$. B 列和 C 列分别是将 A 列的数化为二进制的数和五进制的数:

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	40
1000	1111101000	13000
…	…	…

求证:对于任意的整数 $n > 1$,恰好有一个 n 位数存在于 B 列或 C 列中.

(美国普特南数学竞赛)

证明 由定理 1 给定两个正无理数 x 和 y,使得$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$,则正整数集可以写成两个不相交序列的并
$$[x], [2x], [3x], \cdots; [y], [2y], [3y], \cdots$$

10^k 在二进制下有$[k\ln_2 10]+1$位,10^k 在五进制下有$[k\ln_5 10]+1$位,取 $x=\ln_2 10, y=\ln_5 10$,应用定理即可证明原结论.

例 2 设 $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ 为严格递增数列,且 $f(\mathbf{Z}^+)\cap g(\mathbf{Z}^+)=\varnothing$,$f(\mathbf{Z}^+)\cup g(\mathbf{Z}^+)=\mathbf{Z}^+$,$g(m)=f(f(m))+1$,求 $f(2m)$.

(第 20 届 IMO 试题)

解 我们取 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,则显见$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,$\beta=\alpha^2$,并且 α,β 是满足上述两条件的唯一一对无理数.我们构造两个函数 $f(m)=[\alpha m]$,$g(m)=[\beta m]$,它们显然满足 $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ 为严格递增函数,由试题的结论可知,它们又满足$f(\mathbf{Z}^+)\cap g(\mathbf{Z}^+)=\varnothing$,$f(\mathbf{Z}^+)\cup g(\mathbf{Z}^+)=\mathbf{Z}^+$,所以只须验证 $g(m)=f(f(m))+1$.事实上,一方面

$$[\alpha m]<\alpha m\Rightarrow\alpha[\alpha m]<\alpha^2\Rightarrow\alpha[\alpha m]<\beta m\Rightarrow[\alpha(\alpha m)]<[\beta m]$$

(因 $\alpha>1$,所以不能取等号).

另一方面,有

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha},\beta=1+\alpha$$

$$\alpha[\alpha m]=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)[\alpha m]=[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}[\alpha m]>$$

$$[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}(\alpha m-1)=[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}\alpha m-\frac{1}{\alpha}=$$

$$[(\alpha+1)m]-\frac{1}{\alpha}>[\beta m]-1$$

故

$$[\alpha(\alpha m)]\geqslant[\beta m]-1$$

综合以上两方面,有

$$[\alpha(\alpha m)]=[\beta m]-1$$

所以

$$f(2m)=[\alpha(2m)]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}(2m)\right]=$$

$$[(1+\sqrt{5})m]=m+[\sqrt{5}m]$$

例 3 1907 年数学家 Wythoff 发明了一种两个人玩的游戏,有个数任意的两堆物体,两个局中人按下列规则来轮流操作,规则如下:(1) 可以由一堆中取任意个(一次全部拿走也行,但不能一个不拿);(2) 可以从两堆中拿走同样多物体(个数也是任意的,但不能少于 1).这样,谁取走最后一个物体,那么谁获胜.

如果我们用有序数对(k,l)表示两堆中分别有 k 个和 l 个物体,则上述操作规则相当于:(1)$(k-t,l)$;(2)$(k,l-t)$;(3)$(k-t,l-t)$,其中 $t\geqslant 1$.我们将状态(k,l)称为一个局势.

我们将用试题的结论去证明:存在一种着法(操作手法),使得对某一类局势先着者必胜,对另一类局势后着者必胜.

如果将先着者必胜的局势称为非奇异局势,后着者必胜的局势称为奇异局势,那么我们说例 1 中的 $f(n)$ 与 $g(n)$ 即可构成奇异局势的两个分量,即奇异局势(a_n,b_n)中 $a_n=f(n)=[\alpha n]$,$b_n=g(n)=[\beta n]$.例如

$$a_{100}=[100\alpha]=\left[100\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=[100\times 1.618\,033\,98\cdots]=161$$

而 $b_{100}=[100\beta]=\left[100\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=$

$[100\times 2.618\ 033\ 98\cdots]=261$

我们很容易计算出前面的一些奇异局势为

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	0	1	3	4	6	8	8	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

从上表中我们可以观察出奇异局势的三个特征：

(1) $a_0=b_0=0$.

(2) 奇异局势 $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ 的分量 a_n 为在前 n 个奇异局势 (a_0,b_0)，$(a_1,b_1),\cdots,(a_{n-1},b_{n-1})$ 中从未出现的最小自然数.

(3) $b_n=a_n+n$.

(1) 是显然的，我们仅证明(3)，(2) 请读者自证. 事实上

$$b_n-a_n=[n\beta]-[n\alpha]=[n\alpha^2]-[n\alpha]=$$
$$[n(1+\alpha)]-[n\alpha]=$$
$$[n+n\alpha]-[n\alpha]=n+[n\alpha]-[n\alpha]=n$$

另外由奇异局势的构造法和例 1 的结论可知：对任意一个自然数 k，必出现且仅出现在一个奇异局势中. 据此我们有如下的引理：

引理 1 (1) Wythoff 游戏中的任意着法都使奇异局势变为非奇异局势；(2) 对任一非奇异局势，采用适当的着法，可将其变为奇异局势.

证明 先证(1). 若奇异局势 (a_n,b_n) 经操作一次后得到的局势 $(a_n-t,b_n)(t\geqslant 1)$ 仍为奇异局势，则 b_n 同时出现在两个奇异局势中，这是不可能的，故 $(a_n-t,b_n)(t\geqslant 1)$ 为非奇异局势.

同理 $(a_n,b_n-t)(t\geqslant 1)$ 亦为非奇异局势.

若奇异局势 (a_n,b_n) 经一次操作变为 $(a_n-t,b_n-t)(t\geqslant 1)$，则

$$a_k-b_k=(a_n-t)-(b_n-t)=a_n-b_n=n\neq k$$

由奇异局势的特征(3) 知 (a_n-t,b_n-t) 为非奇异局势.

再证(2). 如果给定的非奇异局势为 (m,m)，$m\neq 0$，那么，令 $t=m$，作如下操作 $(m-t,m-t)=(0,0)$ 后变为奇异局势.

如果给定的非奇异局势 (m,k)，$m<k$，分以下几种情况进行讨论：

i $m=a_n$，$k>a_n+n=b_n$，显然只须令 $t=k-b_n$，再作如下操作 $(m,k-t)$，就给出了奇异局势 (a_n,b_n).

ii $m=a_n$，$k<a_n+n$，即 $k-a_n=k-m=l<n$，这时只须令 $t=a_n-a_l$，作如下操作

$$[m-(a_n-a_l),k-(a_n-a_l)]=(a_l,a_l+l)=(a_l,b_l)$$

也得到了奇异局势.

iii $m=b_n$，则令 $t=k-a_n$，再作如下操作 $(m,k-t)$，可得奇异局势 (b_n,a_n)，亦即 (a_n,b_n).

定理 7 在 Wythoff 游戏中的两对弈者,如果都采用正确的着法,那么胜负将由初始局势所确定.即若初局是非奇异的,则先着者必胜;若初局是奇异的,则后着者必胜.

证明 由引理可知,任何一个对弈者只要面对奇异局势又行了一着,那么他将会使局势变为非奇异的,而他的对手总有办法再行一着使局势恢复为奇异的,且对手间每次操作后,总使局势中的分量之和 $a_n + b_n$ 逐渐减少.由于初始局势的分量和为一有限值,所以一定存在那样一个时刻使得局势为$(a_0, b_0) = (0,0)$.由于当初始值为奇局势时,先着者总是将局势变为非奇异的,而后着者又总有办法将局势变回到奇异的,但(0,0)是奇异的,所以后着者必胜.

同理当局势初始时为非奇异的,因先着者总有办法使之变为奇异的,所以仿上推理知,先着者必胜.

此定理要求对弈时我们手里应有一张大范围的奇异局势表.

5 互补序列与可逆序列

我们在前几节讨论的均是具有以下两性质:(1)$\{a_n\} \cup \{b_n\} = \mathbf{N}$;(2)$\{a_n\} \cap \{b_n\} = \varnothing$ 的两序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$.我们形象地将这两个序列称为互补序列.数学家 J. Lambek 与 L. Moser 深入研究了这种序列,发表了如下的有趣结果:

定理 8(Lambek-Moser) 设$f(n)$是一个 $\mathbf{Z}' \to \mathbf{Z}'$ 的不减函数,其中 $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}^+ + \{0\}$.定义 $f^*(n) = |\{k \mid f(k) < n\}|$,其中 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数.记 $F(\mathbf{Z}')$ 和 $G(\mathbf{Z}')$ 分别为两函数$F(n) = f(n) + n$, $G(n) = f^*(n) + n$ 的值域,则 $F(\mathbf{Z}')$ 和 $G(\mathbf{Z}')$ 是互补的.

证明 易见$f^*(n)$可等价地表示为$\max\{k \mid f(k) < n\}$.显然$f^*(n)$是不减的,又因为$f(n)$是不减的,故 $F(n)$ 与 $G(n)$ 为严格递增函数.

以下验证:(1)$F(\mathbf{Z}') \cup G(\mathbf{Z}') = \mathbf{Z}'$;(2)$F(\mathbf{Z}') \cap G(\mathbf{Z}') = \varnothing$.

(1)若存在 $\alpha \geq 1, \alpha \in \mathbf{Z}'$ 但 $\alpha \notin F(\mathbf{Z}')$,即不存在一个 β,使得 $\alpha = f(\beta) + \beta$.我们分两种情况讨论:

i $\alpha \leqslant f(0) + 0 = f(0)$,这时注意到$f(n)$的不减性,知不存在这样的整数 k 使$f(k) < \alpha$,则由 $f^*(n)$ 的定义知 $f^*(\alpha) = 0$,且$\alpha = f^*(\alpha) + \alpha$,则 $\alpha \in G(\mathbf{Z}')$.

ii $\alpha > f(0) + 0$,这时注意到 $f(n)$ 的不减性,一定存在一个$\alpha \in \mathbf{Z}^+$,使得 $f(p) + p < \alpha < f(p+1) + p + 1$.由于不等式中各项均为整数,所以有

$$f(p) + p < \alpha \leqslant f(p+1) + p \Rightarrow f(p) < \alpha - p \leqslant f(p+1) \quad ①$$

a. 当 $p = 0$时,式①变为$f(0) < \alpha \leqslant f(1) \Rightarrow f^*(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = f^*(\alpha) + \alpha \Rightarrow \alpha \in G(\mathbf{Z}')$.

b. 当 $p \geqslant 1$时,由式①可得 $p = f^*(\alpha - p)$,并且由于 $\alpha - p > f(p) \geqslant 0 \Rightarrow \alpha - p \geqslant 1 \Rightarrow \alpha = (\alpha - p) + p = (\alpha - p) + f^*(\alpha - p) \Rightarrow \alpha \in G(\mathbf{Z}')$.

综合以上可知结论(1)成立.

(2)我们只须证:如果某一$\beta \in \mathbf{Z}'$,且$\beta \geqslant 1$,若β在$G(\mathbf{Z}')$中,则它一定不在 $F(\mathbf{Z}')$中.

若 $\beta \in G(\mathbf{Z}')$,则存在 $\gamma \in \mathbf{Z}'$,使得 $\beta = f^*(\gamma) + \gamma, \beta \geqslant 1, \gamma \geqslant 1$,有

$$\beta - \gamma = f^*(\gamma) \quad ②$$

i 若 $\beta = \gamma$,则式②变为$0 = f^*(\gamma) = f^*(\beta)$.就是说不存在整数 $p \geqslant 1$,使得$f(p) < \beta \Rightarrow f(1) \geqslant \beta$.再注意到 f 是不减的,所以我们有:对于所有 $s \geqslant 1, f(s) + s > \beta \Rightarrow \beta \notin$

$F(\mathbf{Z}')$.

ii 若 $\beta-\gamma\geqslant 1$,由式②并顾及 f^* 的定义有

$$f(\beta-\gamma)<\gamma\leqslant f(\beta-\gamma+1)$$

将上式各项加上 $\beta-\gamma$,得

$$\beta-\gamma+f(\beta-\gamma)<\beta\leqslant\beta-\gamma+f(\beta-\gamma+1)<\beta-\gamma+1+f(\beta-\gamma+1)$$

所以我们可以断言,对所有

$$p=\beta-\gamma\geqslant 1,\beta\notin F(\mathbf{Z}')$$

综合(1),(2)可知命题为真.

在 Lambek-Moser 定理中的 f^* 与 f 被称为互逆序列,因为可以证明 $f^{**}=f$,即:

设 $f^*(y)=\max\{x\geqslant 0\mid f(x)\leqslant y\}$,当 $f(x)(x\geqslant 0)$ 是一个严格递增函数时,则有 $f^*(f(x))=x$.

事实上,设 $f(x_0)=n$,现在 $f^*(n)$ 等于使得 $f(x)\leqslant n$ 的最大 x,也即使得 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 的最大的 x_0.显然,x_0 是满足这个不等式的一个值.因为 f 是严格递增的,所以 x_0 就是最大的这样的 x.于是 $f^*(n)=f^*(f(x_0))=x_0$,对任意 x_0 都成立.

对于互逆序列我们有下面定理 8 的逆定理:

定理 9 如果 $F(n)$ 与 $G(n)$ 是互逆序列,则序列 $f(n)=F(n)-n,g(n)=G(n)-n$ 是互逆的,即

$$g(n)=f^*(n),f(n)=g^*(n)$$

例 4 求证:在正整数列删去所有的完全平方数后,第 n 项等于 $n+\{\sqrt{n}\}$,其中 $\{\sqrt{n}\}$ 表示最接近 $\sqrt{n}$ 的整数.

证明 此问题可转化为对于两个互补序列

$$F(n):1,4,9,16,25,36,49,\cdots$$
$$G(n):2,3,5,6,7,8,10,\cdots$$

求证:序列 $G(n)$ 的第 n 项公式为 $G(n)=n+\{\sqrt{n}\}$.

我们只须构造两个互逆序列 f 与 f^*.如果我们得到了 $f^*(n)$ 的公式,则由 $G(n)=f^*(n)+n$,$G(n)$ 的公式立即可得.$f(m)=F(m)-m=m^2-m$.由 f^* 的定义,并注意到 $m(m-1)$ 的递增性,得

$$f^*(n)=\max\{m\mid f(m)<n\}=\max\{m\mid F(m)-m<n\}=\max\{m\mid m^2-m<n\}=\max\{m\mid m(m-1)<n\}$$

因为 $m,n\in\mathbf{Z}^+$,所以

$$\max\{m\mid m(m-1)<n\}=\max\left\{m\mid m^2-m<n-\frac{1}{4}\right\}=$$
$$\max\left\{m\mid m^2-m+\frac{1}{4}<n\right\}=$$
$$\max\left\{m\mid \left(m-\frac{1}{2}\right)^2<n\right\}=$$
$$\max\left\{m\mid m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}\right\}=$$

$$\max\left\{m \mid m < \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right\} =$$

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

$$G(n) = f^*(n) + n\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + n$$

现在证明$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \{\sqrt{n}\}$.

事实上,存在 $k \in \mathbf{N}$,使 $k \leqslant \sqrt{n} < k + 1$.

(1) 若 $k \leqslant \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$,则 $k + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k + 1$,所以$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = k$.

(2) 若 $k + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{n} < k + 1$,则 $k + 1 \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k + 1 + \frac{1}{2}$,所以$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = k + 1$.

无论(1),(2)哪种情况,$\left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$都是最接近$\sqrt{n}$的整数.

6 再谈数列的 N - 互补性

上海市杨浦区教育学院的严华祥先生从另一个角度研究了这一问题.(以下引自严文)

他先考察两对整数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,它们的通项依次为:

(1) $a_n = 3n, b_n = n + \left[\frac{2n-1}{4}\right], n \in \mathbf{N}$,这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数(下同).

(2) $a_n = n + [\ln n], b_n = n + [e^n], n \in \mathbf{N}$,这里 $\ln x$ 为自然对数,$e = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 是自然对数底.

它们的前 n 项列表如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$3n$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	…
$n + \left[\frac{2n-1}{4}\right]$	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	…
$n + [\ln n]$	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	…
$n + [e^n]$	3	9	23	58	153	409	1103	2988	8112	22036	…	…

可见,在每一对数列中,任一个自然数恰好出现一次.就是说,一对数列中每个数列的项不相同,构成的集合$\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$和$\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$满足两个条件:

(1) $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}$.

(2) $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \varnothing$.

如前述我们称这样的一对数列为 N - 互补的.

这两对数列的问题及与此有关的问题引出了一个猜测,一个一般的结论,想法是从第二对数列提出来的.

第二对数列的证明相当难,但它的形式很有启发性.若令 $\varphi(x) = \ln x$,则其反函数 $\varphi^{-1}(x) = e^x$,从而 $a_n = n + [\varphi(n)]$,$b_n = n + [\varphi^{-1}(n)]$.第一对数列也可有类似的关系,于是有了下面的一般化结果:

定理 10 设 $\varphi(x)$ 是定义在$(0, +\infty)$上的严格单调增函数,值域包含区间$[1, +\infty)$,且对任意的 $n \in \mathbf{N}$,有 $\varphi(x) \notin \mathbf{Z}$,那么数列 $f(n) = n + [\varphi(n)]$ 与 $g(n) = n + [\varphi^{-1}(n)]$ $(n \in \mathbf{N})$ 是 $\mathbf{N}$ - 互补的.

证明 显见,$f(n)$ 与 $g(n)$ 是 n 的单调函数,故只须证明:

(1) 对任何 $m, n \in \mathbf{N}$,有 $f(m) \neq g(n)$.

用反证法.若 $f(m) = g(n)$ 对某 $m, n \in \mathbf{N}$ 成立,即

$$m + [\varphi(m)] = n + [\varphi^{-1}(n)]$$

令 $k = [\varphi(m)]$,$l = [\varphi^{-1}(n)]$,则有

$$\varphi(m) = k + \alpha, \varphi^{-1}(n) = l + \beta$$

且因为 $\varphi(m)$ 和 $\varphi^{-1}(n) \notin \mathbf{Z}$,有 $0 < \alpha, \beta < 1$ 及 $\varphi(l + \beta) = n$,从而有

$$m + \varphi(m) > m + [\varphi(m)] = n + [\varphi^{-1}(n)] + 1 =$$
$$\varphi(l + \beta) + l > \varphi(l) + 1$$

由 $\varphi(x)$ 的单调性知 $m > l$,即 $m \geqslant l + 1$,所以

$$m + [\varphi(m)] \geqslant l + 1 + [\varphi(l + 1)] =$$
$$[\varphi^{-1}(n)] + [\varphi(l + 1)] + 1 \geqslant$$
$$[\varphi(1 + \beta)] + 1 = [\varphi^{-1}(n)] + n + 1$$

即 $f(n) \geqslant g(n) + 1$,与 $f(m) = g(n)$ 矛盾.

(2) 对任何 $k \in \mathbf{N}$,恰是某个 $f(n)$ 或 $g(n)$.

考虑到 $\varphi(x)$ 是单调增的,若 $\varphi(1) > 1$,必有 $\varphi^{-1}(1) < 1$,即 $\varphi(1)$ 与 $\varphi^{-1}(1)$ 中恰有一个小于 1,不妨设 $\varphi(1) < 1$,从而 $f(1) = 1 + [\varphi(1)] \leqslant 1$.如果对 $k \in \mathbf{N}$,有 $k \notin \{f(n) \mid n \in \mathbf{N}\}$.下面寻求 l,使 $g(l) = k$.

显见,$\{n \in \mathbf{N} \mid f(n) < k\} \neq \varnothing$(注意,若 $k = 1$,则 $f(1) < 1$)于是可令 $n_0 = \max\{n \in \mathbf{N} \mid f(n) < k\}$,则有不等式

$$k_0 = f(n_0) < k < f(n_0 + 1) = k'$$

从而

$$k_0 + 2 \leqslant k + 1 \leqslant k'$$

就有

$$k' - k_0 > 2$$

$$k_0 = f(n_0) = n_0 + [\varphi(n_0)] < k < n_0 + 1 + [\varphi(n_0 + 1)] = k'$$

所以

$$k_0 - n_0 = [\varphi(n_0)] < k - n_0 < 1 + [\varphi(n_0 + 1)] =$$
$$k' - n_0$$

$$\varphi(n_0) < k - n_0 \leqslant [\varphi(n_0 + 1)] < \varphi(n_0 + 1)$$

因为 $\varphi^{-1}(x)$ 与 $\varphi(x)$ 一样也是单调增的,两边取 φ^{-1},则有

$$n_0 < \varphi^{-1}(k - n_0) < n_0 + 1$$

故

$$[\varphi^{-1}(k - n_0)] = n_0$$

取 $l = k - n_0$,则 $l + n_0 = k$,从而有 $l + [\varphi^{-1}(l)] = k$,即$g(l) = k$.

由这个定理,第二对数列 $\mathbf{N}$ - 互补就易证了.因为 $\varphi(x) = e^x$ 单调增,定义域取[0,

$+\infty$)时,值域包含$[1,+\infty)$.对自然数 $n>1,e^n\notin \mathbf{Z}$,其反函数 $\varphi^{-1}(x)=\ln x$.考虑到 $n=1,2,3$ 在表中已列出,可见 $f(n)=n+[\varphi(n)]$ 和 $g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]$ 为 $\mathbf{N}$ - 互补数列.

至于第一个数列,从 $a_n=3n$,有$[\varphi(n)]=2n$.但若取$\varphi(x)=2x$,会有 $\varphi(n)=2n\in \mathbf{N}$,就不合定理的要求.由 $b_n=n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]$,有$[\varphi(n)]=\left[\frac{2n-1}{4}\right]$,取 $\varphi(x)=\frac{2x-1}{4}$,则 $\varphi^{-1}(x)=2x+\frac{1}{2}$,$\varphi(n)=\frac{2n-1}{4}\in \mathbf{Z}(n\notin \mathbf{N})$,且 $\varphi(x)$ 的定义域和值域符合定理的要求,并且

$$f(n)=n+[\varphi(n)]=n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]=b_n$$

$$g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]=n+\left[2n+\frac{1}{2}\right]=3n=a_n$$

由定理,$f(n)$ 与 $g(n)$ 是 $\mathbf{N}$ - 互补的,$\{a_n\}$ 与$\{b_n\}$ 也就 $\mathbf{N}$ - 互补.

定理证明中多次用到 $\varphi(n)\notin \mathbf{Z}$ 的性质,这是重要的.例如 $a_n=n+[\sqrt{n^3+1}]$ 和 $b_n=n+[\sqrt[3]{n^2-1}](n\in \mathbf{N})$.它们的前 n 项是:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$n+[\sqrt{n^3+1}]$	2	5	8	12	16	20	25	30	36	41	…
$n+[\sqrt[3]{n^2-1}]$	1	3	5	6	7	9	10	11	13	14	…

它们的项中没有4,而却有 $a_2=b_3=5$.因为不定方程 $y^2=x^3+1$ 的整数解只有 $x=2,y=3$(由 $x^3=(y-1)(y+1)$ 可看出),所以这一对数列除此之外,所有自然数都出现一次,只要改动一点,$a_n=n+\left[\sqrt{n^3+\frac{1}{2}}\right]$,$b_n=n+\left[\sqrt[3]{n^2-\frac{1}{2}}\right]$就 $\mathbf{N}$ - 互补了.

由定理,容易得到下面的推论:

推论 若 $\alpha>0,\beta>0$ 为无理数,且$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,则数列$[n\alpha]$和数列$[n\beta]$是 $\mathbf{N}$ - 互补的.

证明是简单的,方法是由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$构造 $\varphi(x)$,使 $f(n)=[n\alpha]$,$g(n)=[n\beta]$.这只要令 $\varphi(x)=(\alpha-1)x$,它是正比例函数,且易见 $\alpha>1$,$\varphi(x)$ 单调增,满足定理对 $\varphi(x)$ 的全部条件,这时的 $\varphi^{-1}(x)=\frac{x}{\alpha-1}$.而由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,得

$$\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]=[n+\varphi^{-1}(n)]=\left[n+\frac{n}{\alpha-1}\right]=\left[n\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]=[n\beta]$$

$$f(n)=n+[\varphi(n)]=[n+(\alpha-1)n]=[n\alpha]$$

由定理知 $f(n)$ 与 $g(n)$ 是 $\mathbf{N}$ - 互补的,即$[n\alpha]$与$[n\beta]$是 $\mathbf{N}$ - 互补的.

例5 从自然数集 $\mathbf{N}$“筛选”数列$\{a_n\}$:设 $a_1=1$,删去 $b_1=a_1+k$,其中 k 是某个自然数;接着取 a_2 为 $\mathbf{N}$ 中除去 a_1,b_1 后最小的数,删去 $b_2=a_2+2k$;取 a_3 为 $\mathbf{N}$ 中除去 a_1,a_2,

b_1,b_2 后最小的数,删去 $b_3=a_3+3k$,如此继续下去,得到数列$\{a_n\}$,求 a_n 的表达式.

解 由数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的构成知它们是 $\mathbf{N}$ – 互补的,$\{a_n\}$的唯一性是明显的,用构造法给其一个形式,找出通项来,即令

$$a_n=[n\alpha],\alpha>0,\alpha\notin\mathbf{Q}$$

则

$$b_n=a_n+nk=[n\alpha]+nk=[n(\alpha+k)]$$

再令 $\beta=\alpha+k\notin\mathbf{Q}$. 由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,求得

$$\alpha=\frac{1}{2}(2-k+\sqrt{k^2+4})>0$$

由于 $k>0$ 为自然数,k^2+4 不是完全平方数,从而 α 是一个正的无理数,由例 1 知$\{a_n\}$与$\{b_n\}$互补,$a_n=[n\alpha]$为所求.

由定理可以编拟和解答下列问题:

(1) 任何一个公差 $d=k-1$,$a_1\in\mathbf{N}$ 的等差数列都有一个形如 $b_n=n+[\varphi(n)]$ 的 $\mathbf{N}$ – 互补数列(取 $\varphi(x)=(k-1)x+a_1-k+\alpha,\alpha>0$ 为无理数).

(2) 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=n+\left[\csc\frac{\pi}{2(n+1)}\right]$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=n-1+\left[\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right]$,则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 $\mathbf{N}$ – 互补的.

(3) 数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=3n^2-2n$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=n+\left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right](n\in\mathbf{N})$,则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 $\mathbf{N}$ – 互补的(取$\varphi(x)=\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}$).

(4) 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=n+\left[\sqrt{3n}+\frac{1}{2}\right]$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=\left[\frac{n^2+2n}{3}\right]$,则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 $\mathbf{N}$ – 互补的.

(提示:取 $\varphi(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{2}$,则 $\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^2$,这时 $b_n=n+[\varphi^{-1}(n)]=\left[n+\frac{n^2-n}{3}+\frac{1}{12}\right]=\left[\frac{n^2+2n}{3}+\frac{1}{12}\right]=\left[\frac{n^2+2n}{3}\right]$. 可见这里的 $\varphi(x)$ 中所用常数$\frac{1}{2}$ 还可以改为其他小于 1 的正数)

7 Beatty 定理与一道第 34 届 IMO 试题

在 1993 年举行的第 34 届 IMO 中的第 5 题为:

试题 B 设 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$,论证是否存在一函数 $h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,使得

(1) $h(1)=2$.

(2) $h(h(n))=h(n)+n$,对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

(3) $h(n)<h(n+1)$,对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

从公布的解答来看,有一种很唐突的感觉,因为它一上来就构造了一个函数

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

(其中$[x]$表示Gauss函数),然后逐条验证它满足题中的条件.解答见《中等数学》1993年第5期或《福建中学数学》1993年第6期.这两个解答都像一块"飞来之石",来路不明,给人以很大的疑问,这个函数是怎么想到的?

苏联教育专家苏霍姆林斯基说:"面前出现疑问,如果你能做到这一点,事情就成功了一半."(《谈教师的建议》)所以我们要珍惜这个疑问,要回答这个问题必须从1978年在罗马尼亚举行的第20届IMO中英国所提供的第3题的解法谈起,见例2.

此题有多种解汉,但比较有价值的是利用Beatty定理的解法,其关键是导出$g(n)$与$f(n)$的一个关系式

$$g(n)=f(n)+n \tag{①}$$

又注意到已知条件中的$g(n)=f(f(n))+1$,故有

$$f(f(n))+1=f(n)+n \tag{②}$$

而这与试题A中的条件(2)何其相似,有相似的条件必有相似的结果.试题B最后的答案为

$$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]$$

$$g(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}n\right]$$

其中显然$f(n+1)>f(n)$与试题A中的条件(3)相似.以上的解题经验告诉我们可以猜测:$h(n)$应与$f(n)$差不多,由$h(1)=2,f(1)=1,h(1)=f(1)+1$,一般会猜测$h(n)=f(n)+1$.

但遗憾的是验证不了它满足条件(3),所以我们必须换一种猜测.注意到$f(2)=3$,$h(1)=3-1=f(2)-1$,故可猜测$h(n)=f(n+1)-1$,即$f(n+1)=h(n)+1$.剩下的只须验证$h(n)$满足条件(2),(3)即可.

由试题B证明中的式②

$$\begin{aligned}f(f(n))=f(n)+n-1\Leftrightarrow f(h(n-1)+1)=&\\ h(n-1)+n\Leftrightarrow h(h(n-1))+1=h(n-1)+n\Leftrightarrow&\\ h(h(n-1))=h(n-1)+(n-1)&\end{aligned}$$

即

$$h(h(n))=h(n)+n$$

再由$f(n)$的递增性可推知,$h(n)$具有递增性,至此

$$\begin{aligned}h(n)=f(n+1)-1=&\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)-1\right]=\\ &\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1\right]=\\ &\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\end{aligned}$$

完全符合试题A的三个条件.

所以从这个意义上讲试题A与试题B是等价的,即严格说来试题A并不是一个新题.

单墫教授给出了一个易于接受的分析过程.

这是一个需要判断的问题.满足要求的函数是否存在?如果存在,它是什么?如果不存在,为什么?

面对一个难题,解决的方法只有先“尝试”(有一位哲人说过“自古成功在尝试”).

尝试(也就是探索)应从简单情况入手.最简单的情况莫过于一次函数 $an+b$,而 $b=0$ 则是它最简单的情况.因此,不妨设 $h(n)=an(n\in\mathbf{N})$.由于条件(3)的要求,函数递增,所以,a 应当大于0.

$a=1$ 时,$h(n)=n$.这时,$h(1)=1$,不符合条件(1).

$a=2$ 时,$h(n)=2n$.此时,条件(1),(3)满足;(2)怎样呢?

$$h(h(n))=2f(n)=f(n)+f(n)=f(n)+2n$$

很遗憾,(2)不满足!

更大的 a,导致比 $h(n)+2n$ 更大的 $h(h(n))$,因此,没有使式(2)成立的 a.

$h(n)=an+b(a>0,b\neq 0)$ 也不能使(2)成立,这是因为,这样将导致

$$\begin{aligned}f(f(n))=af(n)+b=a(an+b)+b=\\a^2n+(ab+b)=(an+b)+n=\\(a+1)n+b\end{aligned}$$

即

$$(a^2-a-1)=-ab\quad,n\in\mathbf{N}$$

显然,上式是不可能成立的.

一次函数不能满足要求,能否断言满足要求的函数不存在了呢?不能,线性函数不满足要求,其他函数还可能满足要求.如果将次数升高,比如二次函数

$$h(n)=an^2+bn+c\quad,a\neq 0$$

此时,$h(h(n))$ 变成4次,式①更不能成立.由此断定,次数不能升高,还是回到一次较接近目标(因为 $h(n)=2n$ 已满足①).但在 $a=1$ 及 $a\geqslant 2$ 时尝试都告失败,真是“山重水复疑无路”了!

仔细回顾一下,$a=1$ 太小,$a=2$ 又大了.那么 a 在1,2之间如何呢?这样就必须放弃 a 为整数的要求(这一限制是我们自己加的,可以放弃).为探索 a,用待定系数法.

对于 $h(n)=an$,有

$$h(h(n))=a^2n$$

要使②成立,即

$$a^2n=an+n$$

我们应取

$$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

遗憾的是 $h(n)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}n$ 不是整值函数,它的值是无理数,虽然它能使②成立.

我们真是陷入“顾此失彼”的绝境.

冷静分析题目对 $h(n)$ 的三个要求,(2)是关键,既然 $h(n)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}n$ 满足了(2),千万不要轻易放弃.

使 $f(n)$ 为整值函数并不难,取

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

它首先满足(3),但 $f(1)=1\neq 2$.为此,修正它,令

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]+1$$

此时，$h(n)$ 满足(1)，(3)，而

$$h(h(n))=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}h(n)\right]+1=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}h(n)\right]+h(n)+1=$$

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+h(n)+1=$$

$$\left[n-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right\}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+h(n)+1=$$

$$h(n)+n+1$$

不满足(2)，但已相差不远，再作“微调”，令

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]\quad ，其中 0<b<1$$

这时

$$h(h(n))=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}h(n)+b\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}h(n)+b\right]+f(n)=$$

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]+b\right]+h(n)=$$

$$h(n)+n+\left[b+\frac{\sqrt{5}-1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}\right]$$

这里$\{x\}=x-[x]$，当 x 为无理数时，$\{x\}$ 表示一个 0，1 之间的纯小数.

我们希望上式中[ ]为 0，则

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

为此，取 $b=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 此时

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}n+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)-1$$

是无理数. 从而

$$0<\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

更有

$$0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

因此

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

从而

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

满足所有要求，即为所求函数.

8 数学竞赛命题的一条捷径

在《中等数学》1993 年第 6 期中李成章曾撰文指出“改造试题为新题确实是数学竞赛命题的一条捷径”，但是改造什么样的试题，怎样改造是至关重要的. 试题 B 就是数学奥林匹克命题者中意的改造对象. 例如还可以改造出以下的定理：

定理 11 设 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，那么存在二个函数 $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，满足 $f(g(n))=f(n)+g(n)$（其实这里 $f(n)$ 与 $g(n)$ 同于试题 B）.

这时的证明已完全不同于试题 B，而要用 Gauss 函数的各种性质来验证.

证明 $f(n)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$，$g(n)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$ 就满足要求，其中 $[x]$ 为 Gauss 函数.

为了验证方便，我们设

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha,\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\beta$$

则有

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\alpha^2\\ \alpha^2-\alpha-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=\alpha+1\Rightarrow$$

$$\beta n=n\alpha+n\Rightarrow\{\beta n\}=\{\alpha n\}$$

（$\{x\}$ 表 x 的小数部分）

故可设 $\alpha n=[\alpha n]+\theta_n,\beta n=[n\beta]+\theta_n,0<\theta_n<1$，于是

$$\alpha n+\beta n=[\alpha n]+[\beta n]+2\theta_n$$

又注意到 $\alpha\beta=\alpha+\beta$，故 $\alpha\beta n=\alpha n+\beta n$. 又

$$\alpha\beta n=\alpha[\beta n]+\alpha\theta_n=[\alpha[\beta n]]+\theta'_n+\alpha\theta_n,0<\theta'_n<1$$

$$f(g(n))=f(n)+g(n)\Leftrightarrow[\alpha[\beta n]]=[\alpha n]+[\beta n]\Leftrightarrow$$

$$\Delta n=(\theta'_n+\alpha\theta_n)-2\theta_n=0\Leftrightarrow$$

$$\Delta n=(2-\alpha)\theta_n-\theta_n=0$$

$$1<\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}0<2-\alpha<1\\ 0<\theta_n<1\end{array}\right\}\Rightarrow 0<(2-\alpha)\theta_n<1$$

$$\left.\begin{array}{l}0<(2-\alpha)\theta_n<1\\ 0<\theta'_n<1\end{array}\right\}\Rightarrow-1<(2-\alpha)\theta_n-\theta'_n<1$$

而

$$\Delta_n=[\alpha[\beta n]]-[\alpha n]-[\beta n]\in\mathbf{Z}$$

所以

$$\Delta_n=0$$

即

$$[\alpha[\beta n]]=[\alpha n]+[\beta n]$$

古语道：“学贵知疑，疑者，觉悟之机也.” 一个自然的问题又提出来了：为什么要在数学竞赛中反复地出现 $[n\alpha]$ 和 $[n\beta]$ 这两个函数？这两个函数又有何来历？

早在 1907 年 Wyhtoff 研究并提出了一种现在以他的名字命名的游戏：

地上摆了两堆数量不同的石子，甲、乙两人轮流从其中拣起石子，每次可以从任何一堆中拣起任意多个石子，也可以从两堆中同时拣起一样多的石子. 谁恰好拣起最后的石子，谁就赢.

1931 年中国已故的数论大师闵嗣鹤先生在中国最早的一本中等数学杂志《中国数学杂

志》中证明了：如果两堆石子，一堆是$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$，另一堆是$\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$，那么先拣者必输无疑；如果二堆不恰好是$[\alpha n]$和$[\beta n]$，则先拣者总有办法能赢.

这样一个历史名题在数学竞赛中有所反映是很自然的，恰好在第20届IMO举行的当年，在全苏中学生数学竞赛中也出现了以Wythoff游戏为背景的试题.

例6 有两堆火柴，一堆中有m根，另一堆中有n根，$m>n$，两个人轮流各从一堆中取火柴，每次从一堆中所取火柴的根数(异于0)是另一堆中火柴根数的倍数，能在一堆中取最后一根火柴的人就赢.

(1) 求证：如果$m>2n$，那么第一个取火柴的人能保证自己赢.

(2) 当α取何值时下列结论成立：如果$m>\alpha n$，则先取火柴的人能保证自己赢.

由Wythoff博弈的方法容易断定：当$\alpha \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$时，先取者必胜(详细证明可见《全苏数学奥林匹克试题》，山东教育出版社).

9 两个《美国数学月刊》征解题

1982年北京大学马希文教授曾在《中学生数学》(首都师范大学主办)中介绍了几个有趣的自然数函数.其中有如下例子：

$$f(n)=\begin{cases}1\\ \text{不在 } f(1),\cdots,f(n-1),g(1),\cdots,g(n-1)\end{cases}$$

中出现的最小正整数为

$$g(n)=f(n)+n$$

即要计算$f(n)$，必须先计算$f(1),\cdots,f(n-1),g(1),\cdots,g(n-1)$.马希文先生指出这两个函数是从研究Wythoff博弈中得来的，其实$f(n),g(n)$就是$[\alpha n][\beta n]$，其中$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.关于$f(n)$和$g(n)$这两个不同定义的等价性，早在1952年在《美国数学月刊》(《American Mathematical Monthly》)59卷第1期中的第4399号征解问题中就已证明了，原题为：

问题1 设$f(n)$和$g(n)$为由下列三个条件所确定的两个自然数列：

(1)$f(1)=1$.

(2)$g(n)=na-1-f(n)$，a是一个大于4的整数.

(3)$f(n+1)$是与$2n$个数：$f(1),f(2),\cdots,f(n);g(1),g(2),\cdots,g(n)$不同的最小自然数.

求证：存在常数α和β，使得$f(n)=[\alpha n]$，$g(n)=[\beta n]$.

证明 设α,β为$x^2-ax+a=0$的根，因$a>4$，故$\Delta=a^2-4a>0$，所以$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且取$\alpha<\beta$，则由Vieta定理有

$$\alpha+\beta=a,\alpha\beta=a\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,1<\alpha\leqslant 2,2\leqslant\beta$$

此外，α,β必须都是无理数，因为假设有一个为有理数，那么$\Rightarrow\alpha,\beta\in\mathbf{Z}\Rightarrow\alpha=2,\beta=2$，

$a = 4$,与 $a > 4$ 矛盾.

下面我们来验证这样的 α,β 满足三个条件:

(1) 因 $1 < \alpha < 2$,显然$[\alpha,1] = 1$.

(2) 对于 $n \geqslant 1$,注意到 $a \in \mathbf{Z}$,则

$$g(n) = [\beta n] = [(a - \alpha)n] = na - 1 - [\alpha n] = na - 1 - f(n)$$

(3)i 先验证$\{[\alpha n]\} \cap \{[\beta n]\} = \varnothing$.假设$[\alpha n] = [\beta m] = k$,其中 $m,n \in \mathbf{N}$,则

$$\alpha n = k + \theta, \beta m = k + \varphi, 0 < \theta < 1, 0 < \varphi < 1$$

并且有

$$n + m = k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} = k + \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta}$$

因为
$$0 < \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

所以
$$\alpha\theta + \beta\varphi \notin \mathbf{Z}$$

这与 $n + m \in \mathbf{Z}$ 矛盾.因此对任何 $m,n \in \mathbf{N}$,都有$[\alpha n] \neq [\beta m]$.

ii 再验证 $f(n),g(n)$ 都是严格增函数,且 $g(n) > f(n)$.

$$[\alpha(n + 1)] = [\alpha n + \alpha] \geqslant [\alpha n] + [\alpha] = [\alpha n] + 1$$
$$[\beta(n + 1)] \geqslant [\beta n] + [\beta] = [\beta n] + 2[\alpha n] + 1$$

iii 对每一个 $k \in \mathbf{N}$,k 不在$\{f(n)\}$中出现就在$\{g(n)\}$中出现.设 $n = \left[\frac{k + 1}{\alpha}\right]$.

a.如果 $n > \frac{k}{\alpha}$,则

$$k < \alpha n < \frac{\alpha(k + 1)}{\alpha} = k + 1 \Rightarrow [\alpha n] = k$$

b.如果 $n < \frac{k}{\alpha}$,则

$$\left.\begin{aligned}\beta(k - n) &> \beta k - \frac{\beta}{\alpha}k = \beta k\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = k\\ \beta(k - n) &< \beta k - \beta\left(\frac{k + 1}{\alpha} - 1\right) = k + 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\beta(k - n)] = k$$

由 i,ii 可知$[\alpha(n + 1)] =$ 异于$[\alpha 1],[\alpha 2],\cdots,[\alpha n];[\beta 1],[\beta 2],\cdots,[\beta n]$的最小自然数.故 i,ii,iii 恰是 $f(n),g(n)$ 的定义,由 α,β 的选取知这样的序列是唯一的,故 $f(n) = [\alpha n], g(n) = [\beta n]$.

其实从严格的意义上讲这个征解问题也并不是一个新题.因为早在 1926 年加拿大多伦多大学的 San Beatty 在同一刊物的 33 期中就曾提出并证明了如下的问题(编号为 3177):

问题 2 如果 z 是一正无理数,而 $\bar{y}$ 是它的倒数.求证:在每一对相邻的正整数间,序列

$$(1 + z), 2(1 + z), 3(1 + z), \cdots$$
$$(1 + \bar{y}), 2(1 + \bar{y}), 3(1 + \bar{y}), \cdots$$

被包含且只被包含一个.

要证明问题 2 必须先证明如下的引理:

引理 2 设 $x = \frac{p}{q}, y = \frac{q}{p}$,其中 p,q 是正整数,$p < q$ $(p,q) = 1$,而$[x]$是 Gauss 函

数,则序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{q-1}, a_i = i(1+x)$$
$$b_1, b_2, \cdots, b_{p-1}, b_j = j(1+y)$$

具有以下性质:对应的序列$\{[a_i]\}\{[b_i]\}$是整数$1,2,\cdots,p+q-2$无重复或遗漏的某种排列.

证明 我们首先分析一下什么样的数在$\{[a_i]\}$中被遗漏:

$$a_m = m(1+x) = m + \frac{mp}{q} = m + k + \frac{r}{q}$$

$$a_{m-1} = (m-1)(1+x) = m - 1 + k + \frac{(m-1)p}{q} =$$

$$m - 1 + k + \frac{r-p}{q}$$

其中k, r满足$mp = kq + r, r < g$.

因此,当$r < p$时,$[a_m] = m + k, [a_{m-1}] = m + k - 2$,故$m + k - 1$被遗漏.

下面我们证明:当$m + k - 1$被遗漏时,它恰好出现在$\{[b_j]\}$中.因为当$r < p$时

$$b_k = k + \frac{kq}{p} = k + \frac{mp - r}{p} = m + k - \frac{r}{p}$$

故

$$[b_k] = m + k - 1$$

我们将所有在$\{[\alpha_i]\}$中漏掉的数用上面的办法找回来:

$$m_1 p = q + r_1$$
$$m_2 p = 2q + r_2$$
$$\vdots$$
$$m_k p = kq + r_k$$
$$1 \leqslant r_k < p < q, k \leqslant p - 1$$

很显然$m_1 \geqslant 2$,且$m_k \geqslant m_{k-1} + 1$,所以在$\{[\alpha_i]\}$中被漏掉的数为$m_1, m_2 + 1, m_3 + 2, \cdots, m_{p-1} + p - 2$. 而这些数都刚好出现在$\{[b_j]\}$中.引理证毕.

现在我们来证明问题2.如果z是一个无理数,$0 < z < 1, \overline{y} = \frac{1}{z}$,则由有理数对无理数的逼近定理知

$$z - \frac{p}{q} = \varepsilon_1 = \frac{\theta_1}{q^2}$$

$$y' - \frac{q}{p} = \varepsilon_2 = \frac{\theta_2}{p^2}$$

其中$|\theta_i| < 1(i = 1,2)$.故我们可以构造一个新的序列,令

$$z' = z - \varepsilon_1, y' = \overline{y} - \varepsilon_2$$

则$z' = \frac{p}{q}, y' = \frac{q}{p}$,得到新序列

$$\{[i(1+z')]\}, 1 \leqslant i \leqslant q - 1$$
$$\{[j(1+y')]\}, 1 \leqslant j \leqslant p - 1$$

由引理知上述新序列是依某种顺序取遍整数$1,2,\cdots,p+q-2$.因为

$$|i\varepsilon_1|<\frac{1}{q},\ |j\varepsilon_2|<\frac{1}{p}$$

按收敛的$\frac{p}{q}$阶的增加,我们能无限地增大 p 和 q,因此这些序列趋于问题中的序列.

Beatty 的证明很巧妙,它先证明了一个易于处理的有理数问题,然后通过有理数对无理数的逼近定理过渡到无理数的情形.

次年由 Oxterowski 和 Aitken Solution 在《美国数学月刊》34 卷 159 页给出了一个简单的证明.

正是由于有了这样一个漂亮的初等证明,使得 Beatty 定理成为 1959 年 11 月 21 日举行的第 20 届美国普特南数学竞赛试题B - 6.

后来这一问题引起了许多人的兴趣,此类文章陆续出现在一些数学杂志上,如 1962 年 H. Grossman 在《美国数学月刊》532 页上发表了题为《一个包括所有整数的集合》的有趣文章;1976 年S. W. Golomb 在《数学杂志》49 期的 187 页上以《销售税》为题再次讨论了这个问题;1952 年苏联著名数论大师 Ivan Matv eevic Vinogradov 院士出版了他的《数论基础》,在书中 Vinogradov 罗列了大量的习题. 正如华罗庚教授在为其中译本所写的序中所指出的那样:"这些问题大部分都是有根据有源流的,很多是历史上的著名问题."其中第二章的问题 3 即为 Beatty 定理的另一种形式:

问题 3 设 α,β 是这样的正数,使得下面的数

$$[\alpha x]:x=1,2,\cdots\quad[\beta x]:y=1,2,\cdots$$

共同组成全部自然数列而且没有重复的. 求证:该事实在而且只在 α 是无理数并且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 时才成立.

10 Beatty 定理与两道竞赛题

Beatty 定理作为一个初等数论定理确实是既精巧别致而又有源流,所以在竞赛中经常会被用到. 下面的试题是第 28 届 IMO 预选题:

试题 C 求出方程$[n\sqrt{2}]=[2+m\sqrt{2}]$的所有整数解,其中$[x]$为 Gauss 函数.

解 设 $m\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}$,则显然有 $n>m$,且

$$[(m+3)\sqrt{2}]=[m\sqrt{2}+3\sqrt{2}]>[m\sqrt{2}]+4$$

所以 $n=m+1$ 或 $n=m+2$.

在 Beatty 定理中取 $\alpha=\sqrt{2},\beta=2+\sqrt{2}$,则

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

故$\{[m\sqrt{2}]\}$和$\{[(2+\sqrt{2})h]\}$为互补序列.

(1) 若 $n=m+1$,因

$$2>[(m+1)\sqrt{2}]-[m\sqrt{2}]>1$$

故$[m\sqrt{2}]$与$[(m+1)\sqrt{2}]$之间含且仅含一个整数,由 Beatty 定理知一定为$[(2+\sqrt{2})h]$型,即

$$m\sqrt{2}<(2+\sqrt{2})h<(m+1)\sqrt{2}\Rightarrow m<(\sqrt{2}+1)h<m+1$$

即
$$m=[(\sqrt{2}+1)h]$$

(2) 若 $n=m+2$,则
$$[(m+2)\sqrt{2}]=[m\sqrt{2}]+2$$
故$[m\sqrt{2}]$与$[(m+2)\sqrt{2}]$间一定含有一个整数.因为
$$[m\sqrt{2}]<[(m+1)\sqrt{2}]<[(m+2)\sqrt{2}]$$
所以$[m\sqrt{2}]$,$[(m+1)\sqrt{2}]$,$[(m+2)\sqrt{2}]$是三个连续整数.又由于
$$3<[(2+\sqrt{2})(h+1)]-[(2+\sqrt{2})h]\leqslant[2+\sqrt{2}+1]=4$$
所以$[m\sqrt{2}]$前面的整数为$[(2+\sqrt{2})h]$,$[n\sqrt{2}]$后面的整数为$[(2+\sqrt{2})(h+1)]$,并且$[(2+\sqrt{2})h]$前面的整数是$[(m-1)\sqrt{2}]$,从而
$$(m-1)\sqrt{2}<(2+\sqrt{2})h<m\sqrt{2}<(m+2)\sqrt{2}<(2+\sqrt{2})(h+1)\Rightarrow m-1<(1+\sqrt{2})h<m<m+2<(1+\sqrt{2})(h+1)$$
故
$$m=[(1+\sqrt{2})h]+1$$

最为有趣的是H.W.Gould还将Beatty定理与著名的斐波那契数列联系起来.,他在很有名的《斐波那契季刊》(《Fibonacci Quarterly》3,117)中发表了《Non-Fibonacci Numbers》.从中我们得到这样的启示:能不能用斐波那契数列证明那些原来用Beatty定理的竞赛试题呢?应该是能的!我们以例2为例.

其实例2原来只是要求$f(240)$,但由于最早将它介绍到我国来的1978年8月19日的《参考消息》印刷有误,所以才变成为$f(2n)$.现在我们来求$f(240)$.

解 设$\{f_i\}$为斐波那契数列,令$b_i=f_{i+1}$,则$b_0=1,b_1=2,b_3=3,b_4=5,\cdots$则每一个$n\in\mathbf{N}$,都可唯一表为
$$n=a_kb_k+a_{k-1}b_{k-1}+\cdots+a_0b_0$$
这里$a_i\in\{0,1\}(i=0,\cdots,n)$,且没有两个相邻的$a_i$都等于1.我们称$(a_ka_{k-1}\cdots a_0)$为$n$在斐波那契基下的表示,记为$n=(a_ka_{k-1}\cdots a_0)_f$,例如
$$1=(1)_f,2=(10)_f,3=(100)_f,4=(101)_f$$
$$5=(1000)_f,6=(1001)_f,7=(1010)_f,\cdots$$

我们定义一个函数$\mu(n)$表示n在斐氏基下尾部0的个数.令
$$N_1=\{n\mid\mu(n)\equiv0(\bmod 2)\}$$
$$N_2=\{n\mid\mu(n)\equiv1(\bmod 2)\}$$
则$N=N_1\cup N_2$,且$N_1\cup N_2=\varnothing$,并记$f(n)$为N_1中的第n个元素,$g(n)$为N_2中的第n个元素.

下面我们给出一种在斐波那契基下计算$f(n)$的方法.我们规定$f(n)$的值如下:
$$f(n)=f((a_ka_{k-1}\cdots a_0)_f)=\begin{cases}(a_ka_{k-1}\cdots a_00)_f-1,\mu(n)\equiv1(\bmod 2)\\(a_ka_{k-1}\cdots a_00)_f,\mu(n)\equiv0(\bmod 2)\end{cases}$$
容易计算
$$f(1)=f((1)_f)=(10)_f-1=2-1=1$$

$$f(2)=f((10)_f)=(100)_f=3$$

$$f(3)=f((100)_f)=(1000)_f-1=5-1=4$$

$$\vdots$$

$$f(240)=f((100000001010)_f)=(100000010100)_f=$$
$$377+8+3=388$$

以下只须证明:$f(n),g(n)$ 满足条件 $g(n)=f(f(n))+1$,对每一个 $f(n)=(C_kC_{k-1}\cdots C_0)f$,$\mu(f(n))\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$,$f(f(n))=(C_kC_{k-1}\cdots C_00)_f-1$,则 $f(f(n))+1=(C_kC_{k-1}\cdots C_00)_f$,$\mu(f(f(n))\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,$f(f(n))+1\in N_2$,且恰好为 $g(n)$.

11 互补序列的进一步研究及其在数学竞赛中的应用

1954 年夏天《美国数学月刊》发表了两位加拿大数学家J. Lambek 和 L. Moser对互补序列的进一步研究,他们首次将互补序列与互逆序列建立起了关系.

若对一个函数 $f(x)$ 来讲,如果有一个函数 f^* 使得 $f^*(f(x))=x$,则称 f^* 为 f 的逆函数.若还有 $f(f^*(x))=x$,则 f 与 f^* 称为互逆函数.如果两序列分别以两个互逆的函数 f 与 f^* 为其通项,则此两序列 $\{f(n)\}$ 与 $\{f^*(n)\}$ 称为互逆序列.

Lambek 和 Moser 研究了一类特殊的互逆序列,其通项是由如下可互逆函数定义的.

定义 $f(x)$ 是一个在 $x\geqslant 0$ 时严格递增的函数,且

$$f^*(y)=\max\{x\geqslant 0\mid f(x)\leqslant y\}$$

容易证明如此定义的 f 与 f^* 是互逆的,即有 $f^*(f(x))=x$.

设 $f(x_1)=n$,现在 $f^*(n)$ 等于使得 $f(x)\leqslant n$ 的最大的 x,亦即使得 $f(x)\leqslant f(x_1)$ 的最大的 x.显然 x_0 是满足这个不等式的一个值,因 f 是严格递增的,所以 x_0 就是最大的这样的 x.于是 $f^*(n)=f^*(f(x_0))=x_0$,对任意 x_0 都成立.

Lambek 和 Moser 证明了如下的定理:

定理 12 设 $F(n)=f(n)+n$,$G(n)=g(n)+n$,则 $\{F(n)\}$,$\{G(n)\}$ 为互补序列的充要条件是 $\{f(n)\}$ 与 $\{g(n)\}$ 为互补序列,即 $f^*(n)=g(n)$,$g^*(n)=f(n)$.

证明见 5.

令人惊奇的是在其他的分支中也有类似的结论,例如 1958 年苏联恰罗涅日大学的 Krasnosel'skii Mark Alexandovic(1920—),对所谓的 N 函数也证明了类似的结论.

函数 f 称为 N 函数,如果它能表示为

$$f(u)=\int_0^{|u|}p(t)\mathrm{d}t$$

其中函数 p 对 $t\geqslant 0$ 是右连续的,对 $t>0$ 是正的和非减的,并且满足

$$p(0)=0,\lim_{t\to+0}p(t)=+\infty$$

设 p 是上述定义的函数,对 $s\geqslant 0$,定义函数 q 为

$$q(s)=\sup_{p(t)\leqslant s}t$$

(实际上 $q(s)$ 为 p 的逆函数),则函数 $f(u)=\int_0^{|u|}p(t)\mathrm{d}t$ 和$g(v)=\int_0^{|v|}q(s)\mathrm{d}s$ 为互补函数.

Lambek和Moser定理(以下简称"L-M定理")的提出为数学竞赛注入了新的活力,它从两个方面开拓了命题的新方向.

一是逆序列的概念及性质开始出现在数学竞赛的试题中,例如第26届IMO预选题中有一题为:

试题D 定义自然数集 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的函数 f 为

$$f(n)=\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]$$

$$F(k)=\min\{n\in n\mid f^{*}(n)>0\}$$

其中 $f^{k}=f\circ f\circ\cdots\circ f$ 为 f 复合 k 次.求证:

$$F(k+2)=3F(k+1)-F(k)$$

它的证明必须要用到可逆序列,先构造一个逆函数

$$G(m)=\min\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\geqslant m\}$$

事实上它等同于

$$f^{*}(m)=\max\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\leqslant m\}$$

所以一定有 $$f(G(m))=m$$

且容易验证 $$G(m)=3m-f(m)$$

并且利用前式可以证明 $F(k+1)=G(F(k))$,所以可得

$$\begin{aligned}F(k+2)=G(F(k+1))&=3F(k+1)-f(F(k+1))=\\&3F(k+1)-f(G(F(k)))=\\&3F(k+1)-F(k)\end{aligned}$$

可以看出可逆函数 $G(m)$ 在解题中扮演了重要的角色.

二是互补序列和互逆序列的相互关系的应用.L-M定理为我们提供了互补序列和互逆序列相互转化的方式,可分为两种类型.

类型一:已知 $\{F(n)\}$,$\{G(n)\}$ 为互补序列,已给 $F(n)$ 的表达式,求 $G(n)$ 的表达式.

解 由

$$F(n)=f(n)+n\Rightarrow f(n)=F(n)-n\Rightarrow$$
$$f^{*}(n)=(F(n)-n)^{*}\Rightarrow G(n)=f^{*}(n)+n$$

公式为 $$G(n)=(F(n)-n)^{*}+n$$

(1) 当 $F(n)=n^{2}$ 时即为第27届普特南数学竞赛试题.

(2) 当 $F(n)=3n^{2}-2n$ 和 $\left[\frac{n^{2}+2n}{3}\right]$ 时即为第29届IMO预选题.

类型二:证明对于参数 u,v,存在互补序列.

这类问题是存在性的,但往往可以构造出来.如1985年第26届IMO候选题.

试题E $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$,对实数 x,y,令 $S(x,y)=\{s\mid s=[nx+y],n\in\mathbf{N}\}$.求证:若 $r>1,r\in\mathbf{Q}$,则存在 $u,v\in\mathbf{R}$,使

$$S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing$$
$$S(r,0)\cup S(u,v)=\mathbf{N}$$

证明 由于 $r\in\mathbf{Q}$,故可设 $r=\frac{p}{q}$,$p,q\in\mathbf{Z}$,且由 $r>1$ 知 $p>q$,故可选取

$$u=\frac{p}{p-q} \text{ 及 } u=-\frac{\varepsilon}{p-q}$$

其中 ε 是一个非零的充分小的正数(小到什么程度后面定).

由于

$$S(r,0)=[nr]=\left[n\frac{p}{q}\right]=\left[n+\frac{p-q}{q}n\right]=n+\left[\frac{p-q}{q}n\right]$$

$$S(u,v)=[nu+v]=\left[\frac{pn}{p-q}-\frac{\varepsilon}{p-q}\right]=n+\left[\frac{nq-\varepsilon}{p-q}\right]$$

故由 L－M 定理可知只须证明

$$f(n)=\left[\frac{p-q}{q}n\right],g(n)=\left[\frac{nq-\varepsilon}{p-q}\right]$$

是互逆序列,即 $g(n)=f^*(n)$ 即可.

$$f^*(n)=\max\left\{m\left|\left[\frac{p-q}{q}m\right]<n\right.\right\}$$

考察不等式

$$\left[\frac{p-q}{q}m\right]<n\Rightarrow\left(\frac{p-q}{q}m\right)<n$$

由实数的连续性可知,一定存在一个充分小的 $\varepsilon>0$,使得

$$\frac{\varepsilon}{q}+\frac{p-q}{q}m\leqslant n$$

ε 取不超过 $q(n+m)-pm$ 的实数,解上面的不等式可得

$$m\leqslant\frac{qn-\varepsilon}{p-q}\Rightarrow f^*(n)=\max m=\left[\frac{qn-\varepsilon}{p-q}\right]=g(n)$$

四年以后,在 1989 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克中,将上述预选题改编为如下试题:

试题 F 已知一对互素的正数 $p>q$,求所有的实数 c,d,使得集合

$$A=\left\{\left[\frac{np}{q}\right]\mid n\in\mathbf{N}\right\},B=\{[cn+d]\mid n\in\mathbf{N}\}$$

满足 $A\cap B=\varnothing,A\cup B=\mathbf{N}$,这里 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

值得指出的是本题如不用 L－M 定理将会使证明变得非常复杂,并且得用到极限的手段.这样的证明可见于《国家数学奥林匹克国家队员竞赛试题》(邓宗琦等编,华中师范大学出版社)一书.

L－M 定理的应用范围极广,由此可以编出许多数学竞赛试题,仅举两例.

例 7 当 $F(n)=[e^m]$ 时,利用 L－M 定理可以证明第 n 个不是$[e^m]$的形式的正整数是

$$G(n)=n+[\ln(n+1+[\ln(n+1)])]$$

这里 $m\geqslant1$,e 表示自然对数的底,ln 为自然对数.

显然可将 $F(n)$ 改写成 $F(n)=n+[e^m-n]$,故 $f(n)=[e^m-n]$.所以只须证 $f^*(n)=[\ln(n+1+[\ln(n+1)])]$.而这是容易的,但用其他办法却有一定的难度.

例 8 当取 $F(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$ 时,即 $F(n)$ 是一个三角形数时(是指若干个自 1 开始的相继整数之和),则第 n 个非三角形数为 $n+\langle\sqrt{2n}\rangle$,其中$\langle x\rangle$ 表示距离 x 最近的整数.

通过以上对竞赛中互补型序列的考察,我们可以得出这样的结论:只有那些背景深远的竞赛试题才能称为数学奥林匹克试题中的精品,只有这些精品才能引起人们持久的兴趣,只

有这种持久的兴趣才使得数学奥林匹克事业常盛不衰.进一步挖掘,还有如下的结论:

定理 13 α,β 为两个正实数,对于所有正整数 n,已知 $[n\alpha]+[n\beta]=[n(\alpha+\beta)]$,求证:$\alpha,\beta$ 中至少有一个为正整数,这里 $[nx](x=\alpha,\beta$ 或 $\alpha+\beta)$ 表示不超过 nx 的最大整数.

证明 用反证法,设 α,β 都不是正整数.记

$$\alpha=[\alpha]+\alpha_1,0<\alpha_1<1$$

$$\beta=[\beta]+\beta_1,0<\beta_1<1 \qquad ①$$

那么,有

$$[n\alpha]+[n\beta]=(n[\alpha]+n[\beta])+([n\alpha_1]+[n\beta_1])$$

$$[n(\alpha+\beta)]=n([\alpha]+[\beta])+[n(\alpha_1+\beta_1)] \qquad ②$$

利用题目条件,对于任意正整数 n,有

$$[n\alpha_1]+[n\beta_1]=[n(\alpha_1+\beta_1)] \qquad ③$$

我们首先证明 $\alpha_1+\beta_1<1$.用反证法,如果 $\alpha_1+\beta_1\geqslant 1$,在 ③ 中取 $n=1$,应有

$$[\alpha_1]+[\beta_1]=[\alpha_1+\beta_1]=1 \qquad ④$$

但从 ① 知道 ④ 左边为零,矛盾.

对于任意正实数 x,记

$$\{x\}=x-[x]$$

由上式得

$$\alpha_1=\{\alpha\},\beta_1=\{\beta\} \qquad ⑤$$

由于 $n\alpha_1+n\beta_1=n(\alpha_1+\beta_1)$,此等式减去 ③,再利用 ⑤,有

$$\{n\alpha_1\}+\{n\beta_1\}=\{n(\alpha_1+\beta_1)\} \qquad ⑥$$

我们知道,如果 $\alpha_1+\beta_1$ 是正有理数,则存在正整数 p,q,使得

$$\alpha_1+\beta_1=\frac{p}{q} \qquad ⑦$$

那么

$$\{q(\alpha_1+\beta_1)\}=q(\alpha_1+\beta_1)-[q(\alpha_1+\beta_1)]=p-p=0 \qquad ⑧$$

当 $\alpha_1+\beta_1$ 是正无理数时,我们需要下述定理:

定理 14(有理数逼近实数定理) x 是一个正的无理数,那么一定存在两个单调递增的正整数数列 $\{p_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{q_n\mid n\in\mathbf{N}\}$,满足 $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$.

证明 用 a_0 表示 x 的整数部分,即 $a_0=[x]$.令

$$\frac{1}{x_1}=x-a_0 \qquad ⑨$$

x_1 也是一个正无理数,而且大于 1.取正整数 $a_1=[x_1]$,再令

$$\frac{1}{x_2}=x_1-a_1 \qquad ⑩$$

如此继续下去,对于 $j=2,3,\cdots,n$,令

$$\frac{1}{x_{j+1}}=x_j-a_j \qquad ⑪$$

这里 $a_j=[x_j]$ 都是正整数,$x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}$ 全是大于 1 的正无理数.

这样,我们就得到一分数表示式

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}} \quad ⑫$$

⑫ 可简记为

$$x = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, x_{n+1}] \quad ⑬$$

利用 ⑫ 与 ⑬ 的关系,我们有

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} =$$

$$\frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} \quad ⑭$$

记

$$p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$$

$$p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 = a_2 p_1 + p_0$$

$$q_2 = a_1 a_2 + 1 = a_2 q_1 + q_0 \quad ⑮$$

那么,有

$$[a_0] = \frac{p_0}{q_0}, [a_0, a_1] = \frac{p_1}{q_1}, [a_0, a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2} \quad ⑯$$

引入二列数(参考 ⑮)

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad ⑰$$

这里正整数 $n \geqslant 2$.我们要证明

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \quad , n \in \mathbf{N} \quad ⑱$$

$$p_n q_{n-1} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n, \text{正整数 } n \geqslant 2 \quad ⑲$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \quad , n \in \mathbf{N} \quad ⑳$$

我们要说明,这时一切 $a_j (j = 0,1,2,\cdots,n)$ 全是正实数,公式 ⑫ 是一个形式的定义.这样做的目的是便于 ⑳ 的证明,下文将会提到.

对于公式 ⑱ 的证明,需对 n 用归纳法.当 $n = 1$ 时,利用 ⑮,有

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1 \quad ㉑$$

因此,当 $n = 1$ 时,⑱ 成立.设当 $n = k$ 时,有

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \quad ㉒$$

则当 $n = k + 1$ 时,有

$$\begin{aligned} & p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = \\ & (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) = \quad \text{(利用 ⑰)} \\ & p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k \end{aligned} \quad ㉓$$

因此 ⑱ 成立.现证明公式 ⑲,用 ⑱ 的结果,很容易得到

$$\begin{aligned}&p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=\\&(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})= \quad (\text{利用⑲})\\&a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=\\&a_n(-1)^{n-2}(\text{利用⑱})=(-1)^na_n\end{aligned} \tag{24}$$

这样公式⑲也得到了.现在证明⑳.对 n 用数学归纳法,奠基工作⑯已经做了.设当 $n=m$ 时,有

$$[a_0,a_1,\cdots,a_m]=\frac{p_m}{q_m} \tag{25}$$

这里 $$p_m=a_mp_{m-1}+p_{m-2},q_m=a_mq_{m-1}+q_{m-2}(\text{公式⑰})$$

当 $n=m+1$ 时,由㉒和⑬,有

$$[a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},a_m,a_{m+1}]=\left[a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right]=\frac{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)p_{m-1}+p_{m-2}}{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)q_{m-1}+q_{m-2}}$$

(利用归纳法假设㉕,在㉕中,a_m 是任意一个正实数)

$$\frac{(a_mp_{m-1}+p_{m-2})+\frac{p_{m-1}}{a_{m+1}}}{(a_mq_{m-1}+q_{m-2})+\frac{q_{m-1}}{a_{m+1}}}=\frac{p_m+\frac{p_{m-1}}{a_{m+1}}}{q_m+\frac{q_{m-1}}{a_{m+1}}}=(\text{利用⑰})$$

$$\frac{a_{m+1}p_m+p_{m-1}}{a_{m+1}q_m+q_{m-1}}=\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}(\text{再次利用⑰})$$

公式⑳成立.

现在我们来证明有理数逼近实数定理.

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全是正整数.利用⑬,有

$$x=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}]=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}(\text{利用公式⑳}) \tag{26}$$

所以 $$x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}=\frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}(\text{利用公式⑱}) \tag{27}$$

由于 a_0 是非负整数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正整数,从公式⑮和⑰可以知道 $p_i,q_i(i\in\mathbf{N})$ 都是正整数,而且满足

$$\begin{aligned}&p_0<p_1\leqslant p_2<(\text{当 }a_0=0,a_2=1\text{ 时取等号})\\&p_3<\cdots<p_n<\cdots\\&q_1<q_2<q_3<\cdots<q_n<\cdots\end{aligned} \tag{28}$$

显然 $p_n\geqslant n-1,q_n\geqslant n$.

利用㉗,两端取绝对值,有

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}<\frac{1}{q_n^2}\quad ,n\in\mathbf{N} \tag{29}$$

这里利用 $x_{n+1} > 1, q_{n-1} > 0$.

有了以上的定理,我们回到例 22 的证明上来,当 $\alpha_1 + \beta_1$ 是正无理数时,令 $x = \alpha_1 + \beta_1$. 在公式 ㉗ 中取 $n = 2k(k \in \mathbf{N})$,两端乘以正整数 q_n,有

$$0 < (\alpha_1 + \beta_1)q_{2k} - p_{2k} = \frac{1}{x_{2k+1}q_{2k} + q_{2k-1}} < \frac{1}{q_{2k}} \quad ㉚$$

由 ㉚,有

$$p_{2k} < (\alpha_1 + \beta_1)q_{2k} < p_{2k} + \frac{1}{2k} \quad ㉛$$

上式表明,对于正实数 ε,这里 $\varepsilon < \min(\alpha_1, \beta_1) < 1$,一定有正整数 q_{2k} 存在,使得

$$\{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} < \varepsilon \quad ㉜$$

实际上只要取正整数 k 满足$\frac{1}{2k} < \varepsilon$ 即可.

由 ⑥ 和 ㉜,有

$$\{q_{2k}\alpha_1\} < \varepsilon, \{q_{2k}\beta_1\} < \varepsilon \quad ㉝$$

而

$$(q_{2k} - 1)(\alpha_1 + \beta_1) = q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_1 + \beta_1) = [q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)] + \{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} - (\alpha_1 + \beta_1) \quad ㉞$$

从上面叙述,有

$$\{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} - (\alpha_1 + \beta_1) < \varepsilon - (\alpha_1 + \beta_1) < 0 \quad ㉟$$

于是

$$[(q_{2k} - 1)(\alpha_1 + \beta_1)] = [q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)] - 1 \quad ㊱$$

另一方面

$$(q_{2k} - 1)\alpha_1 = q_{2k}\alpha_1 - \alpha_1 = [q_{2k}\alpha_1] + \{q_{2k}\alpha_1\} - \alpha_1 < [q_{2k}\alpha_1] \quad (\text{利用 ㉝ 及 } \varepsilon < \alpha_1) \quad ㊲$$

类似有

$$(q_{2k} - 1)\beta_1 < [q_{2k}\beta_1] \quad ㊳$$

则

$$[(q_{2k} - 1)\alpha_1] = [q_{2k}\alpha_1] - 1$$
$$[(q_{2k} - 1)\beta_1] = [q_{2k}\beta_1] - 1 \quad ㊴$$

由 ③,应当有

$$[(q_{2k} - 1)(\alpha_1 + \beta_1)] = [(q_{2k} - 1)\alpha_1] + [(q_{2k} - 1)\beta_1] \quad ㊵$$

但是由 ㊱ 和 ㊴ 知 ㊵ 不可能成立.矛盾.

当 $\alpha_1 + \beta_1$ 是正有理数时,利用公式 ⑥ 和 ⑧,得

$$\{q\alpha_1\} = 0, \{q\beta_1\} = 0$$

在上述证明中,取 $q_{2k} = q$,公式 ㉜ ~ ㊵ 的叙述都仍然有效.因此,也推出矛盾.

当 α, β 中有一个是正整数时,题目等式当然对任意正整数 n 成立.

12 Beatty 定理的两个变形

定理 15 归纳地定义数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$如下

$$a_1=1,b_1=2,c_1=4$$

a_n 等于不在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1};b_1,b_2,\cdots,b_{n-1};c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 中的最小的正整数. b_n 等于不在 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_{n-1};c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 中的最小正整数, $c_n=2b_n+n-a_n$.求证

$$\frac{9-5\sqrt{3}}{3}<(1+\sqrt{3})n-b_n<\frac{4(3-\sqrt{3})}{3} \quad ㊶$$

证明 先证明两个引理.

引理 3 $c_{n+1}-c_n\geqslant 2$.

证明 对 n 使用数学归纳法:

(1) $n=1$ 时直接计算知 $c_2-c_1=9-4>2$.

(2) 假定对一切 $n\leqslant k-1$,都有 $c_{n+1}-c_n\geqslant 2$.当 $n=k$ 时,有

$$c_{k+1}-c_k=2b_{k+1}+k+1-a_{k+1}-2b_k-k+a_k=$$
$$2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1$$

由$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的定义方式,我们可以看出 $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_k<b_k<a_{k+1}<b_{k+1}<\cdots$.注意到 $c_{k+1}>b_{k+1}$,于是利用归纳假设可知,在 a_k 和 b_k 之间, b_k 和 a_{k+1} 之间, a_{k+1} 和 b_{k+1} 之间至多有一个数列$\{a_n\}$中的项,从而 $b_{k+1}-b_k\geqslant 2$, $a_{k+1}-a_k\leqslant 4$,并且 $a_{k+1}-a_k=4$ 时, $b_{k+1}-b_k\geqslant 3$.于是在 $a_{k+1}-a_k=4$ 时,有

$$2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1\geqslant 6-4+1=3>2$$

于是

$$c_{k+1}-c_k\geqslant 2$$

从而 $n=k$ 时命题成立.引理 1 获证.

引理 4 $2\geqslant b_n-a_n\geqslant 1$.

证明 由引理 3 我们知道不存在两个连续的正整数,它们都是$\{c_n\}$中的项,从而引理 4 成立.

现在我们来证明式㊶.对 n 使用数学归纳法:

(1) 当 $n=1,2,3$ 时,直接计算便知㊶成立.

(2) 假定对一切 $n\leqslant j-1$,式㊶成立.在 $n=j$ 时,不妨设 $c_n<b_j<c_{n+1}$,于是由 $b_j<c_j$ 可知 $h\leqslant j-1$,并且根据 b_n 时的定义方式,我们有

$$b_j=2j+h \quad ㊷$$

故由

$$b_j\geqslant c_h+1=h+1+2b_n-a_h=$$
$$h+1+b_n+(b_h-a_h)\geqslant$$
$$h+2+b_h>h+2+(1+\sqrt{3})h-\frac{4(3-\sqrt{3})}{3}$$

及式㊷可知

$$h<(\sqrt{3}-1)j-\frac{9-5\sqrt{3}}{3}$$

从而

$$b_j = 2j + h < (\sqrt{3} + 1)j - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3} \qquad ㊸$$

又因为

$$\begin{aligned} b_j &\leqslant a_{h+1} - 1 = h + 2b_{h+1} - a_{h+1} \leqslant \\ & h + (b_{h+1} - a_{h+1}) + b_{h+1} \leqslant h + 2 + b_{h+1} < \\ & h + 2 + (h + 1)(1 + \sqrt{3}) - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

所以

$$h > (\sqrt{3} - 1)j - \frac{4(3 - \sqrt{3})}{3}$$

从而

$$b_j = 2j + h > (\sqrt{3} + 1)j - \frac{4(3 - \sqrt{3})}{3} \qquad ㊹$$

综合㊸,㊹可知,$n = j$ 时㊶成立,从而式㊶得证.

(六)Catalan 猜想

1 引 言

1976 年 12 月 4 日举行的第 37 届普特南数学竞赛上午试题A - 3 为:

试题 A 求方程

$$|p^r - q^s| = 1 \quad ①$$

的整数解,其中 p,q 是素数,r,s 是大于 1 的正整数,并证明你所得到的解是全部解.

1978 年 1 月号的《美国数学月刊》发表了 A.P.Hillman, G.L.Alexanderson, L.F. Klosimeki 的总结文章,他们给出的解法为:

我们证明只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 所给出的解,即 $(p,r,q,s) = (3,2,2,3)$ 或 $(2,3,3,2)$.

很明显 p 和 q 中有一个是 2. 假如 $q = 2$,则 p 是一个适合 $p^r \pm 1 = 2^s$ 的奇素数,假如 r 是奇数,$(p^r \pm 1)/(p \pm 1)$ 是奇整数 $p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp p^{r-4} + \cdots + 1$. 因为 $r > 1$,故它大于 1. 这就与 2^s 没有这样的因子这个事实相矛盾.

现在我们尝试 r 是一个偶数 $2t$,则 $p^r + 1 = 2^s$,可推出

$$2^s = (p^t)^2 + 1 = (2n+1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2$$

这是不可能的,因为对于 $s > 1$ 有 $4 \mid 2^s$,而 $4 \nmid (4n^2 + 4n + 2)$,还有 $r = 2t$ 和 $p^r - 1 = 2^s$ 导出

$$(p^t)^2 - 1 = (2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1) = 2^s$$

因为或者 n 或者 $n + 1$ 是奇数,所以仅对 $n = 1, s = 3, p = 3$ 与 $r = 2$ 这才是可能的.

我们说这个解答固然简单,但是有一个疑问开始的断言:只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 给出的解,这点是怎样想到的?

2 Catalan 猜想

实际上,试题 A 不过是著名的 Catalan 猜想的一个特殊形式.

Eagene Cloarlas Catalan(1814—1894) 是比利时著名数学家,布鲁塞尔科学院院士,毕业于巴黎多科工艺学校,共写有 200 多篇关于各种数学问题的研究报告.

Catalan 曾于 1842 年提出猜想:除 $8 = 2^3, 9 = 3^2$ 外,没有两个连续自然数都是正整数的乘幂,即在整数 $x > 1, y > 1, m > 1, n > 1$ 时,除 $m = y = 2, n = x = 3$ 外,方程 $x^m - y^n = 1$ 无解. 或者,不定方程 $x^p - y^q = 1$,p,q 是素数,除 $p = 2, x = 3, q = 3, y = 2$ 外,没有其他的正整数解.

如果事先并不知道这个背景去解这个试题 A 就要从头开始,费一些周折了.

首先去掉绝对值符号,因 p 与 q,r 与 s 的对称性,故不妨设 $p^r > q^s$,可以只考虑方程

$$p^r - q^s = 1 \qquad ②$$

的整数解.

显然,p,q 不能全为奇素数,否则,$1 = p^r - q^s$ 是偶数,矛盾.$p \neq q$,否则,$1 = p^r - q^s$,有大于 1 的约数,矛盾.故 p,q 一定有一个是唯一的偶素数 2.

(1) 当 $p = 2$ 时,如果 $s = 2s'$ 是偶数,设 $q = 2q' + 1$,则

$$q^s + 1 = (2q' + 1)^{2s'} + 1 \equiv 2(\bmod 4)$$

而 $p^r = 2^r, r > 1$,故 $p^r \equiv 0(\bmod 4)$.故 s 只可能是奇素数,$s \geqslant 3$.

$$p^r = 2^r = q^s + 1 = (q+1)(q^{s-1} - q^{s-2} + \cdots - q + 1)$$

故 $q+1$ 只含素因子 2.设 $q + 1 = 2^t(t \geqslant 2)$,则

$$2^t = q^s + 1 = -1 + 2^t s - C_s^2(2^t)^2 + \cdots + 1 =$$
$$2^t(s - C_s^2 2^t + \cdots)$$

因为 $C_s^1 - C_s^2 2^t + \cdots$ 与 s 有相同的奇偶性,故它是奇数,只能为 1.于是有 $t = r$,从而方程 ② 化为

$$2^r - (2^r - 1)^s = 1$$

得 $s = 1$,与要求 $s > 1$ 不合,故 p 不能取 2.

(2) 当 $q = 2$ 时,则由 ② 得

$$2^s = p^r - 1 = (p-1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1)$$

可知 $p - 1$ 仅含素因子 2,设 $p - 1 = 2^t(t \geqslant 1), t = 2^u r'(u \geqslant 0, r'$ 是奇数$)$,则

$$2^s = (2^t + 1)^r - 1 = 1 + 2^t r + C_r^2(2^t)^2 + \cdots - 1 =$$
$$2^{t+u}(r' + r'(r-1)2^{t-1} + 1\cdots) \qquad ③$$

若 $t \geqslant 2$,则 $r' + r'(r-1)2^{t-1} + \cdots$ 是大于 1 的奇数,故 ③ 不成立,则 $t = 1$,即 $p = 3$.这时,由 ② 得

$$2^s = 3^r - 1 = (4-1)^r - 1 =$$
$$(-1)^r + C_r^1(-1)^{r-1} \cdot 4 + C_r^2(-1)^{r-2} \cdot 4^2 + \cdots - 1$$

若 r 是奇数,由上式右边不能被 4 整除,从而不能成立.若 $r \geqslant 4$ 是偶数,则上式右边等于

$$-4r + 8r(r-1) - \cdots = -4r(1 - 2(r-1) + \cdots)$$

$(1 - 2(r-1) + \cdots)$ 是奇数,它只能为 -1,即 $2^s = 3^r - 1 = 4r$.

当 $r \geqslant 4$ 时

$$3^r - 1 = (1+2)^r - 1 \geqslant 2r + C_r^2 \cdot 2^2 = 2r^2 \geqslant 4r$$

故 r 只能为 $2, 2^s = 3^2 - 1 = 8$,则 $s = 3$,方程 ② 的解只能是 $p = 3, q = 2, r = 2, s = 3$.考虑到对称性,原方程有两组解

$$p = 3, q = 2, r = 2, s = 3$$

和

$$p = 2, q = 3, r = 3, s = 2$$

从这个证明可以看出:站的高才能证得简.

3 与 Catalan 猜想有关的竞赛题

Catalan 猜想的叙述是初等的,证明是高深的,这正是数学奥林匹克命题的源泉之一.我们用取特例法可得出以下的试题:

试题 B 求方程 $2^m-3^n=1$ 在自然数集内的所有解.

(前苏联数学竞赛)

解 显然原方程有一组解 $m=2,n=1$,我们将证明这是唯一的一组解.

假设 $m>2$,我们来讨论 n:

(1) 若 n 为偶数时,则 $3^n=3^{2k}=9^k\equiv 1 \pmod 8$,所以当 n 为偶数时无解.

(2) 若 n 为奇数且 $n>1$ 时

$$3^{2k+1}+1=9^k\cdot 3+1\equiv 3+1\equiv 4 \pmod 8$$

而 $2^m\equiv 0 \pmod 8$,所以当 n 为大于 1 的奇数时,方程无解.

所以方程仅有解,$m=2,n=1$.

试题 C 求方程 $2^x+1=y^2$ 的自然数解.

(1977 年美国纽约数学竞赛)

解 将方程改写为 $2^x=(y-1)(y+1)$,则对 $x,y\in \mathbf{N}$,$y-1,y+1\in \mathbf{Z}^+$ 都是 2^x 是因数,即 $y-1=2^p,y+1=2^q$,其中,$p,q\in \mathbf{Z}^+,p<q$,因此

$$2^q-2^p=(y+1)-(y-1)=2$$

即 $2^p(2^{q-p}-1)=2$.注意,$q-p\leqslant 1$,否则奇数 $2^{q-p}>1$ 将是 2 的因数,这是不可能的,所以 $q=p+1$,且 $2^p(2-1)=2$,即 $p=1,q=2$,从而 $y=3$.经验证,$y=3,x=3$ 为方程的解.

本题是 Catalan 猜想当 $x=y,y=2,m=2,n=x$ 时的特例.

试题 D 证明:方程 $(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$ 没有自然数解.

(1980 年民主德国数学奥林匹克)

证明 设 $x,y,z\in \mathbf{N}$ 满足方程

$$((2x)^x+1-(2x)^x)-1=y^{z+1}$$

且因 $k=(2x)^x+1$ 与 $m=(2x)^x-1$ 为奇数,故

$$(k,m)=(k,k-m)=(k,2)=1$$

即 k 与 m 互素.由此可得存在 $p,q\in \mathbf{N}$,使得 $k=p^{z+1},m=q^{z+1}$,于是

$$2=p^{z+1}-q^{z+1}=(p-q)(p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z),p\geqslant q+1$$

因此

$$2\geqslant p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z\geqslant p^2+q^2\geqslant$$
$$p+q>2q\geqslant 2$$

矛盾,所以原方程没有自然数解.

本题是 Catalan 猜想当 $x=2x,y=y,n=2x,m=z+1$ 时的特例.

试题 E 考虑方程 $x^n+1=y^{n+1}$,其中 n 是自然数,且 $n\geqslant 2$.求证:上面的方程当 x,y 是自然数,且 x 与 $n+1$ 无公因子时无解.

(1980 年芬兰等四国国际数学竞赛)

证法 1 注意当 $y=1$ 时,必定有 $x=0$,故 x 在自然数集合中无解,因此只要考虑 $y\geqslant 2$ 的情况.令 $y-1=z$,则 $z\geqslant 1$,同时原方程变为

$$x^n=y^{n+1}-1=(1+z)^{n+1}-1=$$
$$z^{n+1}+C_{n-1}^1z^n+\cdots+C_{n+1}^nz$$

即

$$x^n=z(z^n+C_{n+1}^1z^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n) \quad ①$$

现证 z 与 $z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^1$ 无公因子,若有公因子,则必定存在一个素数 p,使

$$z = p^\alpha A \tag{②}$$

$$z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^1 = p^\beta B \tag{③}$$

其中 α,β 是自然数,且 $p \nmid A, p \nmid B$.

从 ② 和 ③ 可得

$$\begin{aligned} n + 1 = C_{n+1}^1 = &(z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^n) - \\ &z(z^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{n+1}^{n-1}) = \\ &p^\beta B - p^\alpha A(z^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{n+1}^{n-1}) = \\ &p(p^{\beta-1}B - p^{\alpha-1}Az^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{m+1}^{n-1}) \end{aligned}$$

所以 p 是$(n+1)$的一个因子,从而由 ① 得到

$$x^n = p^\alpha A p^\beta B = p^{\alpha+\beta}AB$$

故 $p \mid x^n$.

因为 p 是素数,所以一定有 $p \mid x$,亦即 p 是 x 的一个因子,这样 p 就是 x 和 $n+1$ 的公因子,而这与 x 和 $n+1$ 无公因子的假设相矛盾的.现在设

$$z = A' \tag{④}$$

$$z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^n = B' \tag{⑤}$$

那么由上面的结论可知,A' 和 B' 一定是互素的,即它们没有公共的约数.但从 ④ 知

$$x^n = A'B'$$

因此如果把 A' 和 B' 分别分解为一些素因子幂的乘积的话,即如果

$$A' = b_1^{d_1}\cdots b_s^{d_s}$$

$$B' = c_1^{e_1}\cdots c_k^{e_k}$$

其中 $b_1,\cdots,b_s$ 是 s 个互异的素数,$c_1,\cdots,c_k$ 也是 k 个互异的素数,$d_1,\cdots,d_s,e_1,\cdots,e_k$ 均是自然数,因为 A' 与 B' 没有公约数,所以集合 $\{b_1,\cdots,b_s\}$ 和集合 $\{c_1,\cdots,c_k\}$ 没有公共的元素.这样从

$$x^n = b_1^{d_1}\cdots b_s^{d_s}c_1^{e_1}\cdots c_k^{e_k}$$

中可以判知,$d_1,d_2,\cdots,d_s,e_1,\cdots,e_k$ 这些自然数都可以被 n 除尽.这样,一定有

$$A' = a^n,\quad B' = b^n$$

其中 a,b 是某两个自然数.这样从式 ⑤ 得到

$$\frac{(z+1)^n - 1}{z} = B' = b^n \tag{⑥}$$

但是

$$(z+1)^n < \frac{(z+1)^{n+1} - 1}{z} \tag{⑦}$$

这是因为 $z \geqslant 1$ 及 $n \geqslant 2$,故

$$1 < 4 = (1+1)^2 \leqslant (z+1)^n$$

所以

$$z(z+1)^n < (z+1)^{n+1} - 1$$

将上式两边再除以 z 就得到了 ⑦,此外我们还要证明

$$\frac{(z+1)^{n+1} - 1}{z} < (z+2)^n \tag{⑧}$$

这是因为要证明

$$z((z+2)^n-(z+1)^n)>(z+1)^n-1$$

而 $z((z+2)^n-(z+1)^n)=z((z+2)^{n-1}+(z+2)^{n-2}(z+1)+\cdots+(z+2)(z+1)^{n-1}+(z+1)^{n-1}]>z_n(z+1)^n$

但是因为 $z\geqslant 1$ 及 $n\geqslant 2$,故

$$(n-1)z-1\geqslant 1\times 1-1=0$$

所以 $(z+1)^{n-1}((n-1)z-1)\geqslant 0>-1$

故 $(z+1)^{n-1}(nz-z-1)>-1$

即 $nz(z+1)^{n-1}>(z+1)^{n-1}$

因此 $z((z+2)^n-(z+1)^n)>nz(z+1)^{n-1}>(z+1)^n-1$

所以式 ⑧ 成立.这样联合 ⑦,⑧ 两式得到

$$(z+1)^n<\frac{(z+1)^{n+1}-1}{z}<(z+2)^n$$

由式 ⑥ 代入,即得

$$(z+1)^n<b^n<(z+2)^n$$

即 $z+1<b<z+2$

而这与 b 是自然数相矛盾,所以原方程在所作的限制之下无解.

证法2 先设 $y>2$,$y-1$ 有素因子 p,因 $(y-1)\mid(y^{n+1}-1)$,故由方程得 $p\mid x$,而 $(x,n+1)=1$,故 $(p,n+1)=1$.又

$$x^n=(y-1)(y^n+y^{n-1}+\cdots+y+1) \quad ⑨$$

由 $y\equiv l(\mathrm{mod}\ y-1)\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}y^i\equiv n+1(\mathrm{mod}\ y-1)\Rightarrow p\mid\sum_{i=0}^{n}y^i$

由于 p 是 $y-1$ 的任意一个素因子,所以

$$(\sum_{i=0}^{n}y^i,y-1)=1$$

由 ⑨ 得

$$\sum_{i=0}^{n}y^i=u^n,u\mid x,u>0 \quad ⑩$$

但由于 $n>1$ 时

$$y^n<\sum_{i=0}^{n}y^i<(y+1)^n$$

故 ⑩ 不能成立.

当 $y=1$ 时,方程无正整数解;

当 $y=2$ 时,方程给出

$$x^n=2^{n+1}-1=\sum_{i=0}^{n}2^i \quad ⑪$$

而 $2^n<\sum_{i=0}^{n}2^i<3^n$.故式 ⑪ 不成立.

4 利用 Catalan 猜想编拟的竞赛训练题

我们可以给出几个与 Catalan 猜想有关的简单题目,当做竞赛的训练题.

取 $n = 2n + 1, y = 2, m = r$ 的特例.

试题 F 求证:Diophantus 方程

$$x^{2n+1} - 2^r = \pm 1 \quad ①$$

当 $x > 1$ 时,x, n, r 无整数解.

证明 假设 ① 有整数解 x, n, r,则

$$x^{2n+1} \pm 1 = (x \pm 1)(x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1) = 2^r \quad ②$$

当 $x > 1$ 时,$x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1 > 1$ 且为奇数,故存在奇数 p,满足

$$p \mid x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1$$

而 2^r 不被任何奇素数整除,故 ② 不成立.

取 $y = p$ 为奇素数,$x = 2$ 时的特例;及取 $x = p$ 为奇素数,$y = 2$ 时的特例得到下题.

试题 G 求证:当 $n > 1$ 时,不存在奇素数 p 和正整数 m,使 $p^n + 1 = 2^m$;当 $n > 2$ 时,不存在奇素数 p 和正整数 m,使

$$p^n - 1 = 2^m$$

证明 由上题知当 $2 \mid n$ 时,结论成立.现设 $2 \nmid n$,此时在

$$p^n + 1 = 2^m \quad ③$$

中,由于 $p \geqslant 3, n \geqslant 2$,故 $2^m = p + 1 \geqslant 10$,显然有 $m \geqslant 2$.对 ③ 取模 4 得 $2^m \equiv 0 \pmod 4$ 和 $p^n \equiv 1 \pmod 4$(因为奇数的平方模 8 余 1),故 $2 \equiv 0 \pmod 4$ 矛盾,结论 1 成立.

设 $n = 2k$,我们有

$$p^{2k} - 1 = 2^m \quad ④$$

因 ④ 得

$$(p^k - 1)(p^k + 1) = 2^m$$

故有 $p^k + 1 = 2^s, s > 0, k > 1$,同理可证.

取 $x = x, y = y, m = y, n = x$ 时的特例有下题.

试题 H 试证:Diophantus 方程

$$x^y = y^x + 1$$

只有两组正整数解 $x = 2, y = 1; x = 3, y = 2$.

证明 (1) 如果 x, y 同奇或同偶,则都有 $0 \equiv 1 \pmod 2$,此情形无解.

(2) 如果 x 偶 y 奇,则 $y = 1$ 时,$x^y = y^x + 1$ 给出 $x = 2, y \geqslant 3$ 时无解,否则,$x^y = y^x + 1$ 给出 $0 \equiv 2 \pmod 4$,矛盾.

(3) 如果 x 奇 y 偶,且 $x > 1$,下面证明

$$x^y = y^x + 1$$

只有一组正整数解 $x = 3, y = 2$.

设 $y = 2^t a, 2a, t \geqslant 1$,当 $t = 1$ 时,原方程可写成

$$(x^a + 1)(x^a - 1) = 2^x a^x \quad ⑤$$

由于 $(x^a + 1, x^a - 1) = 2$,因此 ⑤ 给出

$$2^{x-1} \mid x^a + 1 \quad 或 \quad 2^{x-1} \mid x^a - 1$$

又因
$$x^a+1=(x+1)(x^{a-1}-x^{a-2}+\cdots-x+1)$$
$$x^a-1=(x-1)(x^{a-1}+x^{a-2}+\cdots+x+1)$$
故有
$$2^{x-1}\mid x+1 \quad 或 \quad 2^{x-1}\mid x-1$$

当 $x>1$ 时,$2^{x-1}\mid x-1$ 显然是不可能成立的,由 $2^{x-1}\mid x+1$ 给出 $x=3$,由 $3^2=2^3+1$ 知道 $x=3,y=2$ 为一组解,如果 $y\geqslant 4$,用数学归纳法容易证明 $3^y>y^3+1$,因而 $3^y=y^3+1$ 无解.所以,$t=1$ 时原方程只有一组解 $x=3,y=2$.下面再证明 $t\geqslant 2$ 时,原方程无解.当 $t\geqslant 2$ 时,原方程可写成
$$(x^{y/2}+1)(x^{y/2^2}+1)\cdots(x^{y/2^{t-1}}+1)(x^a+1)(x^a-1)=2^{tx}a^x \quad ⑥$$
由于 x 为奇数,且 $1\leqslant k\leqslant t-1$ 时 $\frac{y}{2^k}$ 为偶数,因此
$$x^{y/2^k}+1\equiv 2(\bmod 4)$$
$$2\mid x^{y/2^k}+1,但\ 2^2\nmid x^{y/2^k}+1,1\leqslant k\leqslant t-1$$
注意到 $(x^a+1,x^a-1)=2$,因此⑥给出
$$2^{tx-t}\mid x^a+1 \quad 或 \quad 2^{tx-x}\mid x^a-1$$
由前面所证即知
$$2^{tx-t}\mid x+1 \quad 或 \quad 2^{tx-t}\mid x-1$$
但当 $x\geqslant 3,t\geqslant 2$ 时
$$2^{tx-t}=(2^t)^{x-1}\geqslant 4^{x-1}>x\pm 1$$
故
$$2^{tx-t}\nmid x\pm 1$$

也就是说,$t\geqslant 2,x>1$ 时,原方程无正整数解.

显然,$x=1$ 时,$y=0$.

综上所述,不定方程 $x^y=y^x+1$ 只有两组正整数解:$x=2,y=1;x=3,y=2$.

取 $x=x+1,m=y,y=x,n=y+1$ 时的特例,得到如下的题目:

试题 I 求出不定方程 $(x+1)^y=x^{y+1}+1$ 的全部正整数解.

解 我们将证明此方程只有两组正整数解.

(1) 如果 x 奇,y 奇.

i $x=1$ 时,$2^y=1^{y+1}+1$,给出 $x=y=1$.

ii $x>1$ 时,$(x+1)^y=x^{y+1}+1$,给出 $0\equiv 2(\bmod 4)$,因此 x 奇 y 奇时,方程只有一组解 $x=y=1$.

(2) 如果 x 奇,y 偶.

先把不定方程 $(x+1)^y=x^{y+1}+1$ 做如下变形
$$(x+1)^y-1=x^{y+1}$$
$$(x+1)^{y-1}+(x+1)^{y-2}+\cdots+(x+1)+1=x^y$$
$$(x+1)((x+1)^{y-2}+(x+1)^{y-3}+\cdots+(x+1)+1)=$$
$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+\cdots+x+1)$$
注意到 y 为偶数时
$$\frac{x^{y-1}+x^{y-1}+\cdots+x+1}{x+1}=x^{y-2}+x^{y-4}+\cdots+x^2+1 \quad ⑦$$
可以得到

$$(x+1)^{y-2}+(x+1)^{y-3}+\cdots+(x+1)+1=$$
$$(x-1)(x^{y-2}+x^{y-4}+\cdots+x^2+1) \qquad ⑧$$

但 ⑧ 给出 $1\equiv 0(\bmod 2)$,故 x 奇 y 偶时方程无解.

(3) 如果 x 偶,y 奇.

给出 $0\equiv 1(\bmod 2)$,此时原方程也无解.

(4) 如果 x 偶,y 偶.

i $x=2$ 时,$(x+1)^y=x^{y+1}+1$,给出 $3^y=2^{y+1}+1$.设 $y=2y_1$,可得

$$(3^{y_1}+1)(3^{y_1}-1)=2^{2y_1+1}$$

由

$$(3^{y_1}+1,3^{y_1}-1)=2$$

得

$$3^{y_1}-1=2,y_1=1,y=2,x=2$$

故 $x=2,y=2$ 时原方程的一组解.也就是说,$x=2$ 时原方程只有一组正整数解 $x=y=2$.

ii $x>2,y>2$ 时,由 $(x+1)^y=x^{y+1}+1$ 有

$$x^y+C_y^1x^{y-1}+\cdots+C_y^2x^2+C_y^1x=x^{y+1}$$

因此 $x\mid C_y^1$,即 $x\mid y$.设 $y=mx,x=2^tx_1,t\geqslant 1,2\nmid x_1,y=2^tmx_1$.把 $y=2^tmx_1$ 代入下式

$$(x+1)^y=x^{y+1}+1$$

得

$$(2^tx_1+1)^{2^tmx_1}=(2^tx_1)^{2^tmx_1}+1$$

$$((2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1})^2-1=2^{2^t}tmx_1+tx^{2^tmx_1+1}$$

又因为

$$((2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1,(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1)=2$$

所以

$$\begin{cases}(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1=2^{2^ttmx_1+t-1}\\(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2b^{2^tmx_1+1}\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1=2b^{2^tmx_1+1}\\(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2^{2^ttmx_1+t-1}a^{2^tmx_1}+1\end{cases}$$

其中 $x_1=ab,(a,b)=1$,如果 ⑦ 成立,由

$$(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2b^{2^tmx_1}+1$$

有 $2^tx_1\mid 2b^{2^tmx_1+1}$,显然 $t=1$,否则 $2\mid b,2\mid x_1$,此与 $2\nmid x_1$ 相矛盾.而 $t=1$ 时,$x_1\mid b^{2mx_1+1}$,则 $x_1=ab,(a,b)=1$ 有 $x_1=b,a=1$,从而 ⑦ 给出

$$2^{2mx_1-1}-x_1^{2mx_1+1}=1$$

但 $x=2x_1>2,x_1>1$,故此不可能.如果 ⑧ 成立

$$(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2^{2^ttmx_1+t-1}a^{2^tmx_1+1}$$

给出

$$2^tx_1\mid 2^{2^ttmx_1+t-1}a^{2^tmx_1+1}$$

$$x_1\mid a^{2^tmx_1+1}$$

因此,$x_1=a,b=1$,此时 ⑧ 中的

$$(2^tx_1+1)^{2^{t-1}mx_1+1}=2b^{2^tmx_1+1}$$

变为

$$(2^t x_1 + 1)^{2^{t-1} m x_1} = 1$$

此也不可能.

5 几个集训队试题

我们先引入一个有用的引理.

引理 $\left(a - b, \dfrac{a^n - b^n}{a - b}\right) = (a - b, nb^n)$,其中 a,b 是两个互异的整数.

试题 J 求证:当 $p \mid x$ 时,方程

$$x^2 - 1 = y^p \quad ①$$

无正整数解,这里 $p > 3$ 是素数.

证明 我们仍用反证法证明,假设有解,将导致矛盾.

分解式 ① 为

$$(x + 1)(x - 1) = y^p \quad ②$$

当 x 是偶数时,$(x + 1, x - 1) = 1$,式 ② 化成

$$x + 1 = t_1^p, x - 1 = t_2^p$$

其中,$y = t_1 t_2$,t_1,t_2 是正整数.

从而,$t_1^p - t_2^p = 2$,这显然是不可能的,故此时无解,所以 x 必须是奇数.此时,y 是偶数,并且$(x + 1, x - 1) = 2$,再结合式 ②,将有两种情况出现:

i $x + 1 = 2a^p$;

ii $x + 1 = 2^{p-1} b^p, x - 1 = 2^{p-1} b^p, x - 1 = 2a^p$.

这里 $y = 2ab$,$(a, b) = 1$.

在 ① 时,两式相减得

$$a^p = 2^{p-2} b^p + 1 \quad ③$$

也即

$$(2b)^p + 4 = 4a^p$$

配方后得到

$$(2^p - 2)^2 + (2b)^p = (a^2)^p$$

也即

$$(a^p - 2)^2 = (a^2 - 2b)\left(\frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right)$$

由于

$$\left(a^2 - 2b, \frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right) = 1 \text{ 或 } p$$

但从条件 $p \mid x$ 知

$$p \mid \frac{x - 3}{2} = a^p - 2$$

故

$$\left(a^2 - 2b, \frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right) = 1 \quad ④$$

再由式 ④ 可知,存在正整数 c,使得

$$a^2 - 2b = c^2 \quad ⑤$$

从式 ④ 可以看出 a 是奇数,从而 c 也是奇数,于是易知 a,b,c 两两互素.此时,将式 ⑤ 化成

$$a^4-2a^2b=(ac)^2$$

再配方后便可得到

$$(a^2-b^2)=b^2+(ac)^2 \qquad ⑥$$

由于$(b,ac)=1$,从而b,ac,a^2-b是方程$x^y+y^2=z^2$的一组本原解.注意到ac是奇数,则方程⑥的解为

$$ac=s^2-t^2,b=2st,a^2-b=s^2+t^2$$

从而
$$a^2=(a^2-b)+b=s^2+t^2+2st=(s+t)^2$$

即
$$a=s+t$$

于是
$$b=2st=st+st>s+t=a$$

但由式③明显地可以看出$a>b$,矛盾.

用同样的方法,在②的情况下可得到类似的矛盾.所以假设不成立,命题得证.

试题 K 求证:方程

$$(x+1)^p-x^q=1 \quad ,x,p,q\geqslant 2 \qquad ⑦$$

仅有一组正整数解$x=2,p=2,q=3$.

证明 在⑦两边 mod $x+1$,可得

$$-(-1)^q\equiv 1(\bmod x+1)$$

从而q是奇数,于是⑦可以化成

$$(x+1)^{p-1}=x^{q-1}-x^{q-2}+\cdots+1 \qquad ⑧$$

在⑧中再 mod $x+1$,得$0\equiv q(\bmod x+1)$,即$x+1\mid q$.从而$x+1$是奇数,x是偶数,再在⑦的另一种变形

$$(x+1)^{p-1}+\cdots+1=x^{q-1}$$

两边 mod x,便知$p\equiv 0(\bmod x)$.那么$x\mid p$,从而p是偶数.

设$x=2^kt,k\in\mathbf{N},t$是奇数,$q=2s$,将⑦化成

$$((x+1)^s-1)((x+1)^s+1)=(2^kt)^q$$

明显地
$$((x+1)^s-1,(x+1)^s+1)=2$$

那么将出现两种可能:

i $(x+1)^s-1=2a^q,(x+1)^s+1=2^{kq-1}b^q$;

ii $(x+1)^s-1=2^{kq-1}b^q,(x+1)^s+1=2a^q$.

其中a,b是两个互素的奇数,其积为t.

在i时,由第一式即知$x\mid 2a^q$,也即$2^kab\mid 2a^q$.于是,$k=1,b=1$.此时,将两式相减即得

$$a^q+1=2^{q-2}$$

要使上式成立,只有$a=1$,从而$q=3$.此时仅有解$x=2,p=2,q=3$.

在②时,由第二式可知

$$2^{ks-1}(ab)^s+C_s^1 2^{k(s-1)-1}(ab)^{s-1}+\cdots+C_s^{s-1}2^{k-1}ab+1=a^q$$

从而$a\mid 1$,于是$a=1$,进而$(x+1)^s=1$.这显然是不可能的,此时无解.

综上所述,原命题得证.

试题 L 求方程 $x^r - 1 = p^n$ 的满足下述两条件的所有正整数组解(x,r,p,n)：(1)p 是一个素数；(2)$r \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2$.

（1994 年国家集训队测验题）

解法 1 分两种情况讨论.

i 当 $x = 2$ 时，由于 $r \geqslant 2$，那么 $2^r - 1$ 必是奇数. 从而，利用

$$2^r - 1 = p^n \tag{9}$$

可以知道 p 必为奇数. 再考虑 n，如果 n 为偶数，由于

$$p = 2k + 1 \quad ,k \in \mathbf{N}$$

记

$$n = 2l \quad ,l \in \mathbf{N}$$

$$p^n + 1 = (2k+1)^{2l} + 1 = (4k^2 + 4k + 1)^l + 1 \equiv 2(\text{mol } 4) \tag{10}$$

于是，$p^n + 1 \neq 2^r$. 从而，n 必为奇数，$n - 1$ 为偶数. 由于

$$1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - p^5 + \cdots + p^{n-3} - p^{n-2} + p^{n-1} = \frac{1 - p^{n-1}(-p)}{1 - (-p)} = \frac{1 + p^n}{1 + p} \tag{11}$$

那么

$$2^r = p^n + 1 = (1+p)(1 - p + p^2 - p^3 + \cdots + p^{n-3} - p^{n-2} + p^{n-1}) \tag{12}$$

p 是奇素数，则 $1 + p \geqslant 4$. 由上式，有

$$1 + p = 2^t \quad ,t \in \mathbf{N}, t \geqslant 2 \tag{13}$$

即 $p = 2^t - 1$. 于是，再利用 $n = 2s + 1(s \in \mathbf{N})$，有

$$p^n + 1 = (2^t - 1)^{2s+1} + 1 = (2^t)^{2s+1} - C_{2s+1}^1(2^t)^{2s} + \cdots - C_{2s+1}^{2s-1}(2^t)^2 + C_{2s+1}^{2s}2^t = 2^{2t}m + (2s+1)2^t \quad (m \text{ 是整数}) \tag{14}$$

由式 ⑭ 可知，$p^n + 1$ 能被 2^t 整除，但不能被 2^{t+1} 整除，于是，从 ⑫ 第一个等式可知，必定有

$$2^r = p^n + 1 = 2^t \tag{15}$$

又由于 $n \geqslant 8$，⑬ 与 ⑮ 矛盾. 这表明当 $x = 2$ 时，原方程没有满足题目条件的解.

ii 当 $x \geqslant 3$ 时，利用

$$p^n = x^r - 1 = (x-1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + x + 1) \tag{16}$$

可知，$x - 1$ 是 p 的某个幂次，再考虑到 $x - 1 \geqslant 2$，那么，必定有

$$x - 1 = p^m \quad ,m \in \mathbf{N} \tag{17}$$

由 ⑰ 可以推出

$$x \equiv 1(\text{mod } p) \tag{18}$$

由 ⑯ 可知，$x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + x + 1$ 也是 p 的某个幂次. 而由 ⑱ 可知

$$x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + x + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{r\text{个}1}(\text{mod } p) = r(\text{mod } p) \tag{19}$$

于是 r 必是 p 的倍数.

如果 $p = 2$，那么 r 必是偶数. 记 $r = 2r_1(r_1 \in \mathbf{N})$，由题目中方程，有

$$2^n = x^r - 1 = (x^{r_1} - 1)(x^{r_1} + 1) \tag{20}$$

那么，$x^{r_1}-1$ 及 $x^{r_1}+1$ 都是2的幂次．而$(x^{r_1}+1)-(x^{r_1}-1)=2$，则必定有 $x^{r_1}-1=2$．（因为如果 $x^{r_1}-1=2^{\alpha}$，这里正整数 $\alpha\geqslant 2$，那么，一方面，$x^{r_1}+1$ 也应是2的幂次；另一方面，$x^{r_1}+1>x^{r_1}-1$，因此，必有 $x^{r_1}+1=2^{\beta}$，这里正整数 $\beta\geqslant\alpha+1$，从而，可以得到

$$(x^{r_1}+1)-(x^{r_2}-1)=2^{\beta}-2^{\alpha}=2^{\alpha}(2^{\beta-\alpha}-1)$$

上式右端不可能等于2．矛盾．）$x^{r_1}=3$，又 $x\geqslant 3$，那么，必有 $x=3,r_1=1,r=2,2^n=3^2-1=8,n=3$．这样，我们得到一组满足题目条件的解

$$x=3,r=2,p=2,n=3 \tag{21}$$

如果 $p\geqslant 3$，由 ⑰ 有

$$x^r-1=(p^m+1)^r=rp^m+\sum_{i=2}^{r}C_r^i(p^m)^i \tag{22}$$

考虑上式右端$\sum$ 中每一项 $C_r^i(p^m)^i(2\leqslant i\leqslant r)$，明显地

$$C_r^i(p^m)t=\frac{r!}{i!(r-i)!}(p^m)^i=$$
$$\frac{(r-1)!}{(i-1)!(r-i)!}\frac{r}{i}(p^m)i=$$
$$C_{r-1}^{i-1}rp^m\frac{(p^m)^{i-1}}{i} \tag{23}$$

下面证明对于任意正整数 $i\geqslant 2$，有

$$i<(p^m)^{i-1} \tag{24}$$

当 $i=2$ 时，显然有

$$2<p^m \tag{25}$$

设 $i=k\geqslant 2$ 时，有

$$k<(p^m)^{k-1} \tag{26}$$

当 $i=k+1$ 时，利用 ㉕ 和 ㉖，有

$$k+1<2k<2(p^m)^{k-1}<(p^m)^k \tag{27}$$

从而，㉔ 成立．因此，i 的素因子分解式中 p 的幂次小于 $m(i-1)$．又 C_{r-1}^{i-1} 是正整数，所以，$C_r^i(p^m)^i$ 的素因子分解式中所含p 的幂次高于rp^m 中所含p 的幂次α．从而 x^r-1 能被 p^{α} 整除，但不能被 $p^{\alpha+1}$ 整除，由 ⑭ 和题目中方程，有

$$p^{\alpha}<x^r-1=p^n \tag{28}$$

故 $n>\alpha$，矛盾．因此，满足题目的解只有 ㉑ 一组．

解法2 分情况讨论：

i 当 $x=2$ 时，易见 p 为奇数．

若 n 为偶数，则 $p^n+1\equiv 2(\bmod 4)$，从而 $r=1$，此时无解；

若 n 为奇数，则

$$2^r=p^n+1=(p+1)(p^{n-1}-p^{n-2}+\cdots-p+1)$$

故可设 $p+1=2^t(t\in\mathbf{N})$，于是

$$p^n+1=(2^t-1)^n+1=\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i(2^i)^i+C_n^12^t=$$

$$2^{2t}M + 2^t n$$

所以 $p^n + 1$ 能被 2^t 整除,但不能被 2^{t+1} 整除,故此时亦无解.

ii 当 $x \geqslant 3$ 时,由 $x^r - 1 = p^n$ 得对于 $x - 1$ 存在正整数 $t < m$,及 $t + m = n$,使

$$x - 1 = p^t \tag{29}$$

$$x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + 1 = p^m \tag{30}$$

利用 ㉙,在 ㉚ 两边取 mod p^l 可知 $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^l)$,从而 $p \mid r$. 于是,由 $x^r - 1 = p^n$,即存在正整数 e,使

$$(p^l + 1)^p - 1 = p^e$$

利用二项式展开,将上式变形后得

$$p^{t(p-1)} + \sum_{j=2}^{p-1} \frac{C_p^j}{p} (p^t)^{j-1} + 1 = p^{e-t-1} \tag{31}$$

如果 $t(p - 1) - 1 > 0$,那么式 ㉛ 左边 $\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 但 p 整除式 ㉛ 右边,这是矛盾的,故只有 $t(p - 1) - 1 = 0$. 从而 $t = 1, p = 2$,也即 $x = 3, p = 2$. 于是我们只要求满足

$$3^r - 1 = 2^n \tag{32}$$

的正整数解 (r, n).

由 $n \geqslant 2$,利用 ㉜ 可知 $3^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$,从而 r 是偶数. 设 $r = 2s$,将 ㉜ 化为

$$(3^s - 1) + (3^s + 1) = 2^n$$

从而

$$3^s - 1 = 2^a, 3^s + 1 = 2^b$$

两式相减得

$$2^{b-1} - 2^{a-1} = 1$$

只有 $a = 1, b = 2$,从而 $n = 3, r = 2$.

综上所述,原方程的解为 $(x, p, r, n) = (3,2,2,3)$.

6 关于 Catalan 猜想的一些进展

Catalan 猜想表述为:

问题 1 方程

$$x^n - y^n = 1, x, y, m, n \in \mathbf{N}, m > 1, n > 1 \tag{1}$$

仅有解 $(x, y, m, n) = (3,2,2,3)$.

对这个猜想有许多优秀的数论专家进行了研究,如 Lebesgue, Nagel, Selberg, Obath, Cassels, Hyyro, Hampel, Schinzel, 柯召, Chein, Rotkiewicz. 但他们所使用的方法仍局限于初等方法, 可见 Ribenboim 的专著《Catalan's Conjecture》(Boston, MA, Academic Press Inc, 1994). 在早期的工作中, Lebesgue 和柯召分别证明了:方程 ① 没有适合 $2 \mid n$ 的解 (x, y, m, n),该方程仅有解 $(x, y, m, n) = (3,2,2,3)$.

根据上述结果,我们可以把 Catalan 猜想中尚未解决的部分剥离出来,表述为:

问题 2 方程

$$x^p - y^q = 1 \quad , x, y \in \mathbf{N}, p, q \in p^* \tag{2}$$

其中 p^* 是全体素数及其方幂的集合,无解 (x, y, p, q).

对于方程 ②, Cassels 运用初等数论方法进行了深入的讨论,他证明了:方程 ② 的解 (x, y, p, q) 都满足 $q \mid x, p \mid y$. 并且他提出了如下较弱的猜想:

问题 3 方程 ② 仅有有限多组解 (x,y,p,q). 1976 年, Tijdeman 运用 Gel'fond-Baker 贝克方法解决了上述猜想,他证明了如下定理:

定理 方程 ② 仅存在有限多组解 (x,y,p,q),而且这些解都满足 $\max(p,q) < C_1$,以及 $x^p < C_2$. 关于上述定理中的常数,1976 年 Tangevin 具体算出 $C_1 < e^{241}$ 以及 $C_2 < \exp\exp\exp 730$. 1992 年, Mighotte 进一步证明了:方程 ② 的解 (x,y,p,q) 都满足 $p < 1.21\times 10^{26}$ 以及 $q < 1.31\times 10^{18}$;特别地当 $q \equiv 3 \pmod 4$ 时,必有 $p < 2.7\times 10^{24}$ 以及 $q < 1.23\times 10^{18}$.

另外,运用初等数论方法和代数数论方法可以得到方程 ② 解的下界. 在这方面, Inkeri, Glass, Meroak, Okada 和 Stenier, Mignotte, Schwarz 等人分别对某些较小的奇素数 p,q 证明了该方程无解. 综合上述结果可知,方程 ② 的解 (x,y,p,q) 都满足 $\min(p,q) \geqslant 9$. 1996 年, Mignotte 和 Royp 宣布可将上述下界都改为 $\min(p,q) > 10^4$. 根据有关 p,q 的下界, Aultonen 和 Inkeri 运用初等方法证明了:方程 ② 的解 (x,y,p,q) 都满足 $x^p > 10^{500}$. 此外, Evertse 运用逼近方法讨论了方程 ① 的解数,他证明了:对于给定的正整数 m,n,该方程至多有 $(m,n)^{\min(m,n)}$ 组解.

设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是适合 $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ 的素数, $\Phi = \{\pm p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r} \mid t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是非负整数$\}$. 1977 年, vun der Poorten 推广了 Tijdeman 的结论,他证明了:方程

$$x^m - y^n = z^l, x,y,z,m,n \in \mathbf{N}, m > 1, n > 1,$$
$$mn > 4, l = \mathrm{l.c.m}(m,n) \qquad ③$$

仅有有限多组解 (x,y,z,m,n,l) 适合 $z \in S$,而且这些解都满足 $\max(m,n) < C_8(p_r)$ 以及 $x^m < C_9(p_r)$. 由于方程 ③ 中的 l 是 m 与 u 的最小公倍数,所以该方程可写成

$$\left(\frac{x}{u}\right)^m - \left(\frac{y}{v}\right)^n = 1, x,y,u,v,m,n \in \mathbf{N}$$
$$\gcd(x,u) = \gcd(y,v) = 1, m > 1, n > 1, mn > 4 \qquad ④$$

对此, 1986 年 Shorey 和 Tijdeman 运用同样的方法证明了:该方程仅存在有限多组解 (x,y,u,v,m,n) 可使 x,y,u,v 中至少有一数属于 S,而且这些解都是可以有效计算的. 另外, Tijdeman 还运用 Diophantus 逼近方法,在 u,v,m,n 给定的条件下,给出了方程 ④ 的解的上界

$$x < C_1^* u^{1+C_2^*(\ln t)^4/\sqrt{t}}$$
$$y < C_1^* v^{1+C_2^*(\ln t)^4/\sqrt{t}}$$

其中 $t = \max(m,u)$.

方程 ④ 可以写成类似方程 ① 的形式

$$x^m - y^n = 1, x,y \in \mathbf{Q}, x > 0, y > 0$$
$$m,n \in \mathbf{N}, m > 1, n > 1, mn > 4 \qquad ⑤$$

对此, 1986 年 Shorey 和 Tijdeman 曾提出如下猜想:

问题 4 方程 ⑤ 仅存在有限多组解 (x,y,m,n),而且这些解都是可以有效计算的.

这是一个至今未解决的问题.

后记

“俯视教育，直面数学，薪传学术，关注文化”是我们数学工作室的16字宗旨，名正则言顺，志同则道合。这是一本众人合力编译成的大书，参编人员多达三十几位。

整个编译工程浩大，由刘培杰数学工作室策划并组织编写，其中译者有：

冯贝叶　许　康　侯晋川　陆柱家　陈培德　卢亭鹤
魏力仁　刘裔宏　吴茂贵　陶懋欣　刘尚平　陆　昱
姚景齐　邹建成　张永祺　邵存蓓　郭梦书　王兰新

校者有：

冯贝叶　陆柱家　彭肇藩　沈信耀　李培信　李　浩
陈培德　童　欣　陆　昱　强文久　秦成林　林友明
姚景齐

其中刘裔宏、许康、吴茂贵、魏力仁是我国较早关注美国大学生数学竞赛的译者；冯贝叶先生是本书中承担任务最重的老先生，虽年近六旬，但每天奔波于北京图书馆与中科院之间，并且通过在美国的同学找到了最新的试题；郭梦书博士和田廷彦先生解答了部分题目。

许多人现在都在津津乐道于出版业要走出去，我们工作室为什么还要大力引介宣扬舶来品呢？中国社会科学院赵汀阳说的有道理：“现在我们很想说中国话语，但是，光有愿望是不够的，必须创造出有分量有水平的思想。精神领域和物质领域有一点是一样的：一种产品必须有实力才真正有话说，话

才能说得下去。"(赵汀阳.直观.福州:福建教育出版社,2000年,第303页)图书是一种精神产品,它有物质外壳,但更重要的是精神的内涵,今天我们的印刷和装帧都与发达国家的水平很接近了,但内容水平却还有一定距离,所以我们当前的主要工作仍然是"请进来",要"师夷之长技".按当前国际的评价来讲,中国中等教育中数学教育水平并不弱,按管理学的说法,一只桶能盛多少水关键在那块最短板的长度,我们的最短板在高等教育,其中的数学教育与发达国家相比当然是有所差距。

在本书的出版过程中,李广鑫编辑付出了很多劳动.自然科学类的图书编辑是很难做的,社会公众对此了解不够,以为催催稿、改改错就可胜任,其实那远远不够,一个理想中的编辑是什么样呢?还是讲一个美国的例子,1921年爱因斯坦在普林斯顿大学作了一场学术讲演,《纽约时报》记者欧文发回了一篇报道。总编辑卡尔·范安达对报道中的一个方程式产生疑问,欧文便请帮助写报道的一位物理学家重新审阅,物理学家肯定地说:"爱因斯坦博士就是这么写的。"可范安达仍不罢休,要求欧文向爱因斯坦本人求证。爱因斯坦看后惊讶地说:"天啊!你们总编辑说得对,是我往黑板上抄写方程式的时候出了错。"当编辑当到这个份才够格,也才真正能够得到社会的认可及相应的声誉。

随着数学工作室出书量的增加,越来越多的读者对工作室日常的工作感到好奇,问你们每天都在忙些什么,这个问题很难回答。

美国女数学家罗宾逊(Julia Robinson)能力超强,她同丈夫同在伯克利大学任教,由于伯克利大学规定夫妇不能在同一系任教,于是统计系为她提供了一个职位,她随职位申请书一同交给人事部门的工作描述,是典型的数学家的一周工作情况:"周一:试图证明定理;周二:试图证明定理;周三:试图证明定理;周四:试图证明定理;周五:定理错误。"

我们工作室的工作与之相仿:约稿,编稿,审稿,改稿,发稿,被或不被读者所接受。

Erica Klarreich 曾说:从现在开始,解决数学中最伟大的问题,你将得到荣誉和财富。

准备好了吗?开始解题吧!

刘培杰

2009.1.1